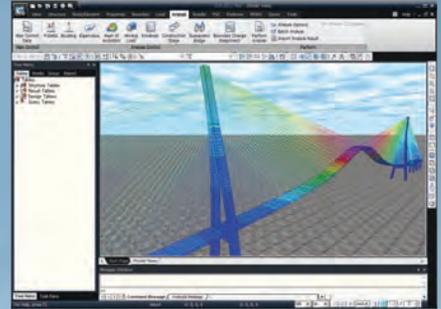


For utmost Accuracy & Productivity, MIDAS provides the best solutions in Structural Engineering. We Analyze and Design the Future.



# Structural Analysis

midas Civilで学ぶ構造力学 | 解析編 |

MIDAS

# TABLE OF CONTENTS

1

はじめに

---

2

P-delta解析

---

3

幾何非線形解析

---

4

座屈解析

---

5

固有値解析

---

6

時刻歴解析

---

7

応答スペクトル解析

---

8

プレストレス解析

---

9

熱応力解析

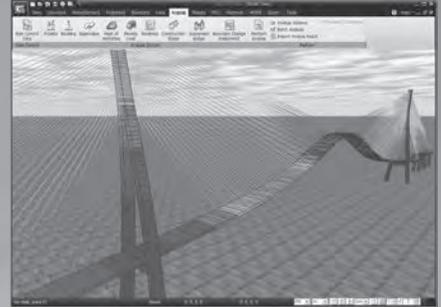
---

10

面外荷重を受ける平板の解析

---

For utmost Accuracy & Productivity, MIDAS provides the best solutions in Structural Engineering. We Analyze and Design the Future.



# Structural Analysis

midas Civilで学ぶ構造力学 | 解析編 |

MIDAS

# About Contents

## 本書の構成について

本書は全10章で構成されており、各章は**概念の理解**、**チュートリアル**、**構造計算の解説**、**練習問題**の順で構成されています。

「**概念の理解**」は構造形式のモデルに対する基本的な構造力学の概念を説明し、数値計算に必要な解析概念および理論式について説明します。

「**チュートリアル**」では、実務で必要となる多様な構造形式を提示し、プログラムを利用したモデルの生成、荷重・境界条件の入力方法などを段階ごとに詳しく説明し、誰でも簡単に正確な構造計算が行えるようにしました。また、荷重や境界条件などを変えながら複数のモデルに対し解析を実行し、これらの力学的な挙動及び部材力を比較分析する方法を説明します。

「**構造計算の解説**」では、チュートリアルで提示した解析モデルを数値計算で直接計算することで、プログラムによる解析の結果値に対する理解度をより深められるようにしました。

「**練習問題**」では、チュートリアルでも提示したような実務基盤の構造形式を取り上げることで、応用力の涵養を図ります。

本書では構造力学の基本知識やプログラムの基本的な使用方法に関する説明は最小限にし、学校で学んだ構造力学の知識を実務で適用し、理解することに重点を置きました。従って、本書の内容で取り上げられる構造概念や解析理論また、プログラムの使用方法に関するより詳しい内容については、市販の構造力学のテキストやMIDASのプログラムマニュアルをご参照ください。プログラムマニュアルはプログラムの画面上でヘルプメニューをクリックして確認することができます。プログラムで適用される要素、境界条件、解析の機能及び前処理・後処理段階において使用される全ての機能について詳しく説明されています。

なお、プログラムの基本使用方法に関するオンラインの講義資料を当社HPの教育センターに用意しておりますので、どうぞご利用ください。( <http://jp.midasuser.com/civil> )

体験版  
(Trial Version)  
使用法

---

お買い求めの参考や学習のため、使用可能な機能や期間を限定した体験版を1回に限り試用できるようにしました。手順は次の通りです。

- 申し込みの手順**
1. 会員登録 : MUSS(MIDAS User Support System、<http://jp.midasuser.com/civil>)
  2. サインイン
  3. 申し込み : [購入情報] → [体験版申請] → [申込書作成]
  4. 体験版の承認
  5. ダウンロード/実行(使用)

**体験版の承認** 承認後、ダウンロード方法の案内メールを送信

---

\*本書はMidas Civil845ver(2015)、SI単位を活用して制作されています。



# II

## 解析編

### TABLE OF CONTENTS

1	はじめに
2	P-delta解析
3	幾何非線形解析
4	座屈解析
5	固有値解析
6	時刻歴解析
7	応答スペクトル解析
8	プレストレス解析
9	熱応力解析
10	面外荷重を受ける平板の解析



# 1. はじめに

## TABLE OF CONTENTS

### 01.1 解析編の構成

---

01.1.1 一般事項	1-1
01.1.2 1次元要素による解析	1-2
01.1.3 変形-変形率の関係	1-5
01.1.4 2次元要素による解析	1-7
01.1.5 有限要素解析	1-10

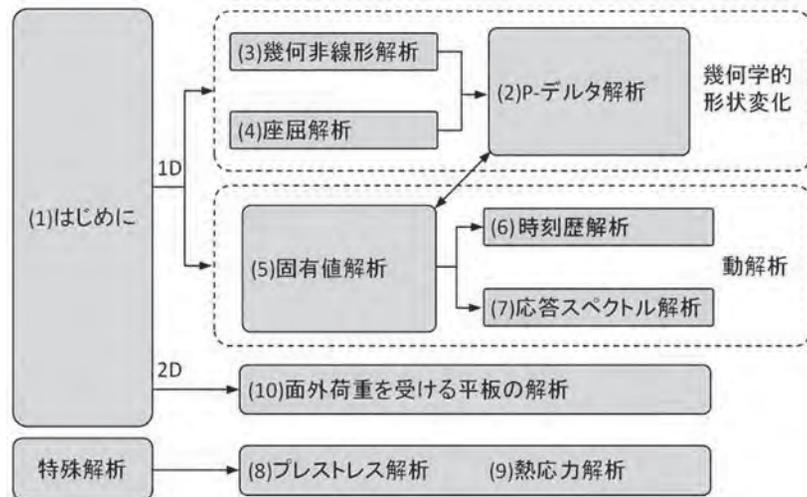


## 01.1 解析編の構成

### 01.1.1 一般事項

「midas Civil で学ぶ構造力学」は1巻の[構造編]と2巻の[解析編]に分類される。[構造編]は構造力学の基本的な内容で、[解析編]は構造解析をより深化させた内容で構成されている。[構造編]及び[解析編]は同じ力学的基盤に基づいているため、両編の内容は深い連携性を持っている。図1.1は[解析編]の各章の内容の連携性を表したものである。

▶図 1.1  
「midas Civil で学ぶ構造力学  
[解析編]」の各章の関係



[解析編]は各内容の連携性を考慮し、次のような構成になっている。

- (1) はじめに
- (2) P-デルタ解析
- (3) 幾何非線形解析
- (4) 座屈解析
- (5) 固有値解析
- (6) 時刻歴解析
- (7) 応答スペクトル解析

- (8) プレストレス解析
- (9) 熱応力解析
- (10) 面外荷重を受ける平板の解析

「(1)はじめに」では解析編の基盤となる全般的な力学的概念を簡単にまとめる。ここでは、力学的概念を微分方程式 (1 次元要素) または、偏微分方程式 (2 次元要素) で説明する。P-デルタ解析と幾何非線形解析は同じ力学的概念に基づいていることで、2 章と 3 章に続けてまとめたが、これらの特殊なケースとして座屈解析が挙げられるため、4 章に座屈解析を配置した。また、座屈解析と固有値解析は数学的に同じ概念に基づいているため、5 章に固有値解析を配置した。また、固有値解析と密接に関連している動的解析として時刻歴解析と応答スペクトル解析を 6 章と 7 章に配置し、特殊解析として分類できるプレストレス解析と熱応力解析はその次に配置した。以上の解析は 1 次元である線要素を対象にした解析であるのに対し、2 次元の面要素を対象にした解析として「面外荷重を受ける平板の解析」を最後に配置した。

01.1.2 1 次元要素の (1) 1 次元要素の解析

解析

P-デルタ解析、幾何非線形解析、座屈解析、固有値解析、時刻歴解析、応答スペクトル解析は全て同じ微分方程式を使用している。図 1.2 は  $x-z$  平面で等分布荷重  $q$  が鉛直方向に作用する際、梁の変形形状と力の釣り合い状態を表したものである。

▶ 図 1.2  
 1 次元線要素

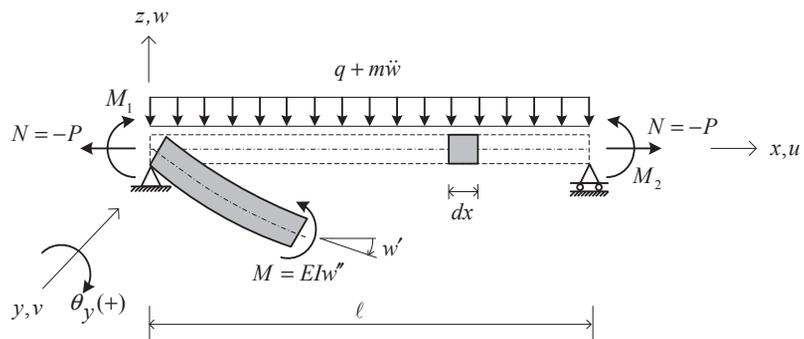


図 1.2 で、原点から  $x$  だけ離れた位置における力（モーメント）の釣り合い条件を適用すると、次のような結果が得られる。

▶式 1.1

$$EIw'' + Pw = -(M_1 - M_2)\frac{x}{\ell} + (q + m\ddot{w})\frac{x}{2}(\ell - x) + M_1$$

ここで、 $E$  は材料の弾性係数、 $I$  は断面 2 次モーメント、 $m$  は単位長さ当たりの質量、 $P$  は圧縮力、 $M_1$  と  $M_2$  は両端に作用するモーメントを意味する。 $w''$  は  $w$  を距離  $x$  に対し 2 回微分（曲率）することを意味し、 $\ddot{w}$  は  $w$  を時間  $t$  に対し 2 回微分（加速度）することを意味する。

▶図 1.3

線要素での自由体図

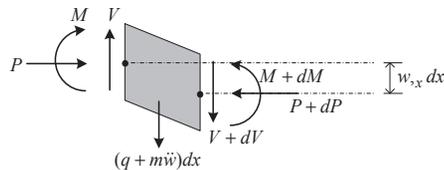


図 1.3 のように微少部分  $dx$ （図 1.2 で塗りつぶした部分）に力の釣り合い条件を適用するか、または、式 1.1 を  $x$  に対し 2 回微分すると次のような結果が得られる。

▶式 1.2

$$EIw'''' + Pw'' + m\ddot{w} = -q$$

微分方程式で表現される力の釣り合い条件は、剛性効果（ $EIw''''$  及び  $Pw''$ ）、慣性力効果（ $m\ddot{w}$ ）そして、荷重効果  $q$  を全て含んでいるため、この式から適切に項を選択することで与えられた条件に必要な支配方程式が構成できる。

静的幾何非線形解析、P-デルタ解析では式 1.3 のように慣性力に該当する部分を除いた式が用いられる。

▶式 1.3

$$EIw'''' + Pw'' = -q$$

座屈解析の場合には式 1.3 から  $q$  を除いた式 1.4 を利用するか、端部の拘束条件を考慮するため式 1.1 のモーメントの項を考慮することで方程式が組める。式 1.1 から慣性力と分布荷重  $q$  に該当する部分を除くと式 1.5 のようになる。

▶式 1.4  $Elw'''' + Pw'' = 0$

▶式 1.5  $Elw'' + Pw = -(M_1 - M_2) \frac{x}{\ell} + M_1$

固有値解析は構造物の動的特性のみを求めることが目的であるため、式 1.2 から荷重に関連する項を除くことで方程式が構成される。

▶式 1.6  $Elw'''' + m\ddot{w} = 0$

時刻歴解析と応答スペクトル解析で幾何非線形効果を考慮しない場合には式 1.2 から軸力  $P$  に該当する部分を除く。また、構造物の減衰効果を考慮するため次のような式になる。

▶式 1.7  $m\ddot{w} + c\dot{w} + Elw'''' = -q$

式 1.7 で最初の項は慣性力、次の項は減衰力、その次の項は剛性力を意味する。以上のような解析の種類ごとの特性を表 1.1 にまとめる。

▶表 1.1  
「midas Civil で学ぶ構造力学 [解析編]」の各章の解析法の特徴及び式の一覧

要素の種類	解析の方法	静的解析		動解析	特徴	式
		幾何非線形	固有値 (座屈)解析			
1D	P-デルタ	○	×	×		$Elw'''' + Pw'' = -q$
	幾何非線形	○	×	×		$Elw'''' + Pw'' = -q$
	座屈	○	○	×	臨界荷重、座屈形状	$Elw'''' + Pw'' = 0$
	固有値	×	○	○	固有周期、固有ベクトル	$Elw'''' + m\ddot{w} = 0$
	時刻歴	×	△	○	時間による応答の算定	$Elw'''' + m\ddot{w} + c\dot{w} = -q$
	応答スペクトル	×	○	○	最大応答の算定	$Elw'''' + m\ddot{w} + c\dot{w} = -q$
	フレストレス	×	×	×		$Elw'''' = -q$
	熱応力	×	×	×		$Elw'''' = -q$
2D	面外荷重を受ける平板	×	×	×		$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{D}$

数学的な観点から考えると、構造解析は微分方程式の解を求めることと同じである。微分方程式は変形形状  $w$  を未知数とする関数に境界条件を適用して解を求める。例えば、たわみ  $w$  を微分するとたわみ角  $\theta$  になるため、境界条件として端部が固定されていると、たわみを微分したもの、すなわち、たわみ角度が 0 になることから解を求めることができる。微分方程式に対する理論解を求めるためには主に三角関数が用いられる。ここで、三角関数を利用する理由は、構造物の変形形状が三角関数に最も近いためである。しかし、変形形状において三角関数のような定型の関数だけでは考慮できないケースが一般的であるため、その他にも多様な関数も用いなければならない。有限要素法では一般的に形状関数として高次式が使用される。これに関しては「01.1.5 有限要素解析」にて詳しく説明する。

### 01.1.3 変形と変形率の関係

1次元要素において、軸方向の変形率を算定する方法は複数あるが、高次項（幾何非線形）は考慮しない公称ひずみ（Engineering strain）と、高次項を考慮するグリーン・ラグランジュひずみ（Green-Lagrange strain）を次に紹介する。

公称ひずみ: 
$$\varepsilon_E = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\ell}{\ell_0} - 1$$

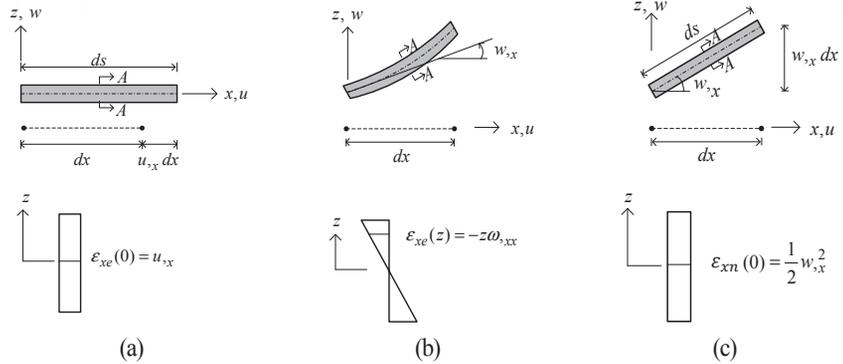
▶式 1.8

グリーン・ラグランジュひずみ: 
$$\varepsilon_G = \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{2\ell_0^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\ell^2}{\ell_0^2} - 1 \right)$$

▶式 1.9

ここで、 $\ell_0$  と  $\ell$  はそれぞれ変形前と変形後の長さである。図 1.4 は  $x-z$  平面上で変形する微小長さ  $dx$  に対する変形-変形率の関係を表したものである。図の(a)は線形軸ひずみ、(b)は線形曲げひずみ、そして(c)は幾何非線形のひずみを表している。 $A-A$  断面の中心での線形ひずみ(図(a))と幾何非線形のひずみ(図(c))による変形率はそれぞれ  $\varepsilon_{xe}(0)$  と  $\varepsilon_{xn}(0)$  で表し、 $A-A$  断面の中心から  $z$  だけ離れた位置での曲げひずみ(図(b))による変形率は  $\varepsilon_{xe}(z)$  で表している。変形率  $\varepsilon_{xe}(0)$  と  $\varepsilon_{xe}(z)$  は線形挙動を表す変形率であり、 $\varepsilon_{xn}(0)$  は形状の変化により発生する非線形変形率を意味する。

▶ 図 1.4  
高次変形率の意味  
(a) 軸ひずみ  
(b) 曲げひずみ  
(c) 幾何非線形ひずみ



▶ 式 1.10

$$\varepsilon_{xe}(0) = \frac{ds}{dx} - 1 = \frac{dx + u_{,x} dx}{dx} - 1 = u_{,x}$$

▶ 式 1.11

$$\varepsilon_{xe}(z) = zw_{,xx}$$

▶ 式 1.12

$$\varepsilon_{xn}(0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{ds^2}{dx^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{dx^2 + w_{,x}^2}{dx^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

P-デルタ解析、座屈解析、そして幾何非線形解析は幾何学的非線形挙動を考慮する。従って、式 1.12 による変形率の効果が適用され、解析の目的に合わせて適切に反映される。P-デルタ解析と座屈解析では部材の軸方向の変形の影響は大きくないため、軸方向の変形は無視した式 1.10 や式 1.11 の変形率を使用する。また、幾何非線形解析では軸方向の変形率の効果を含む式 1.13 や式 1.14 などを使用する。曲げひずみを考慮しないトラス要素の場合、式 1.15 のように変形率を仮定することで幾何非線形解析を行うこともある。

▶ 式 1.13

$$\varepsilon_x = -zw_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

▶ 式 1.14

$$\varepsilon_x = u_{,x} - zw_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

▶ 式 1.15

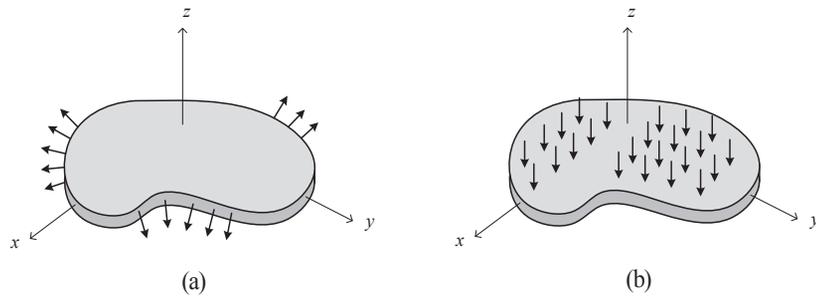
$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

以上のような解析方法は線要素（1次元要素）を中心に説明したが、平面応力要素や平板及びシェル要素のような面要素（2次元要素）、または立体要素のような3次元要素でも同じ概念が適用できる。

01.1.4 2次元要素の  
解析

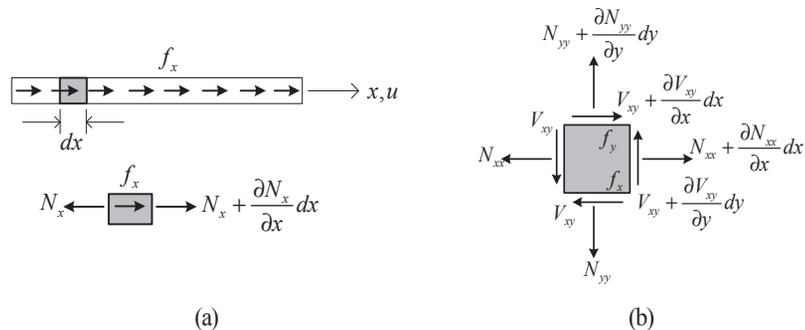
幅に比べ厚さが薄い板要素は3次元の立体を2次元の平板として仮定して数式化する。平板の中立面（ $z=0$ ）を対象に引張や圧縮、または曲げなどを考慮しながら、厚さ方向（ $z$ 方向）の変形は無視する。この場合、平板の中立面が図 1.5(a)のように  $x$ - $y$  平面上で変形する場合を面内（in-plane または、membrane）変形といい、図 1.5(b)のように中立面が面に垂直な  $z$  方向に変形（曲げ）する場合を面外（out-of-plane）変形という。このようにして3次元構造を2次元構造として見なして解析できる。

▶ 図 1.5  
面要素の挙動  
(a) 面内挙動  
(b) 面外挙動



板要素で面外挙動を除くと面内挙動のみが残り、平面応力（plane stress）要素と同じとなる。そして、平面応力要素をさらに1次元低くすると1次元のトラス要素になる。図 1.6 はトラス要素と平面応力要素の微小部分に対する力の釣り合い状態を表す。

▶ 図 1.6  
面内方向の挙動  
(a) トラスの面内方向の挙動  
(b) 平面応力要素の面内方向の挙動



トラス要素と平面要素におけるそれぞれの力の釣り合い条件式を式 1.16 と式 1.17 に示す。

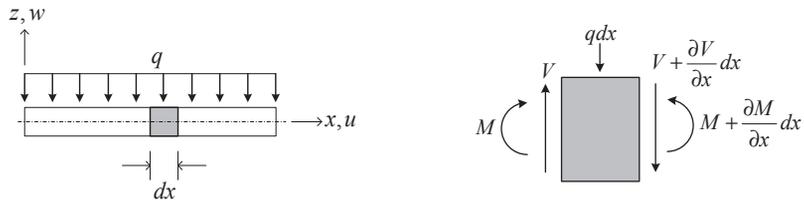
▶式 1.16 
$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + f_x = 0$$

▶式 1.17 
$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial V_{xy}}{\partial x} + f_x = 0$$
  

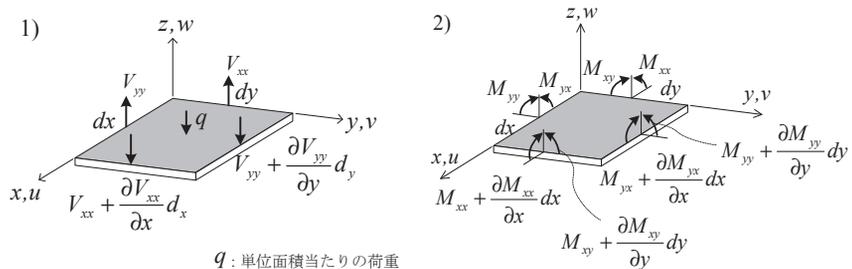
$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial V_{xy}}{\partial y} + f_y = 0$$

板要素の面外変形は梁の曲げ変形の場合と同じ方法を適用する。梁や板が外力を受けると中立軸を中心にした上下部においてそれぞれ引張と圧縮変形が発生し、各変形は中立軸からの距離に比例すると仮定できる。図 1.7 は 1 次元の梁要素と 2 次元の板要素を対象に、面外方向の力の釣り合い状態を式に表したものである。

▶図 1.7  
 面外方向の力の釣り合い状態  
 (a) 梁の面外方向の挙動



(b) 板の面外方向の挙動



梁及び板要素での力の釣り合い条件は式 1.18 と式 1.19 のように表せる。これらの式から分かるように、板要素の面外方向の力の釣り合い方程式は梁要素を 2 次元に拡張した形態である。

▶式 1.18  
梁要素での力の釣り合い条件

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = V_x$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -q$$

▶式 1.19  
板要素における面外方向での力の釣り合い条件

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = V_{xx}$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = V_{yy}$$

$$\frac{\partial V_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial V_{yy}}{\partial y} = -q$$

板要素の挙動は、面内方向は式 1.17、面外方向は式 1.19 を適用する。つまり、板要素の面内方向の挙動は 1 次元のトラス要素を 2 次元に拡張したものであり、面外方向の挙動は 1 次元の梁要素を 2 次元に拡張したものと理解できる。図 1.6 と図 1.7 は P-デルタ及び慣性力効果は反映しない状態に対する力の釣り合い条件を適用したものである。

線要素に対する支配方程式（微分方程式）である式 1.3 と比較するため、板要素の面外方向の挙動を対象に支配方程式を組むことができる。式 1.19 の第 1 式と第 2 式をそれぞれ  $x$  と  $y$  で微分して足すと、次のような式でまとめられる。

▶式 1.20  
板要素における面外方向の力の釣り合い条件

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = -q$$

式 1.3 のような荷重 - 変位の関係を誘導するためには、曲げモーメントと変形の関係（10 章の式 10.9）を式 1.20 に代入し、次のような偏微分方程式（支配方程式）を得る。

▶式 1.21

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{D}$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

ここで、 $\nu$ は材料のポアソン比で、 $t$ は板の厚さを表す。式 1.21 は、式 1.3 において  $P$  が 0 の場合と類似することが分かる。2次元要素の場合にも、図 1.3 と同じ方法で軸力及び慣性力を導入することで板要素に対しても幾何非線形解析及び P-デルタ解析または、固有値解析などに必要な数式を組むことができる。板要素は 2次元要素であるため軸力は  $x$  及び  $y$  方向、そして慣性力は  $x, y, z$  方向で表示する。例えば、軸力  $N_x$  及び  $N_y$  と面内方向の伝達力  $N_{xy}$  が作用する場合には次のような支配方程式が成り立つ。

▶式 1.22

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q + N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

従って、式 1.22 は式 1.3 を 2次元に拡張したことが確認できる。

### 01.1.5 有限要素解析

有限要素法では微分方程式の解法として変形形状を仮定し（形状関数）、適切な方法で積分する方法が用いられる。変形 ( $u, v, w$ ) に対する変形形状を仮定すると、式 1.10~1.12 のような方法で変形率が算定できる。また、求められた変形率から応力が算定でき、応力を部材の長さ方向で積分すると力と変形の関係が得られる。

式 1.3 で  $P$  と  $q$  が 0 である場合を想定し説明すると、梁に対するたわみを 4 回微分すると 0 になることから、たわみに対する形状関数として 3 次方程式を使用すると 4 回微分して 0 になる。たわみ形状に対する 3 次方程式は未知数を 4 つまで含めるため、節点 1 と節点 2 でのたわみ及びたわみ角を未知数にして形状関数が仮定できる。

▶式 1.23

$$w_1 = w(0), w_2 = w(\ell), \theta_1 = w_{,x}(0), \theta_2 = w_{,x}(\ell)$$

$x-z$  平面で曲げモーメントのみを受ける梁部材でのたわみ  $w$  に対する形状関数は次のような 3 次関数と仮定できる。

▶式 1.24

$$w = w(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3}\right)w_1 + \left(-x + \frac{2x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3}\right)w_2 + \left(\frac{x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2}\right)\theta_2$$

幾何非線形効果は除いて、曲げ変形に対する微小変形のみを仮定すると、式 1.13 から変形率が次のように表せる。

▶式 1.25

$$\epsilon_x = -zw_{,xx}$$

モーメントは応力による微小な力  $\sigma_x dx$  のモーメントを断面積に対し積分することで求められる。

▶式 1.26

$$M_x = M(x) = -\int \sigma_x z dA = Ew_{,xx} \int z^2 dA = EIw_{,xx}$$

式 1.24 を  $x$  に対し 2 回微分し式 1.26 に代入すると、部材の任意の位置でのモーメントは式 1.27 のようになる。

▶式 1.27

$$\frac{M_x}{EI} = \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12x}{\ell^3}\right)w_1 + \left(\frac{4}{\ell} - \frac{6x}{\ell^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{6}{\ell^2} - \frac{12x}{\ell^3}\right)w_2 + \left(\frac{2}{\ell} - \frac{6x}{\ell^2}\right)\theta_2$$

また、上式に仮想仕事の原理を適用すると次のような剛性行列と支配方程式が誘導される。

▶式 1.28

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{f} = \{V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2\}^T, \quad \mathbf{u} = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ & & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \text{sym} & & & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

ここで両端の鉛直移動が固定されている状態で回転変形のみを考慮する場合、次のように簡単に表せる。

▶式 1.29

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

境界条件が与えられた状態で式 1.29 による解析の結果として節点変形値 ( $\theta_1, \theta_2$ ) が求められると、形状関数により任意の位置における変形率と応力が計算できる。そして、式 1.29 は[構造編]5章の図 5.2 と一致するため、[構造編]で説明した剛性法 (stiffness method) と梁要素に対する有限要素法が同じ結果になることが確認できる。以上のような方法をトラス要素から板要素に至るまで同様に適用することで支配方程式を誘導することができる。

# 2.

## P-デルタ 解析

### TABLE OF CONTENTS

O1 概念の理解	
<hr/>	
01.1 P-デルタ解析の概念	2-1
O2 チュートリアル	
<hr/>	
02.1 モデルの概要	2-6
02.2 作業環境の設定	2-7
02.3 材料及び断面の定義	2-9
02.4 節点及び要素の生成	2-10
02.5 境界条件の入力	2-12
02.6 荷重の入力	2-13
02.7 構造解析の実行	2-15
02.8 解析結果の確認	2-17
O3 構造計算の解説	
<hr/>	
03.1 力学的概念の理解 及び数値計算	2-25
O4 練習問題	
<hr/>	
	2-28



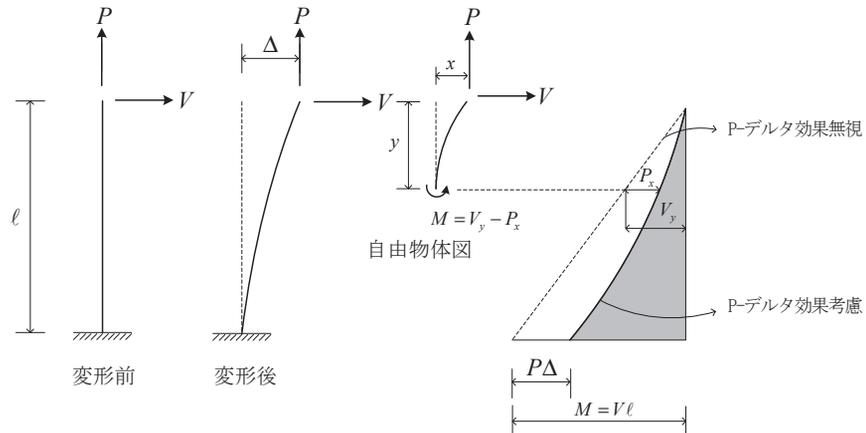
## 01.概念の理解

### 01.1 P-デルタ解析の概念

#### 02.1.1 一般事項

P-デルタ効果とは、構造物が横力と軸力を同時に受ける場合、横力により発生した横方向の変位に軸力が組み合わせられ、追加モーメントが発生することを意味する。例えば、外力により横方向のモーメントとせん断力を受ける柱部材が引張りまたは、圧縮力を同時に受ける場合が考えられる。このような場合に、P-デルタ効果により引張力は横方向の挙動に対する柱部材の剛性を増加させる反面、圧縮力は剛性を減少させる効果がある。P-デルタ解析は変形による追加効果を反映する解析であるため、2次効果解析 (second order analysis) とも呼ばれる。このような理由で、図 2.1 のように構造物に変形が発生した状態の自由物体図に対して力の釣り合い条件を適用する必要がある。しかし、P-デルタ効果を反映しない場合に対しては、変形前の形状に対し力の釣り合い条件を適用する。幾何非線形解析や座屈解析においても変形後の状態に対して力の釣り合い条件を適用する。

▶図 2.1  
P-デルタ効果を考慮した柱部材の挙動  
(a) 柱部材に引張力と横力が同時に作用する場合



▶図 2.1  
 P-デルタ効果を考慮した柱部材  
 の挙動  
 (b) 柱部材に圧縮力と横力が  
 同時に作用する場合

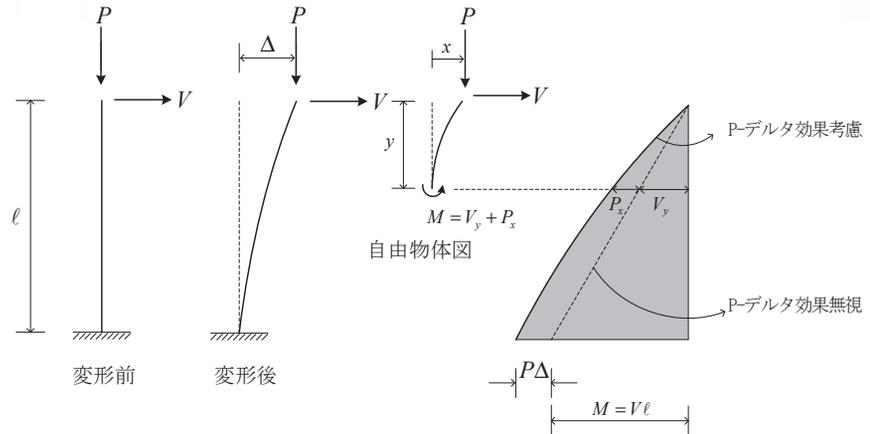
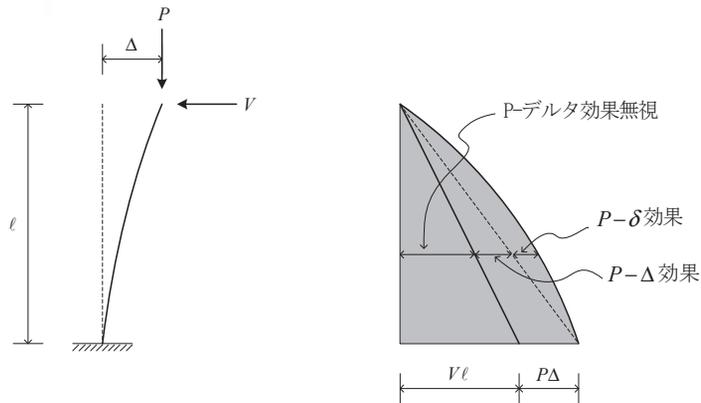


図 2.1(a)は柱部材が引張力と横力を同時に受ける場合を表している。この場合、P-デルタ効果を考慮しないとモーメントは柱部材の上端の  $M=0$  から下端の  $M=V\ell$  まで一定の割合で増加する。しかし、実際は横力による横変位  $\Delta$  が発生するため、横変位  $\Delta$  と引張力  $P$  によりモーメントは減少する。

つまり、柱部材の横方向の剛性が増加することと同じ効果が見られる。反対に、図 2.1(b)のように圧縮力と横力を同時に受ける場合には P-デルタ効果によりモーメントが増加し、その結果、柱部材の横方向の剛性が減少する効果が見られる。

P-デルタ効果は次の図のように 2 種類に分類し細分化することもある。P- $\delta$  効果は部材の軸に沿って局部的に変化する幾何形状による効果を、P- $\Delta$  効果は部材の両端の間の相対変位による効果を意味する。

▶図 2.2  
P-デルタ効果



土木の構造物で橋脚や主塔の場合、垂直荷重による軸力と横力による横変位が大きいため、P-デルタ効果が構造物の挙動に及ぼす影響が大きい。ACI318、AISC-LRFDなどの設計規準では2次効果による構造物の崩壊を防ぐためにP-Δ効果を考慮した構造解析を要求している。

この節ではP-デルタ効果を反映した解析を行うため、トラス要素と梁要素を対象に説明する。

### 02.1.2 解析の概念

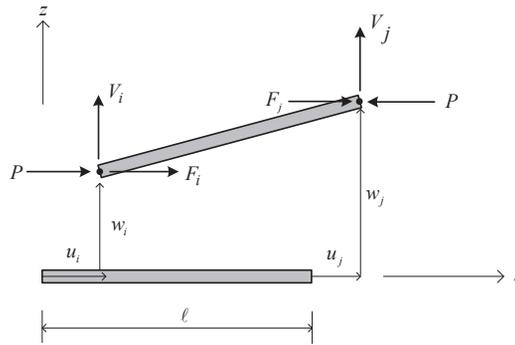
トラス要素にP-デルタ効果を反映するため、図2.1のような変形状態に対し次のような力の釣り合い条件が適用できる。

▶式 2.1

$$F_i = \frac{EA}{\ell}(u_i - u_j) = P, \quad V_i = \frac{P}{\ell}(w_i - w_j)$$

$$F_j = \frac{EA}{\ell}(-u_i + u_j) = -P, \quad V_j = \frac{P}{\ell}(-w_i + w_j)$$

▶図 2.3  
トラス要素におけるP-Δ効果



式 2.1 を行列式に表すと次のようになる。

▶式 2.2

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{f} = [F_i \quad V_i \quad F_j \quad V_j]^T, \quad \mathbf{v} = [u_i \quad w_i \quad u_j \quad w_j]^T$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_\sigma$$

$$\mathbf{k}_0 = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_\sigma = \frac{P}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、 $\mathbf{k}_0$  は線形剛性を意味し、 $\mathbf{k}_\sigma$  は P-デルタ効果を反映する幾何剛性を意味する。そして、軸力  $P$  は圧縮力の場合には負(-)の符号を持つ。01.1.3 での変形率に関する式 1.15 に仮想仕事の原理などを適用すると式 2.2 と同じ式が誘導できる。

梁要素に対する P-デルタ解析の概念はトラス要素と同様で、要素の曲げ変形が追加として考慮される点だけ異なる。 $x-z$  平面上の 2 次元の梁要素に対する P-デルタ解析を説明するため、荷重  $q$  が 0 の場合を想定しよう。これが 1 章 01.1.5 での有限要素解析と異なる点は式 2.3 のように荷重  $P$  による効果が追加される点である。

▶式 2.3

$$EIw'''' + Pw'' = q$$

梁要素に対する P-デルタ解析で曲げ変形による式を誘導するためには、1 章の式 1.10 の変形率を使用し式 2.4 のような支配方程式を組む。支配方程式は仮想仕事の原理などを用いて求められる。

▶式 2.4

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{f} = [V_i \quad M_i \quad V_j \quad M_j]^T, \quad \mathbf{u} = [w_i \quad \theta_i \quad w_j \quad \theta_j]^T$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_\sigma$$

$$\mathbf{k}_0 = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ & & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ sym & & & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_\sigma = \frac{P}{30} \begin{bmatrix} \frac{36}{\ell} & 3 & -\frac{36}{\ell} & 3 \\ & 4\ell & -3 & -\ell \\ & & \frac{36}{\ell} & -3 \\ sym & & & 4\ell \end{bmatrix}$$

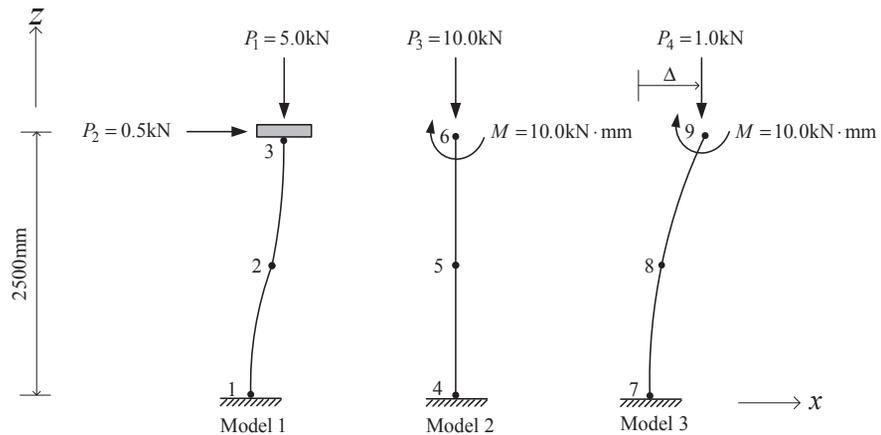
式 2.4 が式 1.28 と異なる点は、幾何剛性行列  $\mathbf{k}_\sigma$  が追加された点である。なお、式 2.4 は P-デルタ解析とともに座屈解析にも適用できる。(4 章の座屈解析を参照)

## 02.チュートリアル

## 02.1 モデルの概要

下図のように両端の支持条件と載荷される荷重がそれぞれ異なる柱に対し P-デルタ解析を行い、一般の静的解析及び幾何非線形解析の結果と比較する。

▶図 2.4  
 解析モデル



➤ **材料**

弾性係数 :  $2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

➤ **断面**

断面寸法 : 角パイプ  $50 \times 50 \times 5 \text{ mm}$

断面積 (Area) :  $900 \text{ mm}^2$

断面 2 次モーメント ( $I_{yy}$ ) :  $300,000 \text{ mm}^4$

➤ **荷重**

1. モデル 1 : 軸力及び横力が作用、上端には移動変位のみ許容され回転変位は拘束。
2. モデル 2 : 軸力及び端部に曲げモーメントが作用、上端の移動変位拘束。
3. モデル 3 : 上端に曲げモーメント及び軸力が作用。

## 02.2 作業環境の設定

### 02.2.1 単位系の設定

新しいプロジェクトを開き、ファイルを保存する。

メインメニュー  >  **新規プロジェクト...**

メインメニュー  >  **保存**

1. ファイル名：“Pデルタ”と入力し[保存]をクリック

使用する単位系を設定する。

メインメニュー [ツール] > [セッティング] > **[単位系]**

2. 長さ「mm」、力「N(kg)」を選択

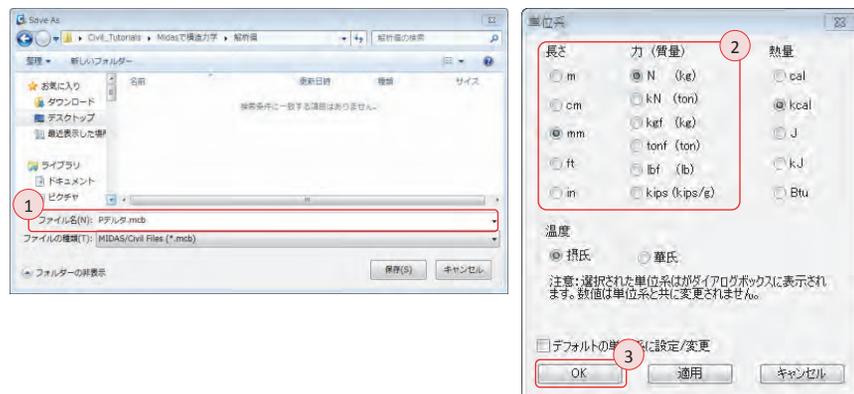
3. [OK]をクリック

▶ 図 2.5  
ファイルの保存  
単位系の設定



Tip

単位系の設定は画面下の  
ステータスバーでも簡単に操作  
できる。



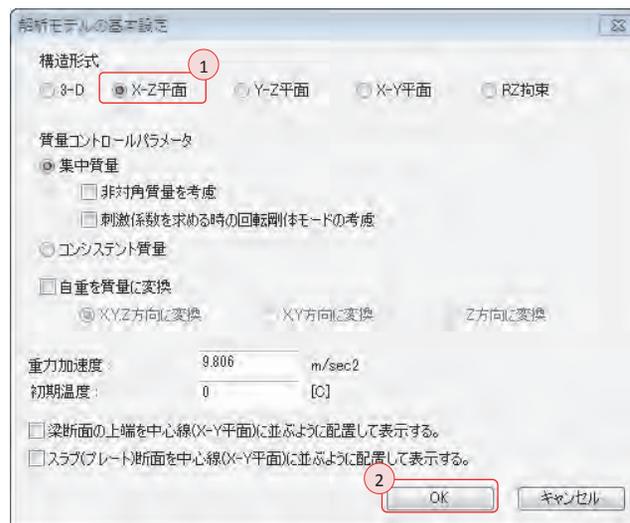
### 02.2.2 作業平面の 設定

本チュートリアルでは全体座標系(Global Coordinate System, GCS)を基準に X-Z 平面の挙動のみ許容するため、構造形式を 2D 挙動の構造物(X-Z 平面)と指定する。

メインメニュー [ウィザード] > [基本設定] > **[基本設定]**

1. 構造形式 > 「**X-Z 平面**」を選択
2. **[OK]**をクリック

▶ 図 2.6  
作業平面の設定



## 02.3 材料及び断面の定義

### 02.3.1 材質の定義

モデルに使用する材料及び断面は解析の便宜上、ユーザーが直接数値を入力する「ユーザー定義」及び「値入力」機能を利用する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > [材料特性]

1. [追加...]クリック、名称：“Mat” 入力
2. 弾性データ > タイプ > 「ユーザー定義」選択
3. ユーザー定義 > 弾性係数：“2.0e5” 入力、[OK]クリック
4. 断面タブをクリック、[追加]クリック、値入力タブをクリック
5. 断面形状>「ボックス断面」選択、名称：“Sec” 入力
6. “H：50, B：50, tw：5, tf1：5, Area：900, I<sub>yy</sub>：300,000” 入力
7. [OK]クリック、[閉じる]クリック

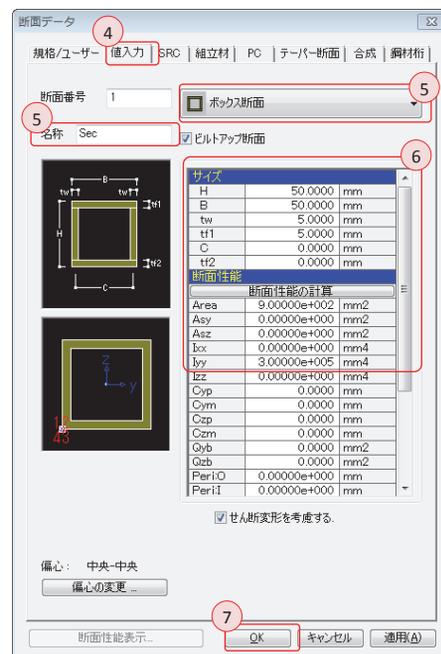
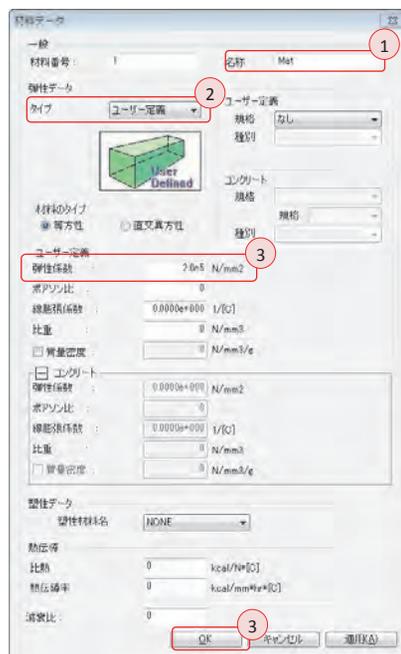
▶ 図 2.7  
材料の定義  
断面の定義



任意の材料を使用する場合、タイプを「ユーザー定義」にすると、物性値を直接入力できる。



[OK]ボタンをクリックすると、材料データのウィンドウが閉じるため、複数の材料を定義する場合は[適用]ボタンをクリックし、続けてデータを入力した後、最後に[OK]ボタンをクリックする。



## 02.4 節点及び要素の生成

### 02.4.1 要素の生成

入力の単位系を変更し、節点及び要素を生成する。

1. ステータスバーで力の単位：「kN」に変更
2. 節点番号、自動フィット、正面（トグルオン）

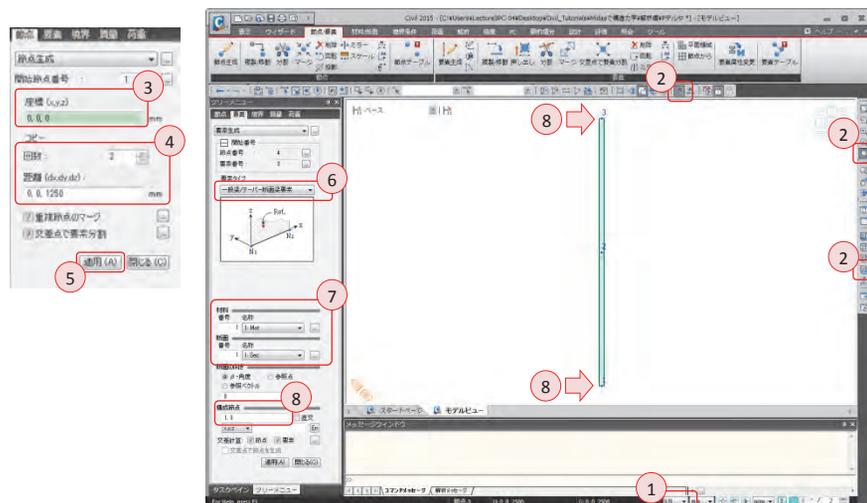
メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [節点生成]

3. 座標 (x, y, z) : “0, 0, 0” 入力
4. コピーの回数 : “2” 入力、距離(dx, dy, dz) : “0, 0, 1250” 入力
5. [適用]をクリック

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [要素生成]

6. 要素タイプ > 「一般梁/テーパ断面梁要素」を選択
7. 材料 > 「1:Mat」を選択、断面 > 「1:Sec」を選択
8. 構成節点の入力ボックス内をクリックし、節点1と節点3を順番にクリック

▶ 図 2.8  
柱の生成



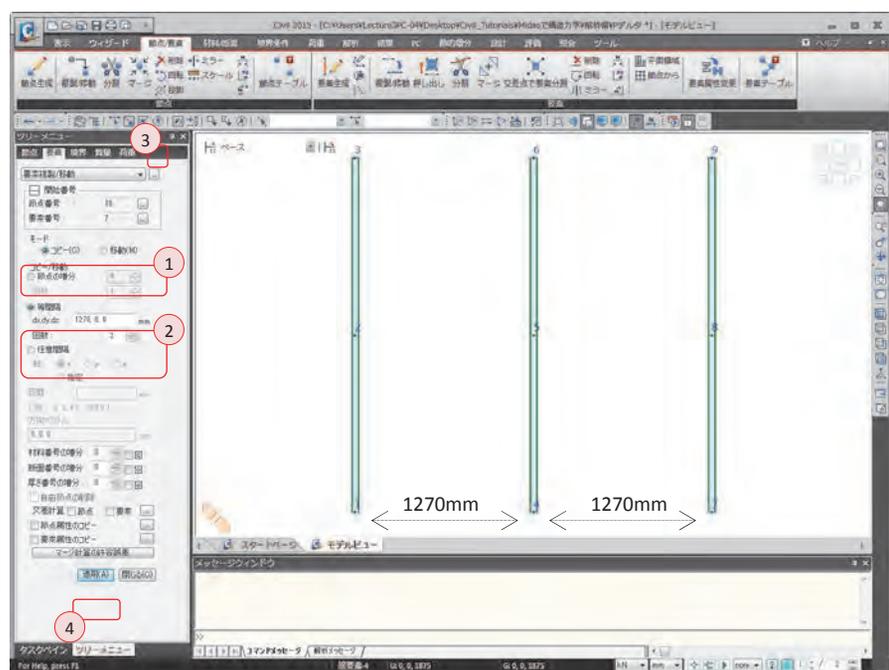
02.4.2 要素の複製

移動/複製機能で生成した柱を複製する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [複製/移動]

1. モード > 「コピー」選択
2. コピー/移動 > 「等間隔」選択  
dx, dy, dz : “1270, 0, 0” 入力  
回数 : “2” 入力
3.  全て選択 (トグルオン)
4. [適用]クリック

▶ 図 2.9  
柱の複製



## 02.5 境界条件の入力

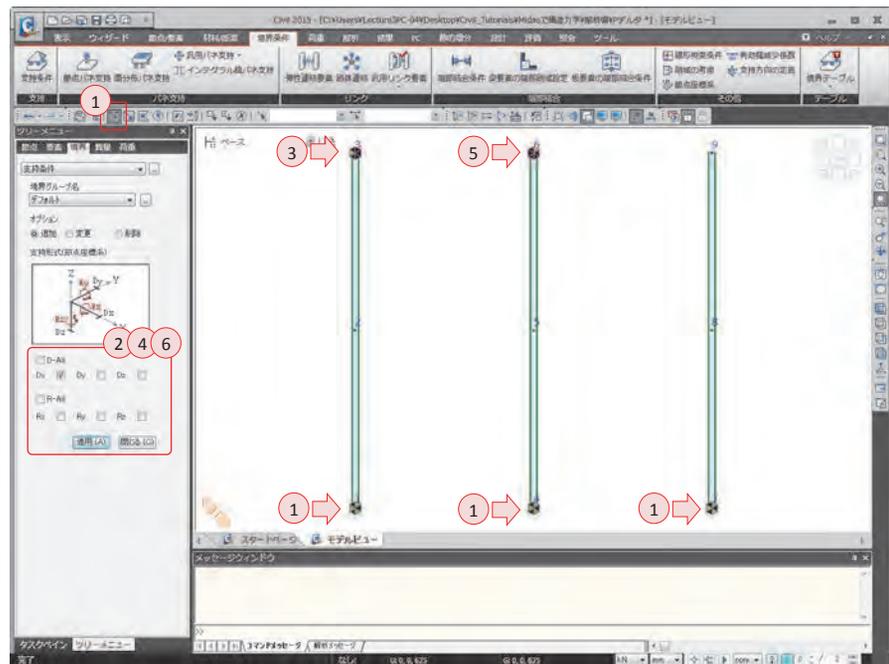
### 02.5.1 境界条件の 定義

構造物の両端に支持条件を入力する。

メインメニュー [境界条件] > [支持] > **[支持条件]**

1. **単一選択**で節点 1、節点 4、節点 7 を選択
2. 支持形式 > **Dx, Dz, Ry** (チェックオン)、**[適用]** クリック
3. **単一選択**で節点 3 を選択
4. 支持形式 > **Dx, Dz** (チェックオフ)、**Ry** (チェックオン)、**[適用]** クリック
5. **単一選択**で節点 6 を選択
6. 支持形式 > **Dx** (チェックオン)、**Ry** (チェックオフ)、**[適用]** クリック

▶ 図 2.10  
支持条件



## 02.6 荷重の入力

### 02.6.1 荷重条件の定義

節点荷重と曲げモーメントの入力のため荷重条件を定義する。

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重ケースの生成] > **[静的荷重ケース]**

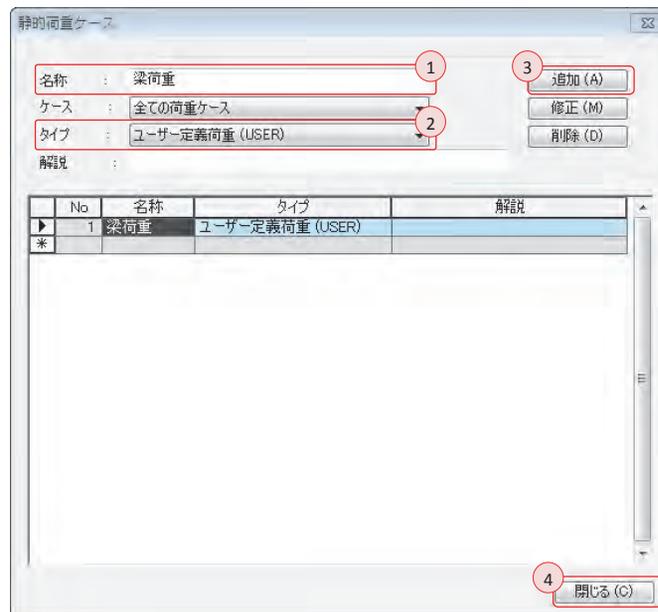
1. 名称 : “**梁荷重**” 入力
2. タイプ : 「**ユーザー定義荷重 (USER)**」 選択
3. **[追加]** をクリック
4. **[閉じる]** をクリック

▶ 図 2.11  
荷重条件の定義



Tip

実務では「タイプ」で死荷重または活荷重など、実際入力する荷重条件を区分し定義する。解析後の設計段階では、ここで入力した荷重条件別に異なる係数が適用された荷重組合せの部材力で設計しなければならないためである。



02.6.2 荷重の入力

それぞれのモデルに荷重を入力する。

メインメニュー [表示] > [ディスプレイ] > [ディスプレイ]

1. 荷重タブ > 荷重ケース > **荷重値** (チェックオン)

クリック、桁数: “4” 入力、[OK] クリック

2. 荷重タブ > **節点荷重** (チェックオン)、[OK] クリック

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重タイプ/質量] > [節点荷重]

3. **単一選択**で**節点3**を選択

4. 節点荷重 > FX: “0.5”、FZ: “-5” 入力、[適用] クリック

5. **単一選択**で**節点6**を選択

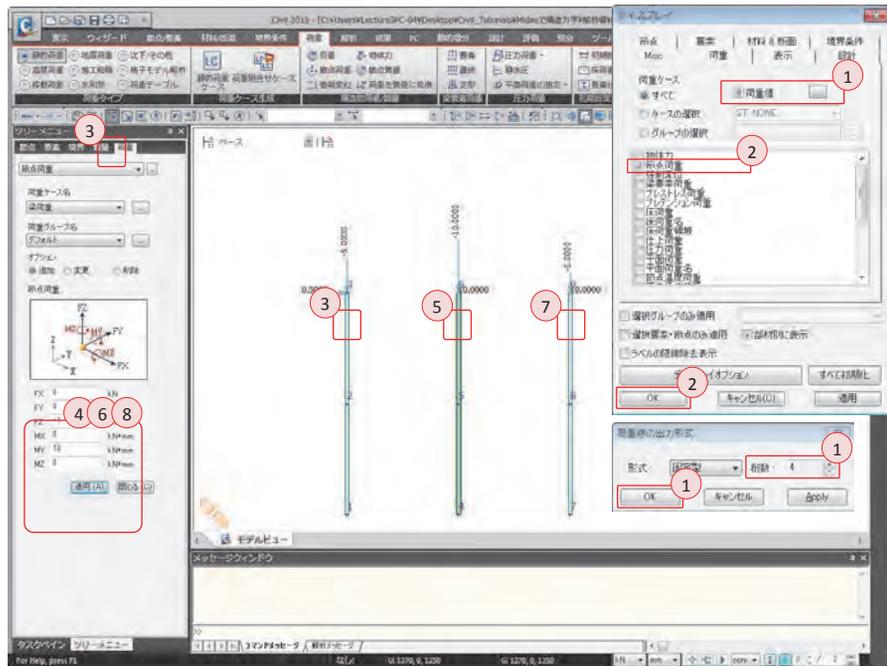
6. 節点荷重 > FX: “0”、FZ: “-10”、MY: “10” 入力、[適用] クリック

7. **単一選択**で**節点9**を選択

8. 節点荷重 > FZ: “-1”、MY: “10” 入力、[適用] クリック

▶ 図 2.12  
節点荷重の入力

**Tip**  
マウスのホイールを一回押して  
からスクロールするとズームイン・  
アウトができる。再びホイールを  
押すと画面のズームイン・アウト  
が終了する。



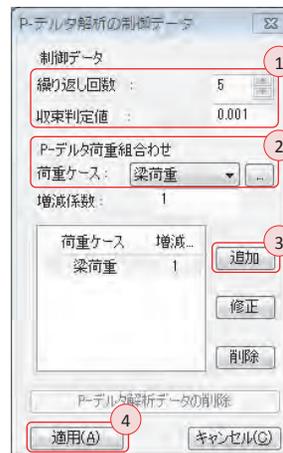
## 02.7 構造解析の実行

**02.7.1 P-デルタ解析条件の入力** P-デルタ解析を実行するため、まず解析条件を設定する。一般の静的解析は P-デルタ解析条件を入力せずに解析を実行すればよく、ここでは省略する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > *[P-デルタ解析]*

1. 制御データ > 繰り返し回数 : “5” 入力  
収束判定値 : “0.001” 入力
2. P-デルタ荷重組合せ > 荷重ケース > 「**梁荷重**」 選択  
> 増減係数 : “1” 入力
3. [追加] クリック
4. [適用] クリック

▶ 図 2.13  
P-デルタ解析制御



### 02.7.2 構造解析の 実行

モデルの生成、境界および荷重条件の入力が終わったら、解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

メインメニュー [表示] > [ディスプレイ] > **[ディスプレイ]**

2. 荷重タブ > 荷重ケース > **荷重値** (チェックオフ)、

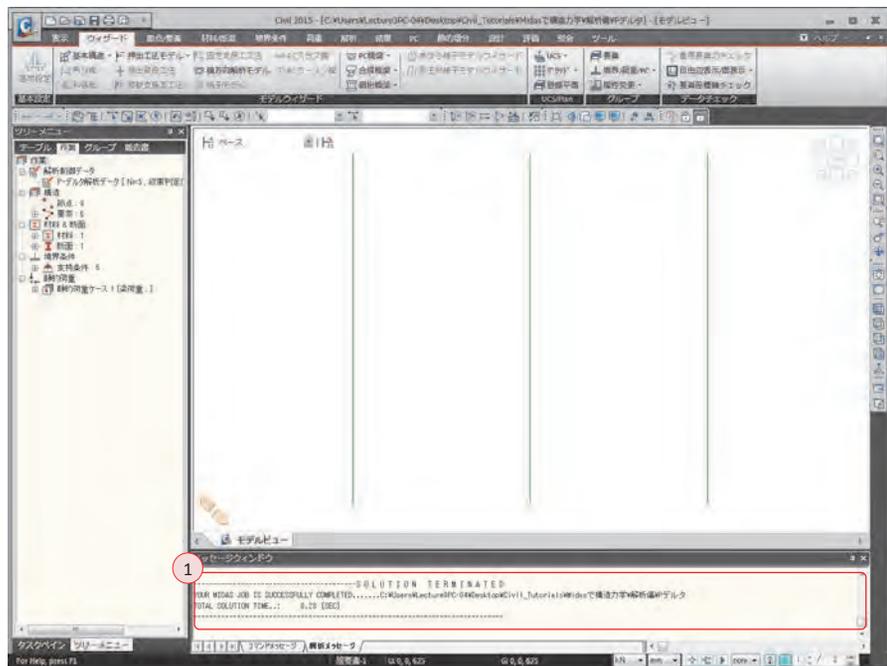
3. **節点荷重** (チェックオフ)、**[OK]** クリック

4. **隠線除去表示**、**節点番号** (トグルオフ)

▶ 図 2.14  
解析の正常終了のメッセージ



短縮キーの F5 でも解析は  
実行できる。



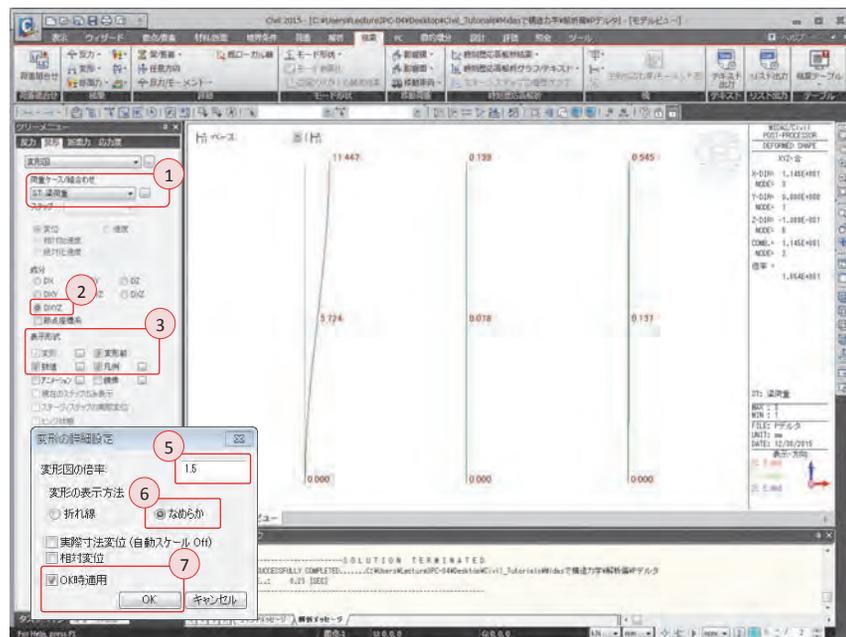
## 02.8 解析結果の確認

### 02.8.1 変位及び変形 荷重条件1 (梁荷重) による変形図を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変形図]

1. 荷重ケース/組合せ> 「ST:梁荷重」 選択
2. 成分 > 「DXYZ」 選択
3. 表示形式 > 変形前、数値、凡例 (チェックオン)
4. 変形の  クリック
5. 変形図の倍率 : “1.5” 入力
6. 変形の表示方式> 「なめらか」 選択
7. OK時適用 (チェックオン)、[OK] クリック

▶ 図 2.15  
変位及び変形の結果



結果テーブルでP-デルタ解析により発生した変位を確認する。

メインメニュー [結果] > [テーブル] > [結果テーブル▼] > [変位]

1. 荷重ケース/組合わせの選択 > 「梁荷重 (ST)」 選択
2. [OK] クリック

▶ 図 2.16

(a) テーブル出力の設定



(b) 変位の結果テーブル

	節点	荷重	DX (mm)	DY (mm)	DZ (mm)	RX (rad)	RY (rad)	RZ (rad)
▶	1	梁荷重	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	2	梁荷重	5.723529	0.000000	-0.034722	0.000000	0.006883	0.000000
	3	梁荷重	11.447058	0.000000	-0.069444	0.000000	0.000000	0.000000
	4	梁荷重	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	5	梁荷重	-0.034489	0.000000	-0.069444	0.000000	-0.000027	0.000000
	6	梁荷重	0.000000	0.000000	-0.138889	0.000000	0.000108	0.000000
	7	梁荷重	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	8	梁荷重	0.137000	0.000000	-0.006944	0.000000	0.000219	0.000000
	9	梁荷重	0.544438	0.000000	-0.013889	0.000000	0.000432	0.000000

02.8.2 部材力 荷重条件 1 (梁荷重) による柱の軸力を確認する。入力された荷重と同じ大きさの軸力が発生することが分かる。

1. モデルビューをクリック

メインメニュー [結果] > [結果] > [断面力▼] > [梁要素の断面力図]

2. 荷重ケース/組み合わせ > 「ST:梁荷重」選択

3. 成分 > 「FX」選択

4. デisplayオプション > 「詳細」選択、倍率: “2” 入力

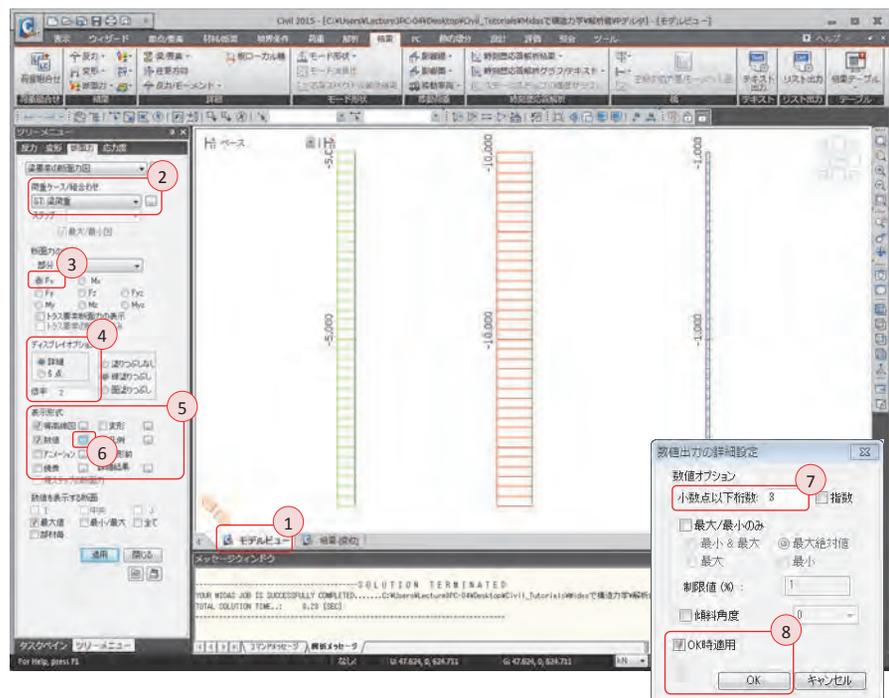
5. 表示形式 > 等高線図、数値 (チェックオン)

6. 数値の□をクリック

7. 小数点以下桁数: “3” 入力

8. OK時適用 (チェックオン)、[OK]クリック

▶ 図 2.17  
軸力の結果



### 02.8.3 幾何非線形 解析の比較

P-デルタ解析を実行したファイルを新しいファイル名“GNL.mcb”で保存する。

メインメニュー  /名前を付けて保存

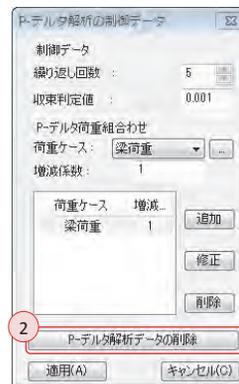
1. ファイル名：“GNL”と入力し、[保存]をクリック

幾何非線形解析を実行するため、入力されているP-デルタ解析条件を削除する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > [P-デルタ解析]

2. [P-デルタ解析データの削除]をクリック

▶ 図 2.18  
P-デルタ解析条件の削除



幾何非線形解析を実行するためのデータを入力する。

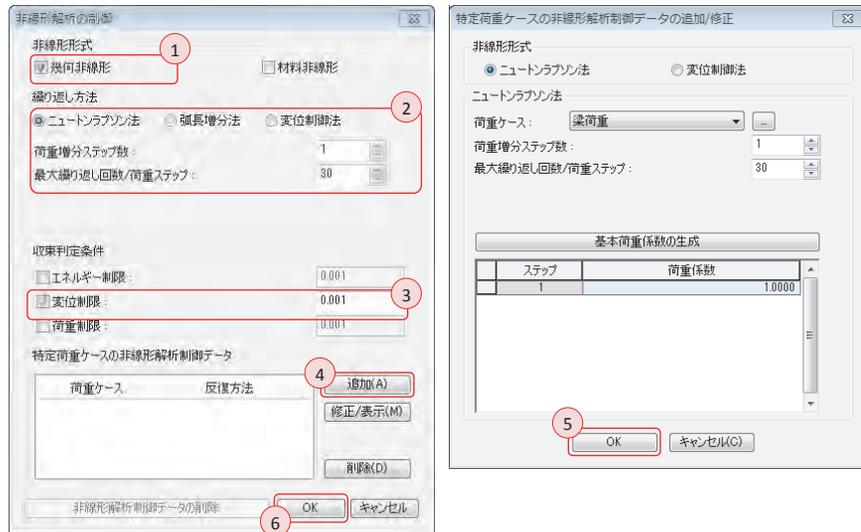
メインメニュー [解析] > [解析制御] > **[非線形]**

1. 非線形形式 > 「**幾何非線形**」 選択
2. 繰り返し方法 > 「**ニュートンラプソン法**」 選択  
荷重増分ステップ数 : “1” 入力  
最大繰り返し回数/荷重ステップ : “30” 入力
3. 収束判定条件 > 「**変位制限**」 選択 > “0.001” 入力
4. **[追加]** クリック
5. 特定荷重ケースの非線形解析制御データの追加/修正のウィンドウ > **[OK]**
6. 非線形解析の制御のウィンドウ > **[OK]**

▶ 図 2.19

(a) 非線形解析の制御

(b) 非線形解析の荷重ケース

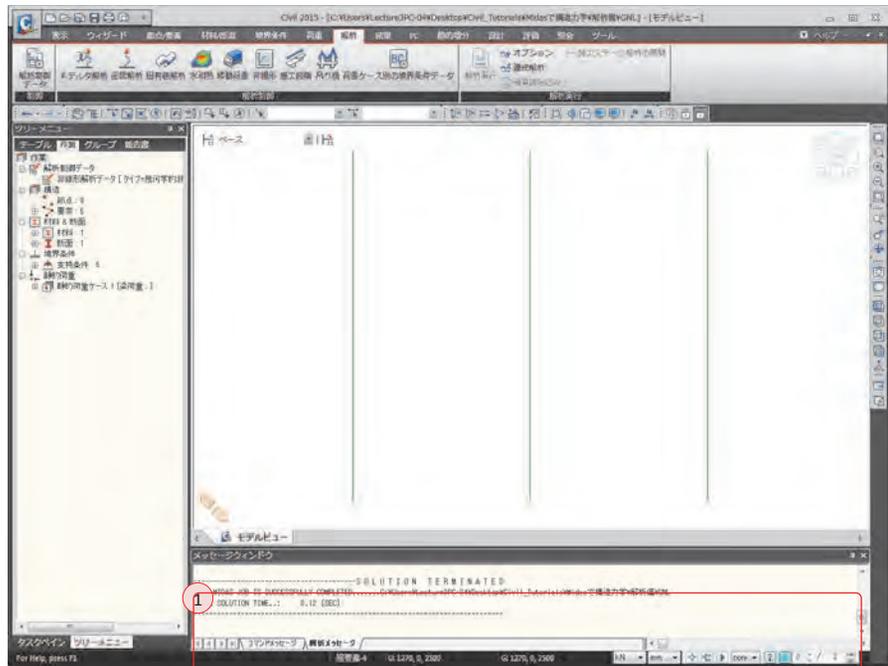


幾何非線形解析を実行し、P-デルタ解析の結果と比較する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

▶ 図 2.20  
幾何非線形解析の正常終了の  
メッセージ



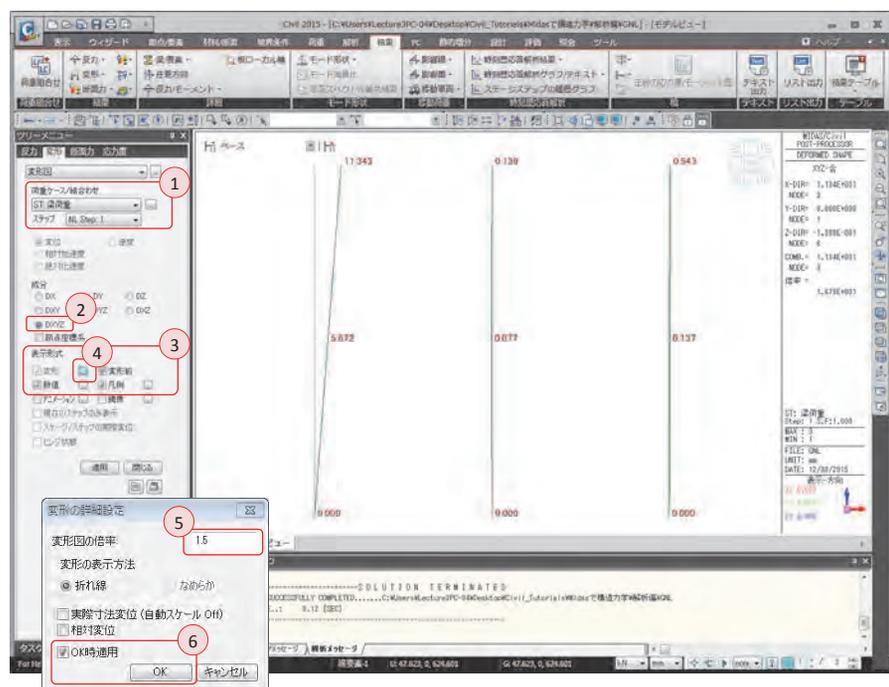
02.8.4 幾何非線形解析による変位及び変形

荷重条件 1 (梁荷重) による変形図を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変形図]

1. 荷重ケース/組合せ> 「ST:梁荷重」選択
2. 成分 > 「DXYZ」選択
3. 表示形式 > 変形前、数値、凡例 (チェックオン)
4. 変形の  クリック
5. 変形図の倍率: “1.5” 入力
6. OK 時適用 (チェックオン)、[OK] クリック

▶ 図 2.21  
変位及び変形の結果

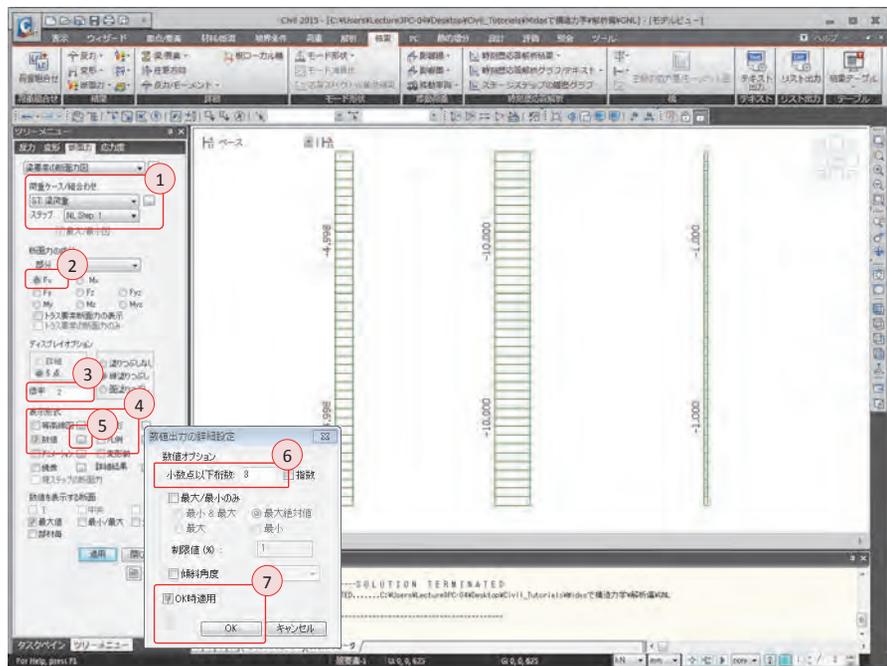


02.8.5 幾何非線形解析による部材力  
荷重条件1 (梁荷重) による柱の軸力を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [断面力▼] > [梁要素の断面力図]

1. 荷重ケース/組み合わせ > 「ST:梁荷重」選択、ステップ > 「NL Step:1」選択
2. 成分 > 「FX」選択
3. ディスプレイオプション > 倍率: “2” 入力
4. 表示形式 > 数値 (チェックオン)
5. 数値の  クリック
6. 小数点以下桁数: “3” 入力
7. OK 時適用 (チェックオン)、[OK] クリック

▶ 図 2.22  
軸力の結果



P-デルタ解析の結果 (図 2.17) と比べると、モデル 1 の軸力が 0.002kN 減少していることが確認できる。これは横力により発生した構造物の変形が解析に反映され、横力が柱に引張力を誘発したからである。

# 03. 構造計算の解説

## 03.1 力学的概念の理解及び数値計算

P-デルタ効果を考慮した解析を数値計算で行うことは簡単ではない。従って、ここでは概念を理解するために図 2.23 のように（擬似 P-デルタ解析）考える。最初の段階として、P-デルタ効果がない解析を行い、部材力と変形値を算定する。その後、軸力と横変位との積である追加モーメント、すなわち、P-デルタモーメントが算定できるため、静的解析の部材力に P-デルタモーメントを加えると P-デルタ解析によるモーメントに近い値が得られる。

▶ 図 2.23  
擬似 P-デルタ解析

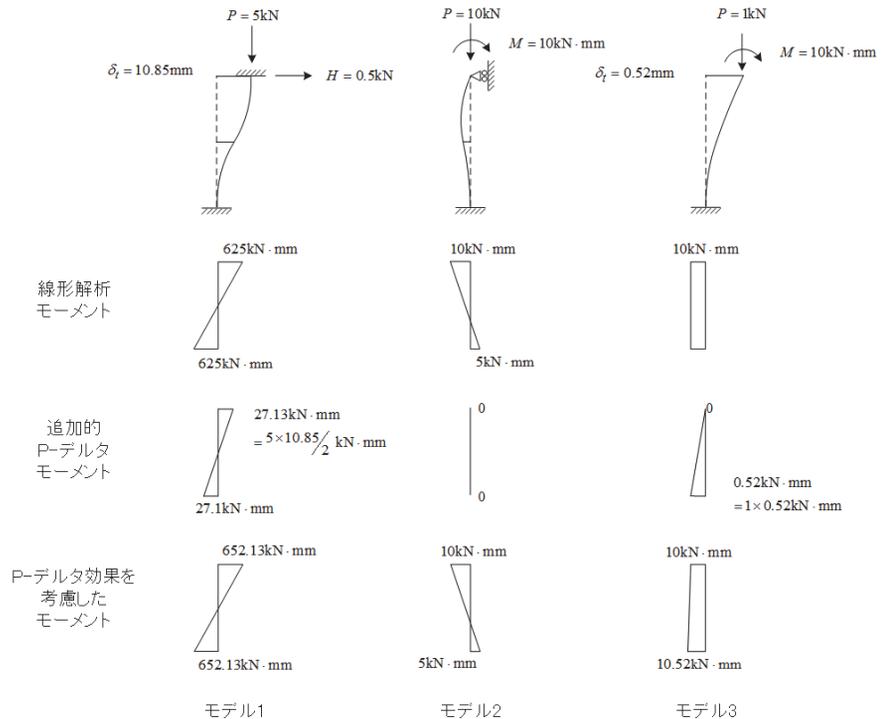


表 2.1 は静的解析、擬似 P-デルタ解析、Civil による P-デルタ解析、そして Civil による幾何非線形解析の結果をまとめたものである。Civil の幾何非線形解析に関しては 3 章で詳しく説明する。

▶表 2.1  
数値計算の結果の比較表

モデル	値	静的解析	P-デルタ			幾何非線形
			擬似	数値計算	Civil	Civil
Model 1	$M_{top}$ (kN-mm)	625	652.13	653.62	653.62	653.35
	$M_{bot}$ (kN-mm)	625	652.13	653.62	653.62	653.35
	$\delta_{top}$ (mm)	10.85	-	11.45	11.45	11.34
	部材軸力 (kN)	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0
Model 2	$M_{top}$ (kN-mm)	10	10	10.0	10.0	10.0
	$M_{bot}$ (kN-mm)	5	5	5.27	5.28	5.25
	$\delta_{top}$ (mm)	0.14	-	0.14	0.14	0.14
	部材軸力 (kN)	10	10	10.0	10.0	10.0
Model 3	$M_{top}$ (kN-mm)	10	10	10.0	10.0	10.0
	$M_{bot}$ (kN-mm)	10	10.52	10.54	10.55	10.54
	$\delta_{top}$ (mm)	0.52	-	0.54	0.55	0.54
	部材軸力 (kN)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

幾何非線形解析は、P-デルタ解析と類似するが、構造物の形状変化の解析への反映の有無で区分される。上の表で、数値計算の結果は式 2.4 を用い次のような方法により計算されたものである。

モデル 1 では上端の横変位  $w_1$  を除いた全ての自由度が拘束されているため、横変位  $w_1$  の値は次のような方法で計算できる。

### 03.1.1 モデル 1 の 計算

$$\left( \frac{12EI}{\ell^3} + \frac{P}{30\ell} \right) w_1 = H_1 \quad \text{ここで、} P = -5\text{kN}, H_1 = 0.5\text{kN}$$

$$w_1 = \frac{500}{46.080 - 2.4} = 11.447\text{mm}$$

03.1.2 モデル 2 の  
計算

モデル 2 では上端の回転変形  $\theta_1$  を除いた全ての自由度が拘束されているため、回転変形  $\theta_1$  の値は次のような方法で計算できる。

$$\left( \frac{4EI}{\ell} + \frac{P}{30} 4\ell \right) \theta_1 = M_1 \quad \text{ここで、} P = -10\text{kN}, M_1 = 10\text{kN}\cdot\text{mm}$$

$$\theta_1 = \frac{10,000}{9.6 \times 10^7 - 3.333 \times 10^6} = 1.079 \times 10^{-4} \text{ mm} \approx 0.0 \text{ mm}$$

03.1.3 モデル 3 の  
計算

モデル 3 では上端の横変位  $w_1$  と回転変形  $\theta_1$  を除いた全ての自由度が拘束されているため、横変位  $w_1$  と回転変形  $\theta_1$  の値は次のような方法で計算できる。

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} + \frac{P}{30} \frac{36}{\ell} & \frac{6EI}{\ell^2} + \frac{3P}{30} \\ \frac{6EI}{\ell^2} + \frac{3P}{30} & \frac{4EI}{\ell} + \frac{P}{30} 4\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad \text{ここで、} P = -1\text{kN}, M_1 = 10\text{kN}\cdot\text{mm}$$

$$w_1 = 0.544\text{mm}, \quad \theta_1 = 4.318 \times 10^{-4}$$

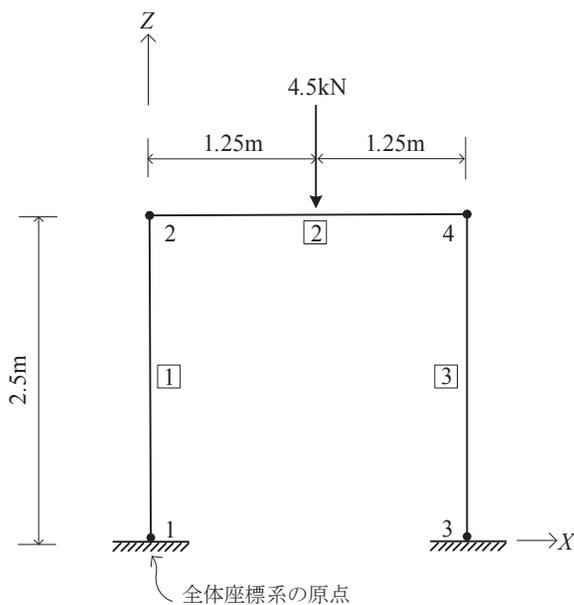
部材力は算定された変位と剛性行列との積で求められる。

**References**

Livesley, R. K., and Chandler, D. B., “*Stability Functions for Structural Frameworks*”, Manchester University Press, UK, 1956.

## 04.練習問題

下図のような X-Z 平面上にある 2 次元の骨組みに対し P-デルタ解析を行い、静的解析の結果と比較しなさい。



- **材料**  
弾性係数 :  $2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$
- **断面**  
断面積 (Area) :  $650 \text{ mm}^2$   
断面 2 次モーメント ( $I_y$ ) :  $3.5 \times 10^4 \text{ mm}^4$
- **荷重**  
(-)Z 方向に集中荷重 4.5kN 載荷

# 3.

# 幾何非線形 解析

## TABLE OF CONTENTS

### 01 概念の理解

---

01.1 幾何非線形解析の概念 3-1

### 02 チュートリアル

---

02.1 モデルの概要 3-6

02.2 作業環境の設定 3-7

02.3 材料及び断面の定義 3-9

02.4 節点及び要素の生成 3-10

02.5 境界条件の入力 3-13

02.6 荷重の入力 3-14

02.7 構造解析の実行 3-16

02.8 解析結果の確認 3-18

### 03 構造計算の解説

---

03.1 力学的概念の理解  
及び数値計算 3-27

04 練習問題 3-29

---



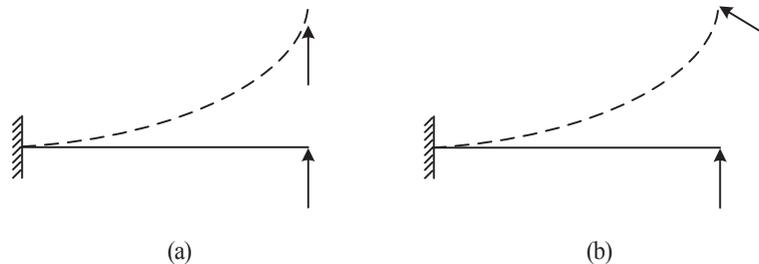
## 01.概念の理解

### 01.1 幾何非線形解析の概念

#### 01.1.1 一般事項

構造物に比較的に大きい変形が発生する場合には構造物の幾何学的な形状の変化により変位-変形図の関係が線形ではなく、非線形になることがある。このような場合には微小変形の解析では無視していた変位-変形図の関係における高次項を含む解析が適用でき、これを幾何非線形解析と呼ぶ。幾何非線形は材料と関係なく、構造物の形状により発生する。荷重による変位が大きく発生して構造物の座標が大きく変化したり、追加モーメントのような付加荷重が発生したりする場合には幾何非線形効果を考慮しなければならない。幾何非線形解析では構造物の形状変化により荷重の方向が変化しないと仮定する方法と、荷重の方向が構造物の形状変化に沿って変化すると仮定する方法があるが、ここでは、図 3.1(a)のように荷重の方向が変化しないことを仮定して説明する。

▶図 3.1  
構造物の形状変化及び荷重の  
方向  
(a) 荷重の方向-固定  
(b) 荷重の方向-回転

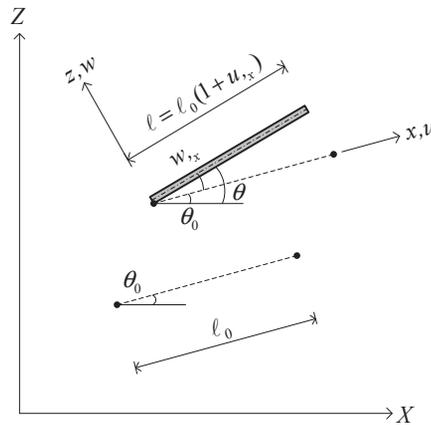


幾何非線形解析と P-デルタ解析および座屈解析は、変形後の形状に対して力の釣り合い条件を適用する点では同種の解析法である。しかし 1 章の式 1.13~式 1.15 で説明したように、軸方向の長さの変化とともに部材が回転する効果を追加で考慮するか否かの違いがある。また、P-デルタ解析と座屈解析の違いは解析の結果により得られる値の種類にある。P-デルタ解析は荷重による変位を求める解析法であり、座屈解析は 2 次効果により構造物が限界状態に到達する臨界荷重を求める解析法である。

幾何非線形解析、P-デルタ解析、そして座屈解析の違いはトラス要素に対する支配方程式を使用することで説明できる。

図 3.2 は傾斜トラスが力を受け変形した状態を表している。全体座標系（ $X$ - $Z$  座標系）に対し、 $\theta_0$  だけ傾いた長さ  $l_0$  のトラスの部材が力を受け変形した状態である。トラス部材は力を受け要素座標系（ $x$ - $z$  座標系）の方向に  $u$  と  $w$  の変形が発生している。

▶図 3.2  
 トラス要素の変形状態



全体座標系の  $X$  軸に対する要素座標系の  $x$  軸がなす角度が  $\theta_0$  であるトラス要素に対する支配方程式を全体座標系を使用し表すと次のようになる。

▶式 3.1

$$\begin{aligned}
 \mathbf{KU} &= \mathbf{P} \\
 \mathbf{U} &= \{\bar{u}_i \quad \bar{w}_i \quad \bar{u}_j \quad \bar{w}_j\}^T \\
 \mathbf{P} &= \{\bar{F}_i \quad \bar{V}_i \quad \bar{F}_j \quad \bar{V}_j\}^T
 \end{aligned}$$

全体座標系の値は上線の文字にして区分した。従って、P-デルタ解析のための2章の式 2.2 の要素座標系の剛性行列を全体座標系に対する剛性行列に表すと式 3.2 のようになる。

▶式 3.2

$$K = T k T^T = T(k_o + k_\sigma) T^T$$

$$T = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad \text{ここで、} \quad c = \cos \theta_o, \quad s = \sin \theta_o$$

式 3.2 に座標変換行列を乗した結果が次の式である。

▶式 3.3

$$T k_o T^T = \frac{EA}{\ell_o} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}, \quad T k_\sigma T^T = \frac{N}{\ell_o} \begin{bmatrix} s^2 & -sc & s^2 & sc \\ -sc & c^2 & sc & -c^2 \\ s^2 & sc & s^2 & -sc \\ sc & -c^2 & -sc & c^2 \end{bmatrix}$$

式 3.2 と式 3.3 では部材の長さ  $\ell_o$  と全体座標系がなす角度  $\theta_o$  が変化しないことが分かる。以上のように、部材の長さや傾斜角度が変化しないと仮定する解析法が通常の P-デルタ解析や座屈解析である。しかし、幾何非線形解析では部材の長さや傾斜角度が次のように変化する。

▶式 3.4

$$\ell = \ell_o (1 + u_{,x}), \quad \theta = \theta_o + w_{,x}$$

変化した値で式 3.2 と式 3.3 の値を解析のプロセスの中に持続的に更新していく反復計算により結果が求められる。

### 01.1.2 解析の概念

幾何非線形解析の概念は複雑な数式からなっているため、簡単なトラス部材で説明する。次の図はトラス部材が力を受けて変形しながら移動する状態を表している。部材の長さとともに幾何学的形状も変化するため、力の釣り合い条件（荷重  $P$  と部材の軸力  $N$  の関係）も次のように変形後の状態を適用する。

▶図 3.3  
非線形トラス構造

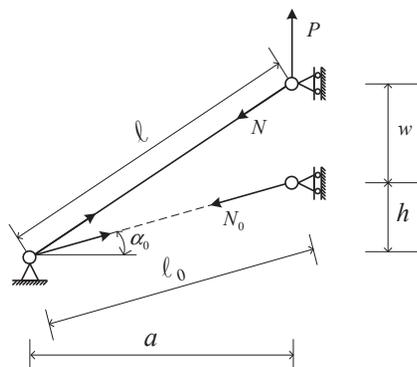


図 3.1 の構造物に対する変形前と後の力の釣り合い条件は次の通りである。

▶式 3.5                      変形前：  $N_0 \frac{h}{\ell_0} - P = 0$

▶式 3.6                      変形後：  $N \frac{w+h}{\ell} - P = 0$

幾何非線形解析では線形解析で仮定した公称ひずみ (engineering strain) の代わりに高次項の変形が発生することを考慮するためのラグランジュひずみ (Green-Lagrange strain) が適用される。

▶式 3.7                      
$$\epsilon_G = \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{2\ell_0^2}$$

以上のような変形の定義を適用しながら材料は線形的に挙動することと仮定すると、部材の軸力は次のようにして求められる。

▶式 3.8                      
$$N - N_0 = EA\epsilon_G = EA \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{2\ell_0^2} = \frac{EA}{\ell_0^2} \left( hw + \frac{1}{2} w^2 \right)$$

微小変形の仮定 ( $\ell/\ell_0 \approx 1$ ) を適用しながら鉛直方向の力の釣り合い条件を適用すると、荷重  $P$  と変位  $w$  の関係が算定できる。

▶式 3.9

$$P = N \frac{h+w}{\ell} \approx N \frac{h+w}{\ell_o} = \frac{EA}{\ell_o^3} \left( hw + \frac{1}{2} w^2 \right) (h+w) + \frac{N_o}{\ell_o} (h+w)$$

式 3.4 と式 3.5 の荷重-変位の関係から鉛直方向の剛性を次のように表すことができる。

▶式 3.10

$$k = \frac{dP}{dw} = k_o + k_L + k_\sigma$$

$$k_o = \frac{EA}{\ell_o} \left( \frac{h}{\ell_o} \right)^2, \quad k_L = \frac{EA}{\ell_o} \left[ 2 \frac{w}{h} + \left( \frac{w}{h} \right)^2 \right] \left( \frac{h}{\ell_o} \right)^2, \quad k_\sigma = \frac{N}{\ell_o}$$

式 3.10 で、 $k_o$  は線形解析の剛性と同じで、 $k_L$  と  $k_\sigma$  は幾何学的非線形性を反映する剛性を表す。 $k_L$  により構造物の幾何学的な形状変化が剛性に及ぼす影響が考慮できる。また、 $k_\sigma$  項には  $N_o$  ではなく新しい軸力  $N$  が含まれていることが分かる。

軸力  $N$  が圧縮力である場合、部材の長さが短くなるため  $k_L$  と  $k_\sigma$  の符号は(-)になり、引張力の場合には(+)となる。

線形解析との違いを示すために、線形解析の剛性  $k_o$  は次のような方法でも計算できる。

▶式 3.11

$$\varepsilon_E = \frac{\ell - \ell_o}{\ell_o} \approx \frac{1}{\ell_o} \left( w \frac{h}{\ell_o} \right)$$

$$P = N \frac{h}{\ell_o} = (AE\varepsilon_E) \frac{h}{\ell_o} = \frac{EA}{\ell_o} \left( w \frac{h}{\ell_o} \right) \frac{h}{\ell_o} = \frac{EA}{\ell_o} \left( \frac{h}{\ell_o} \right)^2 w$$

$$k_o = \frac{EA}{\ell_o} \left( \frac{h}{\ell_o} \right)^2$$

以上、幾何非線形解析は部材の長さ  $\ell$  と傾斜角度  $\alpha$  が変化することを考慮する点で、2章のP-デルタ解析と異なることが確認できる。その結果、幾何非線形解析ではP-デルタ解析のための剛性に  $k_L$  が追加される。

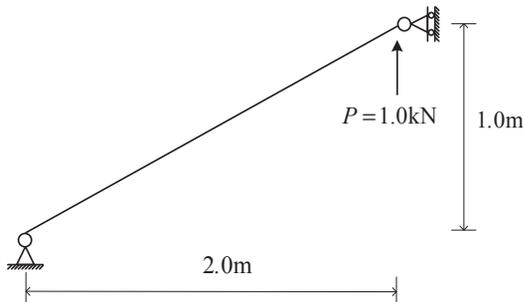
## 02.チュートリアル

### 02.1 モデルの概要

幾何非線形解析は構造物に作用する荷重による構造部材の剛性の変化を反映するための解析法である。構造物の剛性の変化には、変形による構造物の幾何形状の変化及び部材力による幾何剛性の変化が全て考慮される。

本チュートリアルでは図 3.4 のような単純トラス部材に対し幾何非線形解析を行い、線形解析の結果及びP-デルタ解析の結果と比較する。

▶ 図 3.4  
解析モデル



- **材料**  
弾性係数 :  $1.0 \text{ N/mm}^2$
- **断面**  
断面積 (Area) :  $1.0 \times 10^6 \text{ mm}^2$
- **荷重**  
ローラー支点上向き支点荷重 1kN 載荷

## 02.2 作業環境の設定

### 02.2.1 単位系の設定

新しいプロジェクトを開き、ファイルを保存する。

メインメニュー  >  新規プロジェクト...

メインメニュー  >  保存

1. ファイル名：“幾何非線形”と入力し、[保存]をクリック

単位系を設定する。

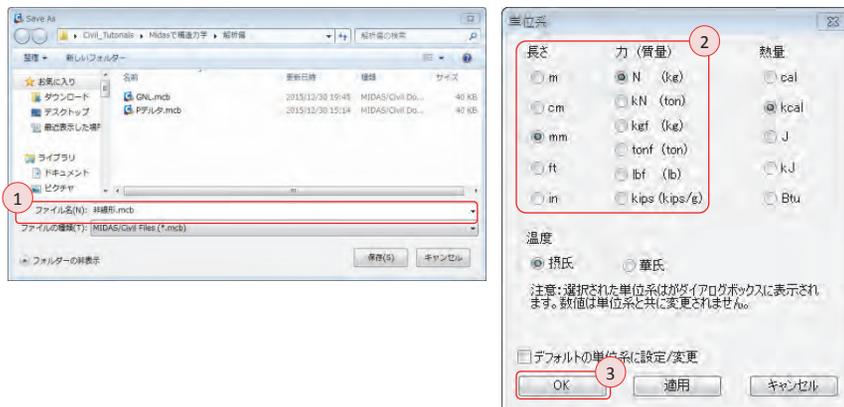
メインメニュー [ツール] > [セッティング] > [単位系]

2. 長さ > 「mm」、力 > 「N(kg)」を選択

3. [OK]をクリック

▶ 図 3.5

- (a) ファイルの保存
- (b) 単位系の設定



単位系の設定は画面下のステータスバーでも簡単に操作できる。

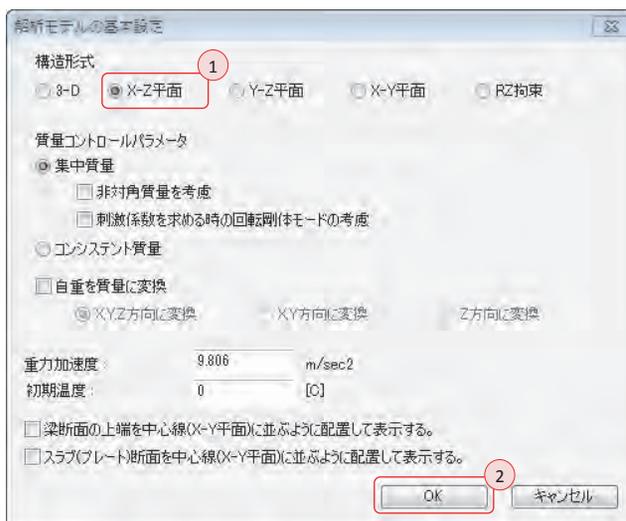
### 02.2.2 作業平面の 設定

解析モデルは平面(X-Z 平面)構造であるため、構造形式を X-Z 平面内で挙動するように指定する。

メインメニュー [ウィザード] > [基本設定] > **[基本設定]**

1. 構造形式 > 「**X-Z 平面**」を選択
2. **[OK]**をクリック

▶ 図 3.6  
作業平面の設定



## 02.3 材料及び断面の定義



Tip

モデルに使用する材料及び断面は解析の便宜上、ユーザーが直接数値を入力する「ユーザー定義」及び「値入力」機能を利用する。

### 1. 断面データ

値入力タブは解析に必要な断面性能を直接入力する方法である。本チュートリアルでは軸力要素であるトラス部材を使用するため断面積だけ入力しても構わない。また、「D」に入力した数値は剛性計算には関係なく、モデル表示のための数値であるため、任意の数値を適切に入力する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > **[材料特性]**

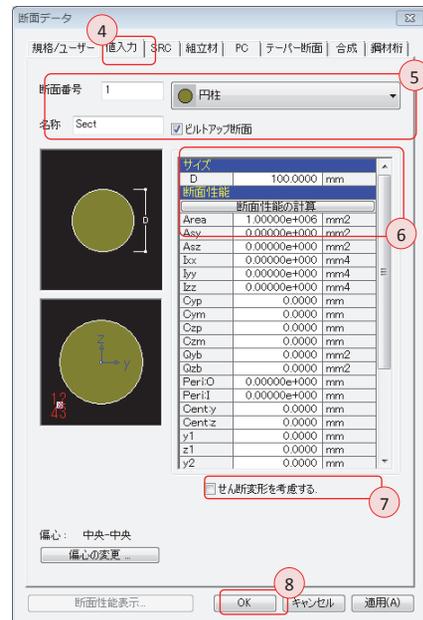
1. **[追加...]** クリック、名称：“Mat” 入力
2. 弾性データ > タイプ > 「ユーザー定義」 選択
3. ユーザー定義 > 弾性係数：“1.0” 入力、**[OK]** クリック
4. **断面タブ** をクリック、**[追加]** クリック、**値入力タブ** をクリック
5. 断面形状 > 「円柱」 選択、名称：“Sect” 入力
6. サイズ > D：“100”、断面性能 > Area：“1e6” 入力
7. **せん断変形を考慮する** (チェックオフ)
8. **[OK]** クリック、**[閉じる]** クリック

### 2. せん断変形を考慮する

本機能はせん断変形の考慮の有無を設定するオプションである。せん断変形が微小な場合は無視するのが一般的であるが、解析プログラムでは微小な変形も考慮できる。ここでは、せん断変形を無視する一般的な数値計算の結果と比較するため、せん断変形は無視する。

#### ▶ 図 3.7

- (a) 材料の定義  
(b) 断面の定義



## 02.4 節点及び要素の生成

### 02.4.1 節点の生成

要素を生成する位置に節点を生成する。

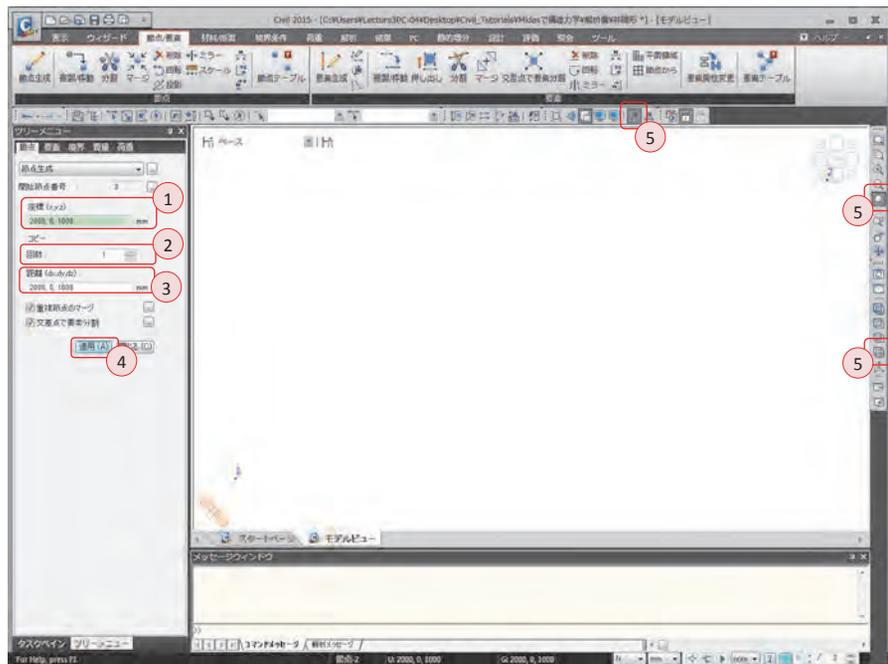
メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [節点生成]

1. 座標 (x, y, z) : “0, 0, 0” 入力
2. コピーの回数 : “1” 入力
3. 距離(dx, dy, dz) : “2000, 0, 1000” 入力
4. [適用] クリック
5. 節点番号、自動フィット、正面 (トグルオン)



自動フィットをトグルオンすると  
モデルが全体画面に表示される  
よう、自動的にズームする。

▶ 図 3.8  
節点の生成



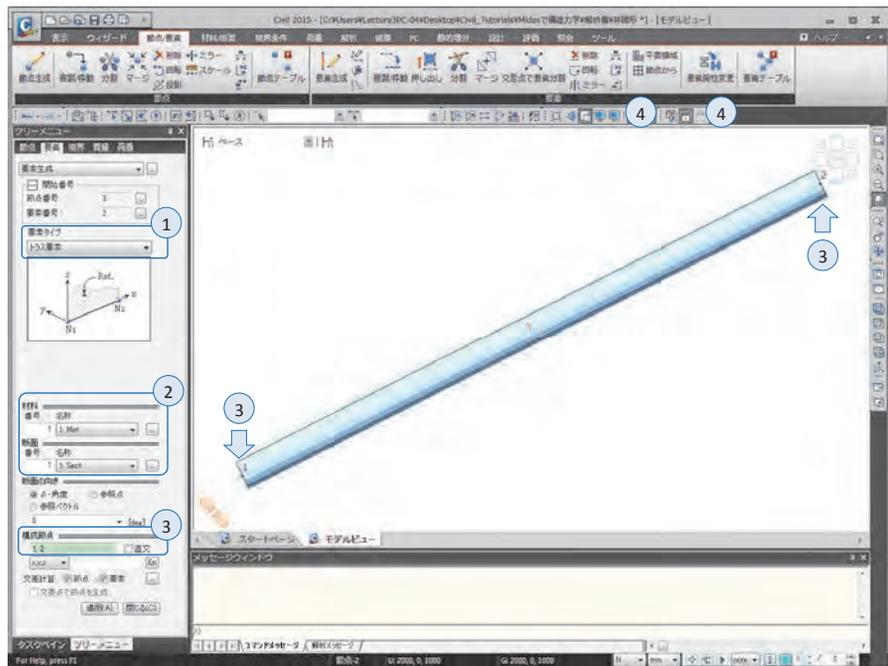
02.4.2 要素の生成

節点を連結して要素を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [要素生成]

1. 要素タイプ > 「トラス」を選択
2. 材料 > 「1:Mat」を選択、断面 > 「1:Sect」を選択
3. 構成節点の入力ボックス内をクリックし、節点1と節点2を順番にクリック
4. 隠線除去表示、要素番号 (トグルオン)

▶ 図 3.9  
要素の生成



### 02.4.3 要素の分割

スパン内部の変形などの詳細結果を確認するため要素を分割する。

#### 1. 縮小表示 (トグルオン)

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [分割]

2.  単一選択で要素 1 選択

3. 分割 > 要素タイプ > 「骨組み」選択

> 等間隔」選択

> 分割数 x : “10” 入力

4. [適用] クリック

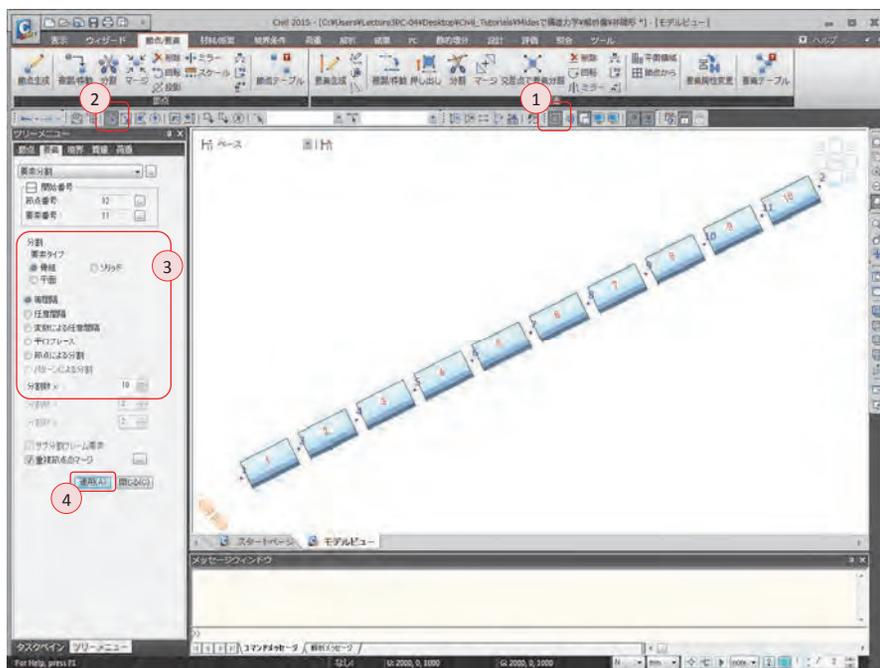
▶ 図 3.10  
要素分割

#### Tip

一つの部材を複数の要素で分割すると部材の詳細な結果が確認できる。

#### Tip

縮小表示は節点を基準に部材の連結状態が確認できる機能である。部材が節点で連結されている状態である場合、図のように分割されて表示される。



## 02.5 境界条件の入力

### 02.5.1 境界条件の 定義

左端はピン支持、右端はローラー支持として設定する。

#### 1. 収縮表示、隠線除去表示、要素番号 (トグルオフ)

メインメニュー [境界条件] > [支持] > **[支持条件]**

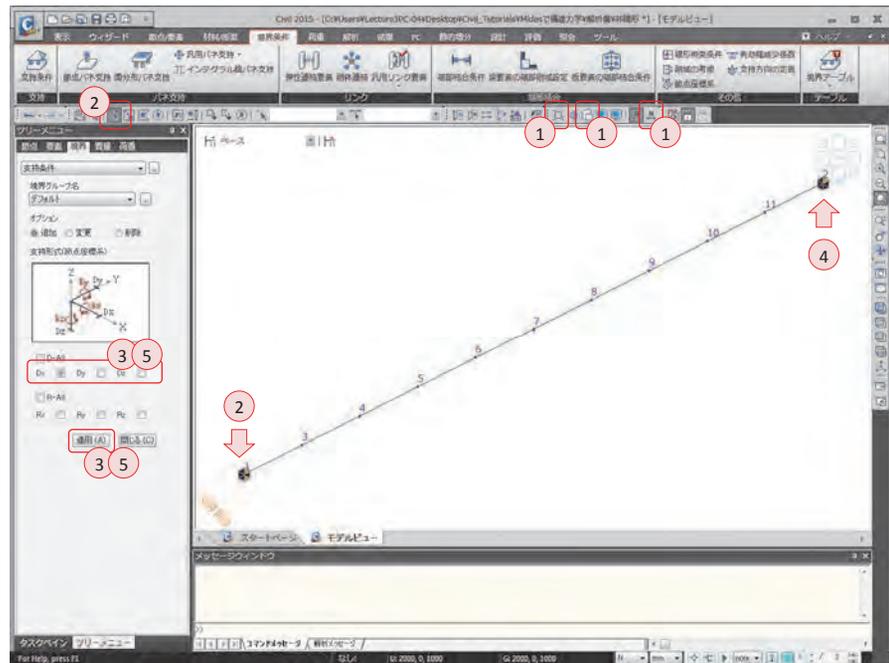
#### 2. 単一選択で節点 1 選択

#### 3. 支持形式 $\triangleright$ Dx, Dz (チェックオン)、**[適用]**クリック

#### 4. 単一選択で節点 2 選択

#### 5. 支持形式 $\triangleright$ Dx (チェックオン)、Dz (チェックオフ)、**[適用]**クリック

#### ▶ 3.11 支持条件の入力



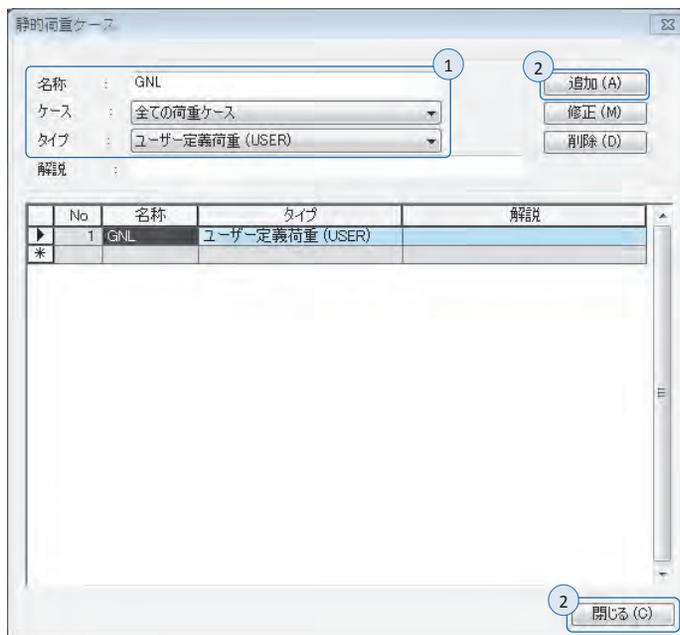
## 02.6 荷重の入力

### 02.6.1 荷重条件の定義 荷重を入力するため、荷重条件の定義する。

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重ケースの生成] > **[静的荷重ケース]**

1. 名称 : “GNL” 入力
2. タイプ : 「ユーザー定義荷重 (USER)」 選択
3. [追加] をクリック
4. [閉じる] をクリック

▶ 図 3.12  
荷重条件の定義

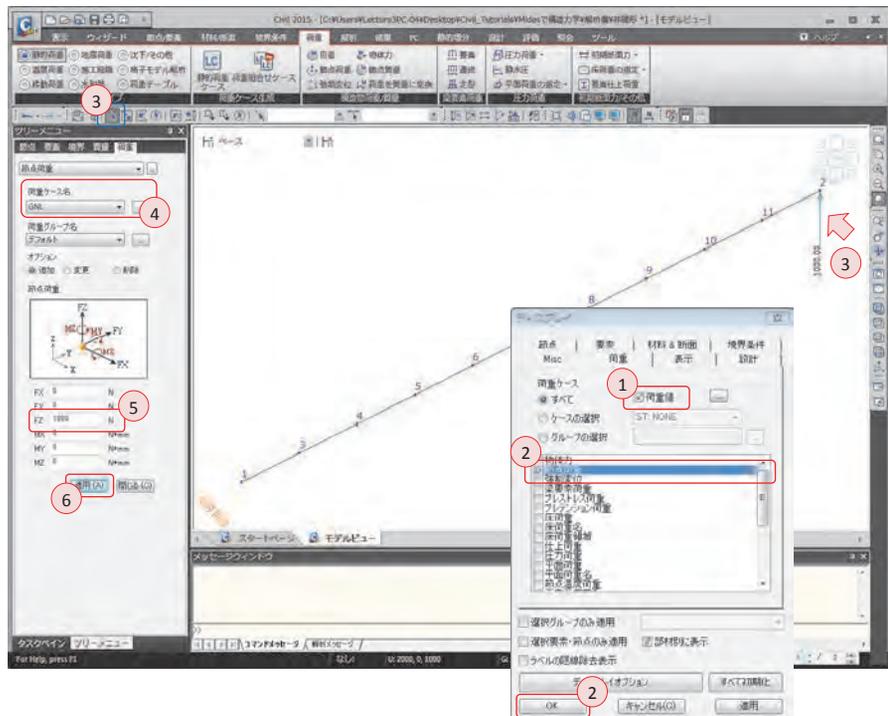


02.6.2 荷重の入力 右端のローラー支点（節点 2）に(+)Z 方向に節点荷重 1000N を載荷する。解析を実行した後、荷重が載荷された節点 2 に対し荷重変位曲線を出力する。

メインメニュー [表示] > [ディスプレイ]> [ディスプレイ]

1. 荷重タブ > 荷重ケース > **荷重値** (チェックオン)
  2. > **節点荷重** (チェックオン)、[OK]クリック
- メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重タイプ/質量] > [節点荷重]
3.  **単一選択**で**節点 2**を選択
  4. 荷重ケース名 > 「GNL」選択
  5. 節点荷重 > FZ: “1000” 入力
  6. [適用]クリック

▶ 図 3.13  
節点荷重の入力



## 02.7 構造解析の実行

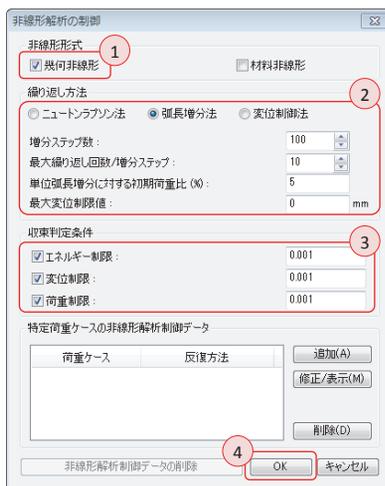
### 02.7.1 幾何非線形 解析条件の入力

幾何非線形解析を実行するためのデータを入力する。本チュートリアルでは反復解析で荷重を調整し収斂するニュートンラプソンと変位を調整し収斂する弧長増分法を使用し解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > **[非線形]**

1. 非線形形式 > 「**幾何非線形**」選択
2. 繰り返し方法 > 「**弧長増分方法**」選択  
増分ステップ数 : “100” 入力  
最大繰り返し回数/増分ステップ : “10” 入力  
単位弧長増分に対する初期荷重比 : “5” 入力  
最大変位制限値 : “0” 入力
3. 収束判定条件 > 「**エネルギー**」チェック : “0.001” 入力  
> 「**変位制限**」チェック : “0.001” 入力  
> 「**荷重制限**」チェック : “0.001” 入力
4. **[OK]** クリック

▶ 図 3.14  
非線形解析制御



### 02.7.2 幾何非線形解析の実行

簡単な非線形解析モデルであるため、汎用解析手法の Skyline を用い解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > [オプション]

1. 静的解析手法 > 「Skyline」選択、[OK]クリック

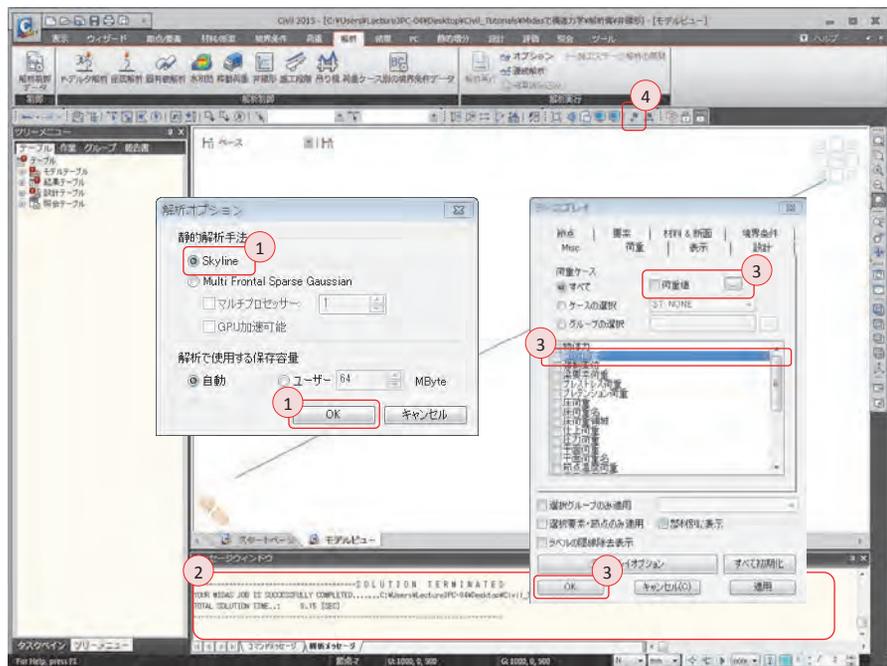
メインメニュー [解析] > [解析実行] > [解析実行]

2. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

メインメニュー [表示] > [ディスプレイ] > [ディスプレイ]

3. 荷重タブの節点荷重 (チェックオフ)、[OK]クリック
4. 節点番号 (トグルオフ)

▶ 図 3.15  
解析の正常終了のメッセージ



## 02.8 解析結果の確認

02.8.1 変位及び変形 アニメーション機能を利用し、変形を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変形図]

1. 荷重ケース/組合せ> 「ST:GNL」 選択
2. 成分 > 「DXZ」 選択
3. 表示形式 > 変形前、数値、凡例、アニメーション (チェックオン)
4. [適用] クリック
5. モデルビュー下の「録画」ボタンをクリック  
変形形状を確認した後「閉じる」ボタンをクリック

▶ 図 3.16  
変位及び変形の結果



節点 2 のローラー支点で上向きの 11.034mm の変位が発生することが確認できる。

02.8.2 部材力

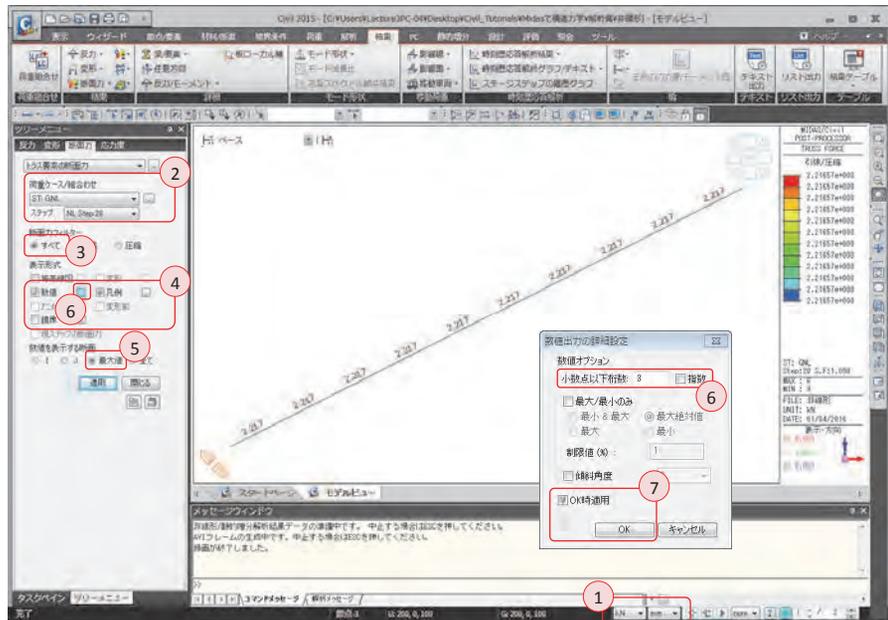
部材に作用する軸力を確認する。

1. ステータスバー > 力: 「kN」、長さ: 「mm」

メインメニュー [結果] > [結果] > [断面力] > [トラス要素の断面力]

2. 荷重ケース/組み合わせ > 「ST:GNL」選択、ステップ > 「NL Step:20」選択
3. 断面力フィルター > 「すべて」選択
4. 表示形式 > 数値、凡例 (チェックオン)
5. 数値を表示する断面 > 「最大値」選択
6. 数値の  をクリック、小数点以下桁数: “3” 入力
7. OK 時適用 (チェックオン)、[OK] クリック

▶ 図 3.17  
軸力の結果



トラス部材に 2.217kN の引張力が発生することが確認できる。

02.8.3 P-デルタ解析との比較 幾何非線形解析の結果と比較するため、今までの解析の結果を別の名前で保存する。

メインメニュー  /名前を付けて保存

1. ファイル名：“非線形\_Pデルタ”と入力し、[保存]をクリック

P-デルタ解析を実行するため、入力されている幾何非線形解析条件を削除する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > [非線形]

2. [非線形解析データの削除]をクリック

▶ 図 3.18  
非線形解析の解析条件の削除

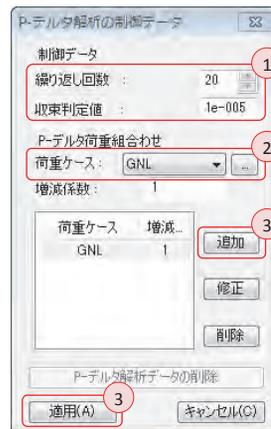


P-デルタ解析を実行するためのデータを入力する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > **[P-デルタ解析]**

1. 制御データ > 繰り返し回数 : “20” 入力  
    > 収束判定値 : “1e-005” 入力
2. P-デルタ荷重組合せ > 「GNL」 選択、増減係数 : “1” 入力
3. **[追加]** クリック、**[適用]** クリック

▶ 図 3.19  
P-デルタ解析制御



P-デルタ解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

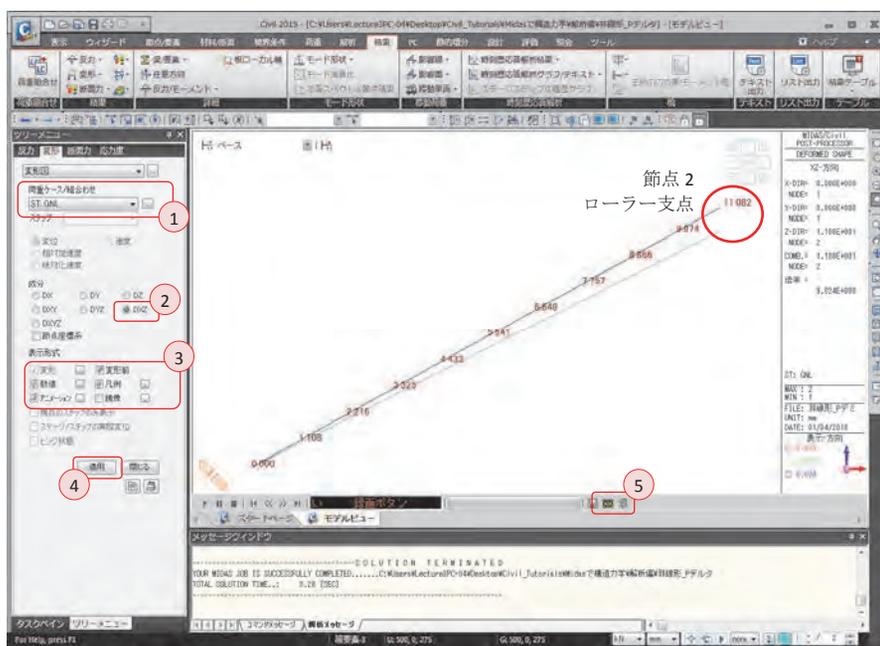
1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

02.8.4 P-デルタ解析 アニメーション機能を利用し、変形を確認する。  
による変位及び変形

メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変形図]

1. 荷重ケース/組合わせ> 「ST:GNL」 選択
2. 成分 > 「DXZ」 選択
3. 表示形式 >変形前、数値、凡例、アニメーション (チェックオン)
4. [適用] クリック
5. モデルビュー下の「録画」ボタンクリック  
変形形状を確認した後、「閉じる」ボタンをクリック

▶図 3.20  
変位及び変形



節点2のローラー支点上向きの変位が11.082mm発生することが確認できる。

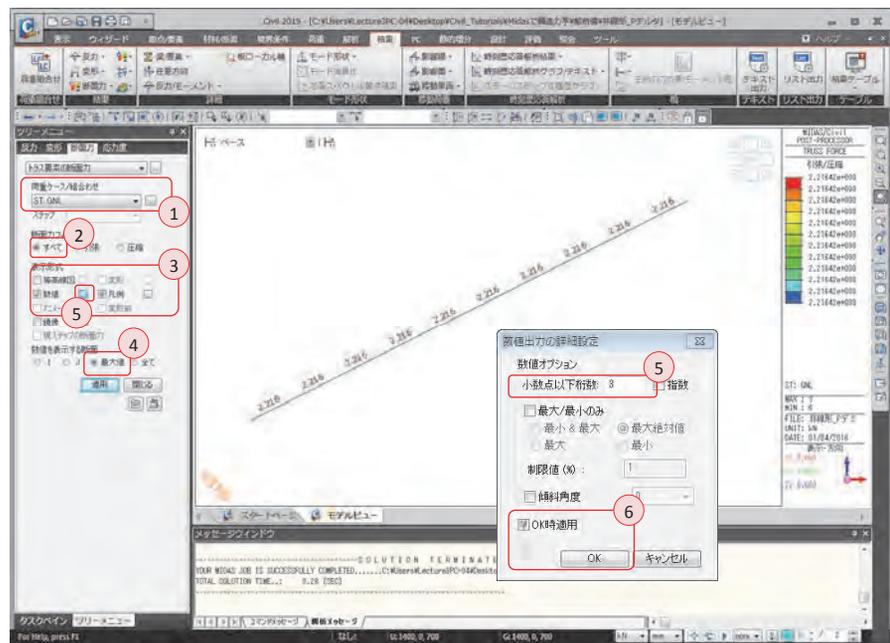
02.8.5 P-デルタ解析  
による部材力

部材に作用する軸力を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [断面力▼] > [トラス要素の断面力]

1. 荷重ケース/組合わせ > 「ST:GNL」 選択
2. 断面力フィルター > 「すべて」 選択
3. 表示形式 > 数値、凡例 (チェックオン)
4. 数値を表示する断面 > 「最大値」 選択
5. 数値の□をクリック、小数点以下桁数: “3” 入力
6. OK 時適用 (チェックオン)、[OK] クリック

▶ 図 3.21  
軸力の結果



トラス部材に 2.216kN の引張力が発生することが確認できる。

### 02.8.6 線形解析の 比較

線形解析による結果と比較するため、別の名称でファイルを保存する。

メインメニュー  /名前を付けて保存

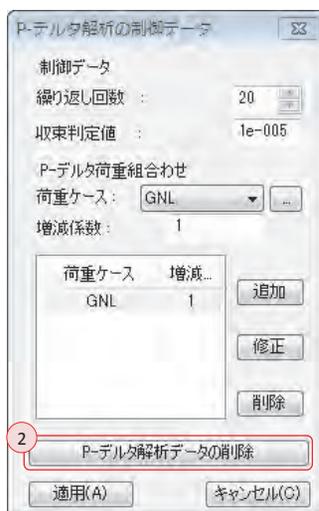
1. ファイル名：“線形\_Pデルタ”と入力し、[保存]をクリック

線形解析を実行するため、入力されている P-デルタ解析条件を削除する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > [P-デルタ解析]

2. [P-デルタ解析データの削除]をクリック

▶図 3.22  
P-デルタ解析条件の削除



線形解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > [解析実行]

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

02.8.7 線形解析による変位及び変形

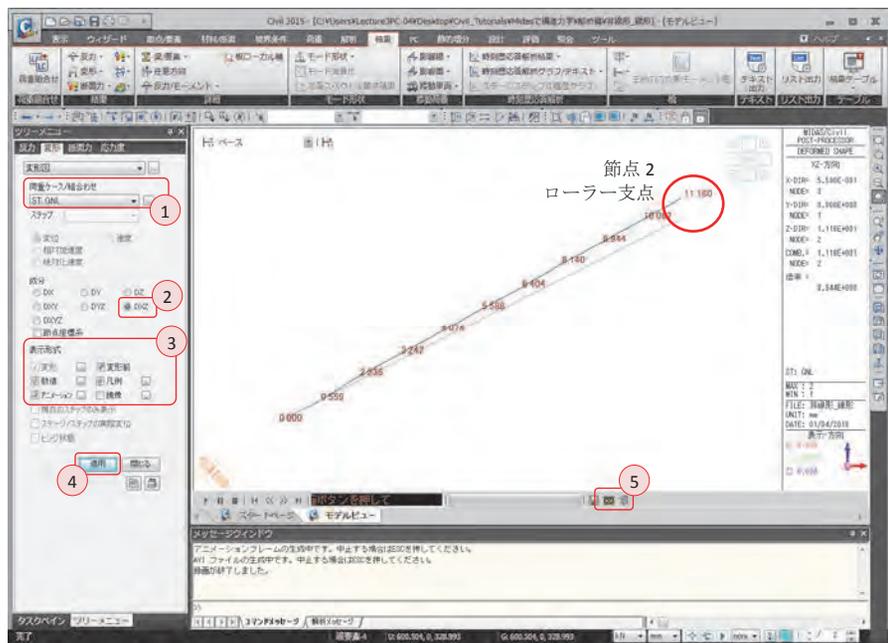
アニメーション機能を利用し、変形を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変形図]

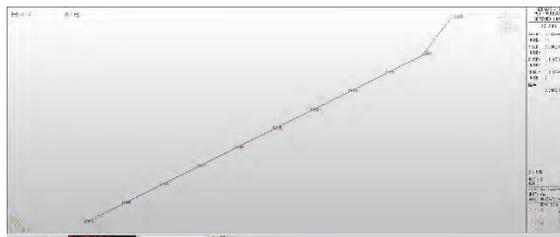
1. 荷重ケース/組合せ > 「ST:GNL」 選択
2. 成分 > 「DXZ」 選択
3. 表示形式 > 変形前、数値、凡例、アニメーション (チェックオン)
4. [適用] クリック
5. モデルビュー下の「録画」ボタンをクリック  
変形形状を確認した後「閉じる」ボタンをクリック

▶ 図 3.23  
変位及び変形の結果

形状が右図と相違する場合は、解析>解析実行>オプションで静的解析手法で「Multi Frontal Sparse Gaussian」を選択し解析を実行する。



節点2のローラー支点上向きの変位が11.180mm発生することが確認できる。



Skyline 手法を用いた場合、変形結果は左図のようになる。

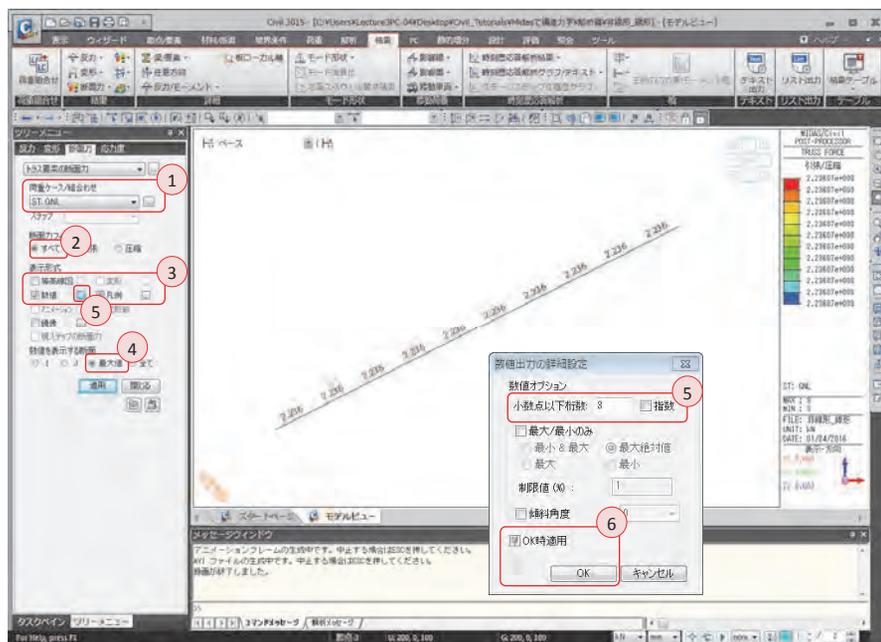
02.8.8 線形解析による部材力

部材に作用する軸力を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [断面力▼] > [トラス要素の断面力]

1. 荷重ケース/組合わせ > 「ST:GNL」 選択
2. 断面力フィルター > 「すべて」 選択
3. 表示形式 > 数値、凡例 (チェックオン)
4. 数値を表示する断面 > 「最大値」 選択
5. 数値の□をクリック、小数点以下桁数: “3” 入力
6. OK時適用 (チェックオン)、[OK]クリック

▶ 図 3.24  
軸力の結果



トラス部材に 2.236kN の引張力が発生することが確認できる。

## 03. 構造計算の解説

### 03.1 力学的概念の理解及び数値計算

幾何非線形解析を数値計算で行うため式 3.5 と式 3.8 を利用すると次のように整理できる。

$$N = \frac{EA}{\ell_o^2} \left( hw + \frac{1}{2} w^2 \right) \text{ ここで, } \left| N \frac{w+h}{\ell_o} - P \right| \leq \text{許容誤差}$$

上の式は未知数を 2 つ持っているため、反復計算を通して解が求められる。変位  $w$  を仮定し  $N$  を算定した後、右側の誤差が許容値より小さくなるまで反復計算をすると節点 2 の  $z$  方向の変位  $w$  と軸力  $N$  が求められる。

$$N = 2.217\text{kN}, \quad w = 11.034\text{mm}$$

以上の数値計算の結果は Civil の幾何非線形解析の結果と一致する。

P-デルタ解析の結果と比較するため、1 節の式 3.1~3.3 を使用する。解析モデルでは右端の節点が  $z$  方向の自由度のみ拘束されていないため、 $j$  端の鉛直変位  $w_j$  のみ存在する。従って、次のような支配方程式が成り立つ。

$$\left[ \frac{EA}{\ell_o} \sin^2 \theta_o + \frac{N}{\ell_o} \cos^2 \theta_o \right] w = P$$

ここで、 $\sin \alpha_o = h/\ell_o$  と  $\cos \alpha_o = a/\ell_o \approx 1$  の場合、最初の項は  $k_o$  になり、次の項は  $k_\alpha$  になることが分かる。従って、P-デルタ解析と幾何非線形解析の違いは  $k_L$  追加の有無にある。上の式も未知数を 2 つ持っているため反復計算で次のような解が得られる。

$$N = 2.216\text{kN}, \quad w = 11.082\text{mm}$$

以上の数値計算の値はCivilのP-デルタ解析の結果と一致する。

次の表は線形解析、P-デルタ解析、幾何非線形解析の結果をまとめたものである。

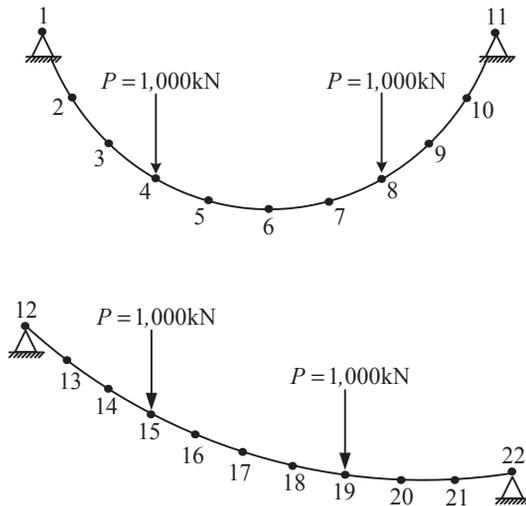
解析方法	$L_o$ (mm)	$L$ (mm)	$w$ (mm)	$N$ (kN)
線形解析	2236.07	-	11.180	2.236
P-デルタ解析 (数値計算およびCivil)	2236.07	-	11.082	2.216
幾何非線形解析 (数値計算およびCivil)	2236.07	2241.02	11.034	2.217

P-デルタ解析の結果と幾何非線形解析の結果には非常に微少な違いがある。

このような違いは変形による構造物の形状の変化（ここでは部材の長さ及び方向の変化）により発生したものである。

## 04.練習問題

1. トラス要素で構成された次のような構造物の各支点で発生する反力と変形図を確認しなさい。



- **材料**  
弾性係数 :  $2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$
- **断面**  
断面形状 : 円形  
直径 : 100mm
- **荷重**  
(-)方向の集中荷重 1,000 kN 載荷

➤ 節点座標

Node	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	0,000000	0,000000	0,000000
2	9,919920	0,000000	-10,327700
3	21,520200	0,000000	-18,724100
4	34,430200	0,000000	-24,920900
5	48,237200	0,000000	-28,720000
6	62,500000	0,000000	-30,000000
7	76,762800	0,000000	-28,720000
8	90,569800	0,000000	-24,920900
9	103,480000	0,000000	-18,724100
10	115,080000	0,000000	-10,327700
11	125,000000	0,000000	0,000000
12	0,000000	0,000000	-100,000000
13	10,874600	0,000000	-107,537000
14	22,321000	0,000000	-114,173000
15	34,264900	0,000000	-119,865000
16	46,628500	0,000000	-124,576000
17	59,331500	0,000000	-128,276000
18	72,291400	0,000000	-130,940000
19	85,423800	0,000000	-132,552000
20	98,643300	0,000000	-133,100000
21	111,864000	0,000000	-132,582000
22	125,000000	0,000000	-131,000000

# 4. 座屈 解析

## TABLE OF CONTENTS

O1 概念の理解	
<hr/>	
01.1 座屈解析の概念	4-1
O2 チュートリアル	
<hr/>	
02.1 モデルの概要	4-6
02.2 作業環境の設定	4-7
02.3 材料及び断面の定義	4-9
02.4 節点及び要素の生成	4-10
02.5 境界条件の入力	4-12
02.6 荷重の入力	4-13
02.7 構造解析の実行	4-15
02.8 解析結果の確認	4-17
O3 構造計算の解説	
<hr/>	
03.1 力学的概念の理解 及び数値計算	4-23
O4 練習問題	
<hr/>	
	4-27



## 01.概念の理解

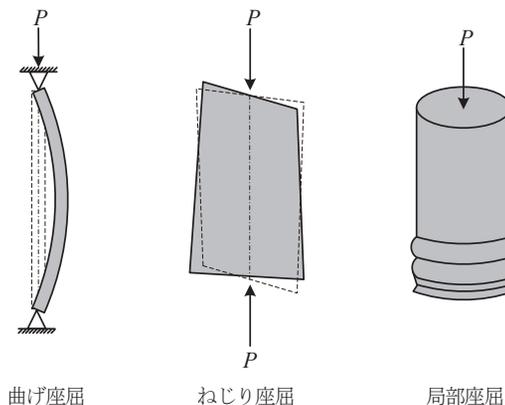
### 01.1 座屈解析の概念

#### 01.1.1 一般事項

細長い形状の柱に軸方向の圧縮力が加わる場合や、薄い平板に面内方向の圧縮力が加わる場合、荷重がある大きさに到達すると急激に大きい横変位 (lateral displacement) が発生する。このような挙動を座屈と言い、構造物の安定性に深刻な害を及ぼす要因となる。

座屈が発生する前までは安定的な釣り合い状態を維持するが、一度座屈が発生すると横方向に大きな変形が発生し外部の荷重を支えられなくなる。このような座屈は細長い柱や薄い平板の曲げ座屈 (flexural buckling) だけに限らない。他にも、物体の局所の領域に部分的に発生する局部座屈 (local buckling)、せん断力により発生するせん断座屈 (shear buckling)、ねじりにより発生するねじり座屈 (torsion buckling) などがある。一方、座屈による物体の変形が構造物を成す平面内にあるか、外にあるかによって面内座屈 (in-plane buckling) と面外座屈 (out-of-plane buckling) に区分される。

▶図 4.1  
座屈の種類



座屈はほとんどの場合、物体の形状や荷重条件の不完全性 (imperfection) に起因する。例えば、柱の断面の中心に軸方向の圧縮力を加えた場合を想定しよう。理論的には側面方向の曲げを発生する荷重やモーメント成分がないため座屈は発生しない。

しかし、実際は柱の断面も正確な円形ではないし、圧縮力が作用する点も正確な軸の中心ではない。幾何学的な不完全性と圧縮力の位置の中心軸からのずれにより横方向の変位が発生する。

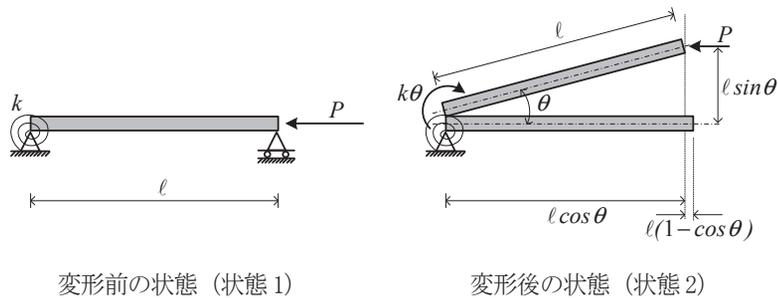
座屈は物体の細い程度を表す細長比が大きいほど発生しやすい。言い換えると、長さが長い柱の方が短い柱に比べ座屈が発生しやすい。また、同じ材料や形状及び荷重条件であっても、物体を拘束する境界条件により大きく左右される。

なお、座屈が発生する荷重の大きさを臨界荷重 (critical load) と言い、座屈の可能性を表す指数には座屈荷重係数 (buckling load factor, BLF) が主に用いられる。

### 01.1.2 解析の概念

構造解析における座屈とは圧縮力を受ける状態で構造物が、ある状態 (状態 1) から別の状態 (状態 2) に急激に変化する現象を言う。状態 1 は構造物が力の釣り合い状態を保っている状態であるが、状態 2 は臨界荷重 ( $P_{cr}$ ) を超える荷重に対し状態 1 とは関係なく変形する状態を意味する。座屈解析のためには構造物が変形した状態で力の釣り合い条件を適用する。

▶図 4.2  
 臨界荷重による構造物の変形



状態 2 でバネの位置に対するモーメントの釣り合い条件を適用すると次のようになる。

▶式 4.1 
$$-k\theta + P\ell \sin \theta = 0$$

微小変形の仮定を適用すると、 $\sin \theta \approx \theta$  であるため、

▶式 4.2  $(-k + P\ell)\theta = 0$

ここで  $\theta$  が 0 の場合は解析の対象とならないため、括弧内の式が 0 となる解を求め  
ることによって座屈荷重が得られる。

▶式 4.3 
$$P_{cr} = \frac{k}{\ell}$$

従って、座屈解析では変形の大きさである  $\theta$  を求めるのではなく、座屈形状及び  
臨界荷重のみを求める。

曲げ剛性を持つ柱に対する座屈解析を行うためには第 1 章の式 1.4 または、式 1.5  
のような微分方程式が用いられる。ヒンジ支点を両端に持つ柱の座屈解析に対し、  
式 1.4 ( $EIw'''' + Pw'' = 0$ ) を適用すると、次のように解が求められる。

▶式 4.4 
$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D$$

ここで、 
$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

両端がヒンジであるため、次のような境界条件が成り立たなければならない。

▶式 4.5 
$$\begin{aligned} w(0) &= B + D = 0 \\ w(\ell) &= A \sin k\ell + B \cos k\ell + C\ell + D = 0 \\ w''(0) &= -Bk^2 = 0 \\ w''(\ell) &= -Ak^2 \sin k\ell - Bk^2 \cos k\ell = 0 \end{aligned}$$

以上を行列式で表すと次のようになる。

▶式 4.6 
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin k\ell & \cos k\ell & \ell & 1 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ -k^2 \sin k\ell & -k^2 \cos k\ell & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

式 4.5 から、 $B = D = 0$  であるため、次のように簡単にまとめられる。

▶式 4.7

$$\begin{bmatrix} \sin k\ell & \ell \\ -k^2 \sin k\ell & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上の式で定数である  $A$  と  $C$  が 0 の場合は解析の対象とならないため、行列式が 0 とならなければならない。従って、行列式が 0 となる条件から次のような結果が得られる。

▶式 4.8

$$\sin k\ell = 0 \quad \text{または,} \quad k\ell = n\pi$$

ここで、 $n$  は自然数(1~∞)である。

従って、ヒンジ支点を両端に持つ柱の座屈荷重は次のようになる。

▶式 4.9

$$P_{cr} = \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 EI$$

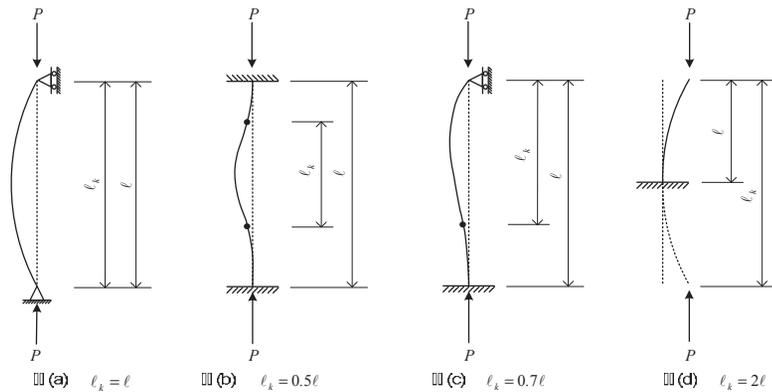
以上の結果は式 1.5 を適用しても同じく得られる。以下、両端の支持条件による座屈解析の結果を表 4.1 にまとめる。

▶表 4.1

両端の支持条件による座屈解析

支持条件	$P_{cr}$ 座屈荷重	$\ell_k$ 座屈長さ
両端ヒンジ	$\left( \frac{n\pi}{1.0\ell} \right)^2 EI$	$1.0\ell$
両端固定	$\left( \frac{n\pi}{0.5\ell} \right)^2 EI$	$0.5\ell$
一端ヒンジ 他端固定	$\left( \frac{n\pi}{0.7\ell} \right)^2 EI$	$0.7\ell$
一端固定 他端自由	$\left( \frac{n\pi}{2.0\ell} \right)^2 EI$	$2.0\ell$

▶ 図 4.3



座屈解析の式は P-デルタ解析の式と同一であるが、P-デルタ解析では変位値を直接求めるのに対し、座屈解析では行列式が 0 になる条件を利用し臨界荷重の大きさ及び変形形状を求める点で違いがある。

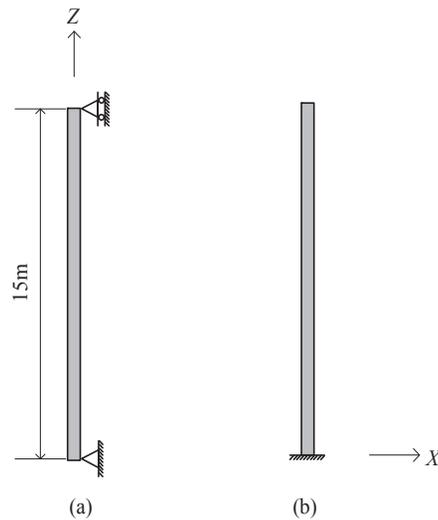
また、座屈解析で行列式が 0 になる条件を利用する点では固有値解析に近いともいえる。数学的な面では座屈解析の臨界荷重は固有値解析の固有値 (eigenvalue) と、座屈形状は固有ベクトル (eigenvector) と対応する。

## 02.チュートリアル

## 02.1 モデルの概要

本チュートリアルでは多様な境界条件下で軸力を負担する柱部材の座屈解析を行い、座屈モードと臨界荷重を確認する。

▶図 4.4  
解析モデル



- **材料**  
弾性係数 :  $100 \text{ N/mm}^2$
- **断面**  
断面積 (Area) :  $2.5 \times 10^5 \text{ mm}^2 (1000 \times 250)$   
断面 2 次モーメント ( $I_{yy}$ ) :  $1.30208 \times 10^9 \text{ mm}^4$
- **荷重**  
上部節点に下向きの節点荷重 10 kN を載荷

## 02.2 作業環境の設定

### 02.2.1 単位系の設定

新しいプロジェクトを開き、ファイルを保存する。

メインメニュー  >  **新規プロジェクト...**

メインメニュー  >  **保存**

1. ファイル名：“座屈”と入力し、[保存]をクリック

単位系を設定する。

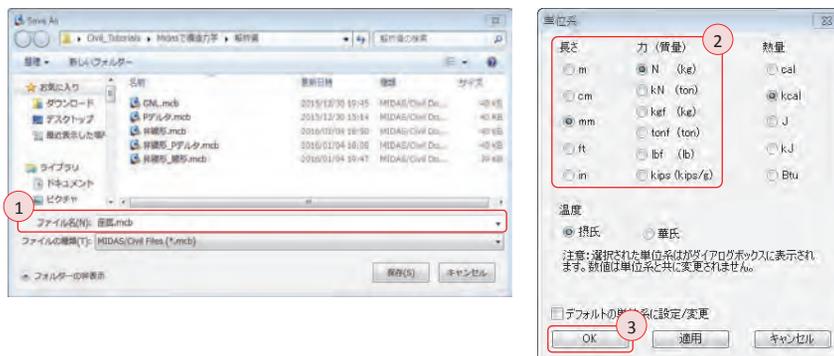
メインメニュー [ツール] > [セッティング] > **[単位系]**

2. 長さ > 「mm」、力 > 「N(kg)」を選択

3. [OK]をクリック

▶ 図 4.5

- (a) ファイルの保存
- (b) 単位系の設定



単位系の設定は画面下の  
ステータスバーでも簡単に操作  
できる。

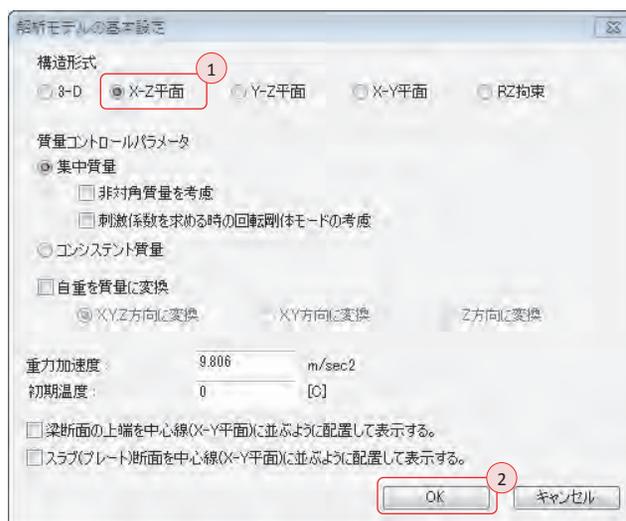
### 02.2.2 作業平面の 設定

解析モデルは平面 (X-Z 平面) 構造であるため、構造形式を X-Z 平面内で挙動するように指定する。

メインメニュー [ウィザード] > [基本設定] > **[基本設定]**

1. 構造形式 > 「**X-Z 平面**」を選択
2. **[OK]**をクリック

▶ 図 4.6  
作業平面の設定



## 02.3 材料及び断面の定義

モデルに使用する材料及び断面は解析の便宜上、ユーザーが直接数値を入力する「ユーザー定義」及び「値入力」機能を利用する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > **[材料特性]**

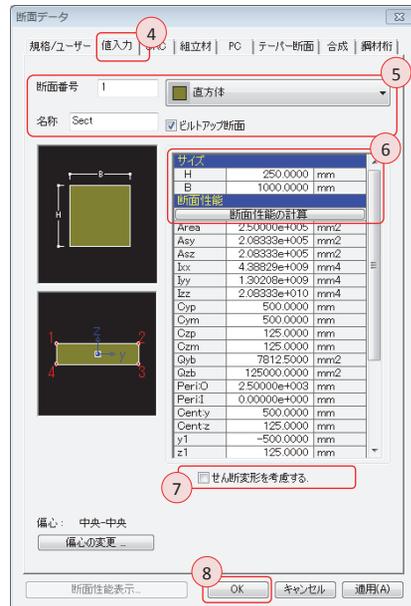
1. **[追加...]** クリック、名称：“Mat” 入力
2. 弾性データ > タイプ > 「**ユーザー定義**」 選択
3. ユーザー定義 > 弾性係数：“100” 入力、**[OK]** クリック
4. **断面** タブをクリック、**[追加]** クリック、**値入力** タブをクリック
5. 断面形状 > 「**直方体**」 選択、名称：“Sect” 入力
6. サイズ > H：“250”、B：“1000”、**[断面性能の計算]** クリック
7. **せん断変形を考慮する** (チェックオフ)
8. **[OK]** クリック、**[閉じる]** クリック

▶ 図 4.7

- (a) 材料の定義  
(b) 断面の定義



断面サイズを入力した後、**[断面性能の計算]**をクリックすると断面性能を自動的に計算する。



## 02.4 節点及び要素の生成

### 02.4.1 節点の生成

単位系を調整し、要素を生成する位置に節点を生成する。

1. ステータスバーで、力 > 「kN」、長さ > 「m」に変更

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [節点生成]

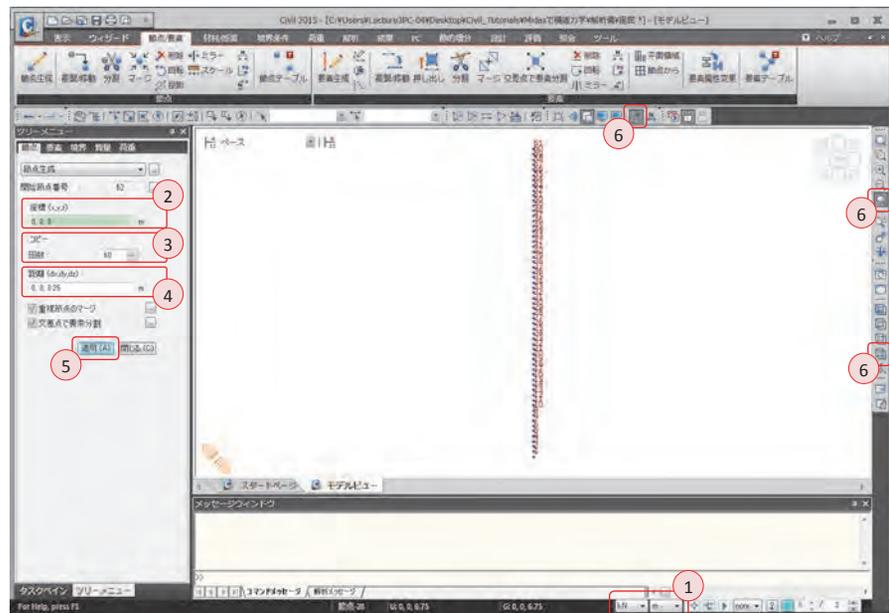
2. 座標 (x, y, z) : “0, 0, 0” 入力
3. コピーの回数 : “60” 入力
4. 距離(dx, dy, dz) : “0, 0, 0.25” 入力
5. [適用] クリック
6. 節点番号、自動フィット、正面 (トグルオン)



Tip

自動フィット機能はモデルが全体画面で表示されるようズームを自動的に調整する機能である。

▶ 図 4.8  
節点の生成



### 02.4.2 要素の生成

節点を連結し要素を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [要素生成]

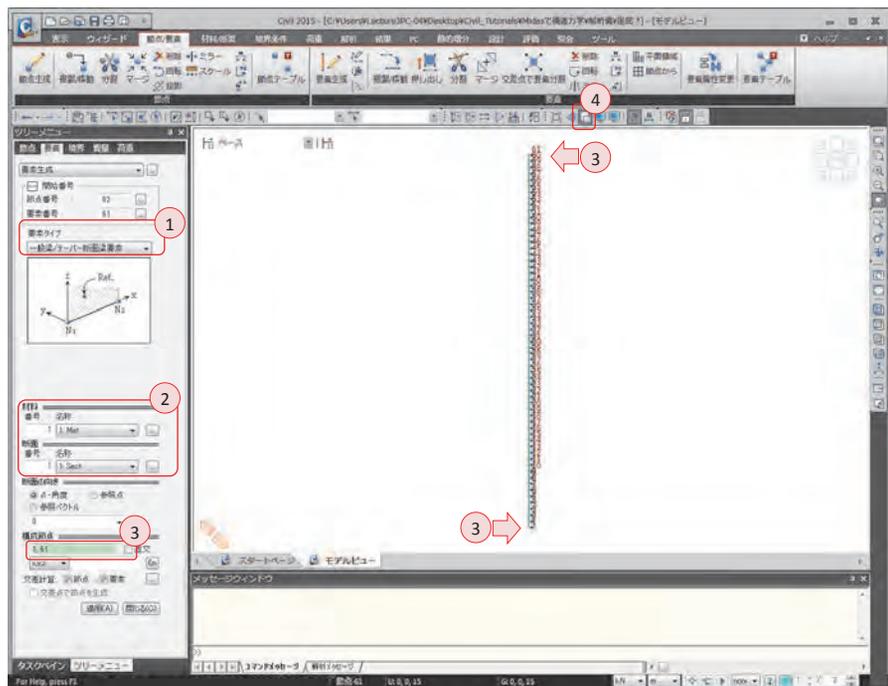
1. 要素タイプ > 「**一般梁/テーパ**断面梁要素」を選択
2. 材料 > 「1:Mat」を選択、断面 > 「1:Sect」を選択
3. 構成節点の入力ボックス内をクリックし、**節点 1** と **節点 61** を順番にクリック
4. **隠線除去表示** (トグルオン)

▶ 図 4.9  
要素の生成



Tip

一つの部材を複数の要素に分割すると部材の詳細な結果が確認できる。



## 02.5 境界条件の入力

柱の下端はピン支持、上端はローラー支持を入力する。X-Z 平面での挙動のみ許容しているため、ピン支持は  $D_x$ 、 $D_z$  を拘束し、ローラー支持は  $D_x$  のみ拘束する。

### 1. 隠線除去表示 (トグルオフ)

メインメニュー [境界条件] > [支持] > **[支持条件]**

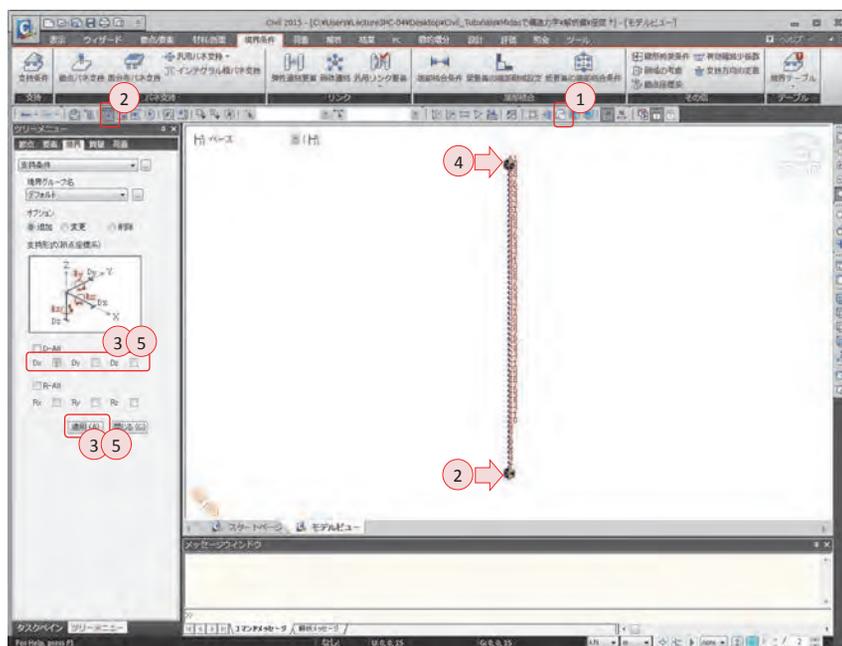
2.  **単一選択** で節点 1 選択

3. 支持形式 >  $D_x$ 、 $D_z$  (チェックオン)、**[適用]** クリック

4.  **単一選択** で節点 61 選択

5. 支持形式 >  $D_x$  (チェックオン)、 $D_z$  (チェックオフ)、**[適用]** クリック

▶ 図 4.10  
支持条件の入力



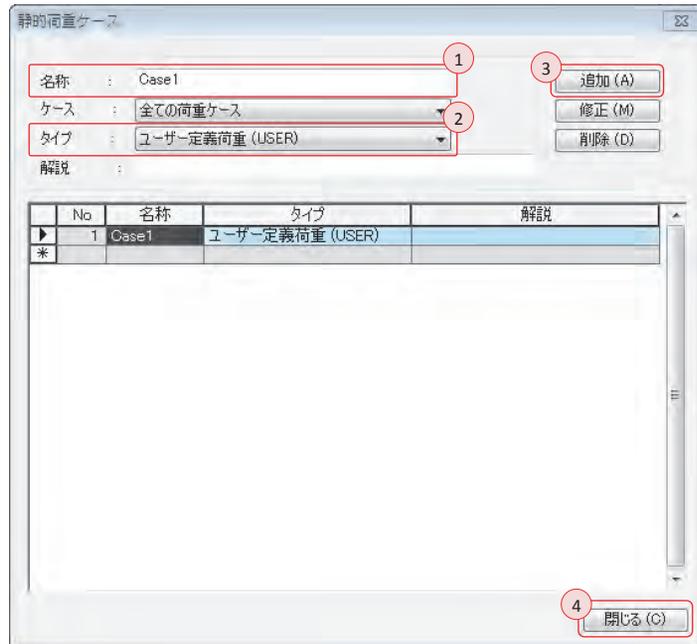
## 02.6 荷重の入力

### 02.6.1 荷重条件の定義 荷重を入力するため、荷重条件を定義する。

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重ケースの生成] > **[静的荷重ケース]**

1. 名称 : “Case1” 入力
2. タイプ : 「ユーザー定義荷重 (USER)」 選択
3. [追加] をクリック
4. [閉じる] をクリック

▶ 図 4.11  
荷重条件の定義





## 02.7 構造解析の実行

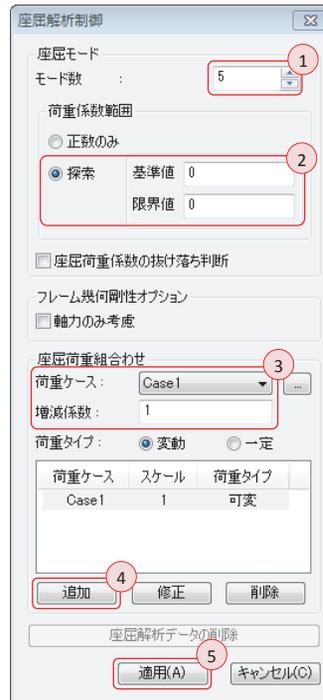
### 02.7.1 座屈解析条件 の入力

座屈解析を実行するための基本データを入力する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > **[座屈解析]**

1. モード数 > “5” 入力
2. 荷重係数範囲 > 「探索」選択 > 基準値：“0”、限界値：“0” 入力
3. 座屈荷重組合せ > 荷重ケース > 「Case1」選択  
> 増減係数 > “1” 入力
4. [追加] クリック
5. [適用] クリック

▶ 図 4.13  
座屈解析制御



### 02.7.2 座屈解析の 実行

座屈解析を実行する。

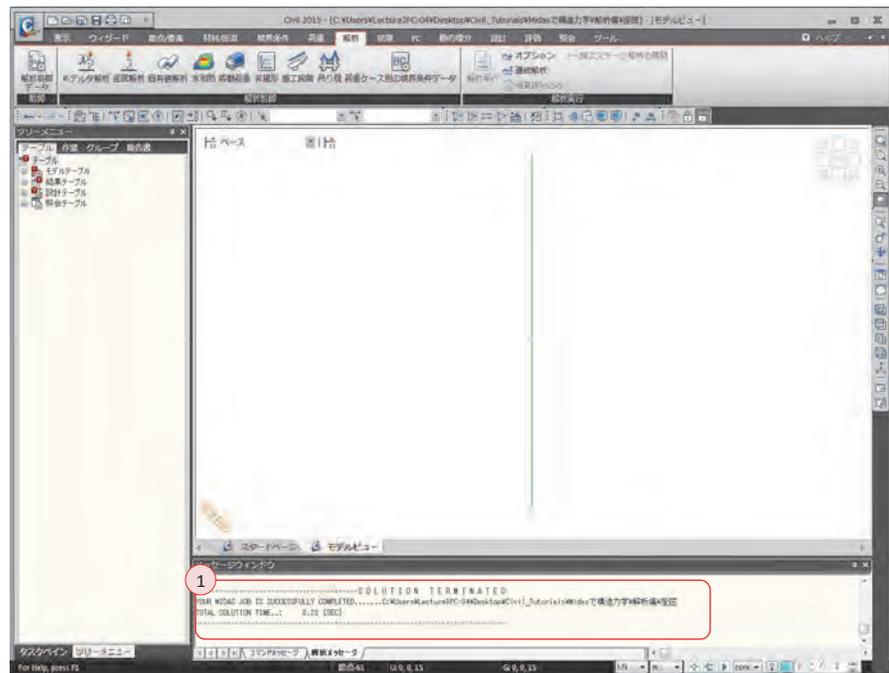
メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

メインメニュー [表示] > [ディスプレイ] > **[ディスプレイ]**

2. 荷重タブの**節点荷重** (チェックオフ)、**[OK]** クリック
3. **節点番号** (トグルオフ)

▶ 図 4.14  
解析の正常終了のメッセージ



## 02.8 解析結果の確認

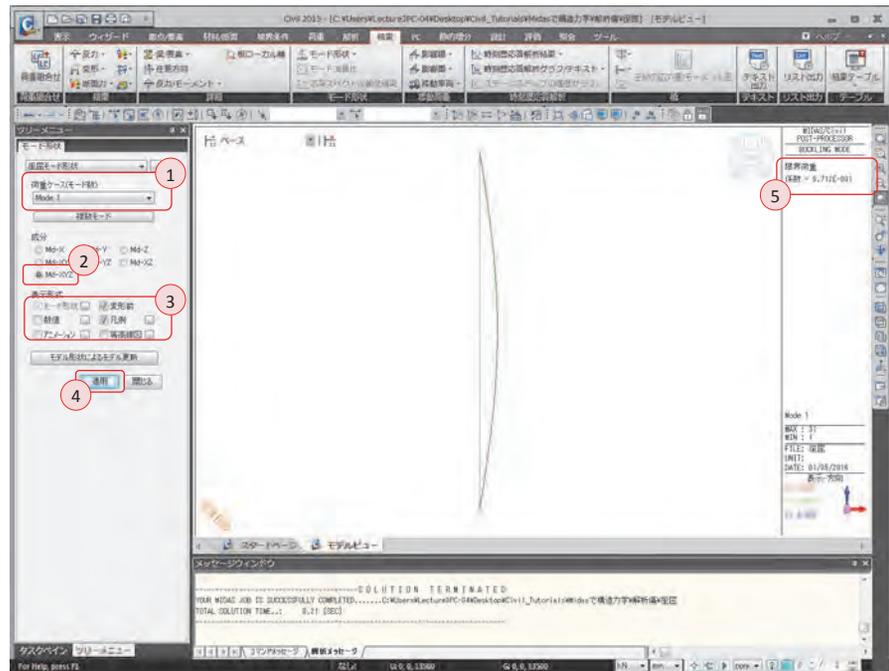
### 02.8.1 座屈モード

上下端の横変位が拘束された場合の座屈モード形状を確認する。

メインメニュー [結果] > [モード形状] > [モード形状▼] > [座屈モード形状]

1. 荷重ケース (モード数) > 「Mode1」 選択
2. 成分 > 「Md-XYZ」 選択
3. 表示形式 > 変形前、凡例 (チェックオン)
4. [適用] クリック
5. 限界荷重係数 = 5.712E-001 を確認

▶ 図 4.15  
座屈モード形状



02.8.2 臨界荷重の  
計算

臨界荷重を計算するための固有値の結果を確認する。

メインメニュー [結果] > [テーブル] > [結果テーブル▼] > [座屈モード形状]

1. 座屈モード > モード 1~5 (チェックオン)
2. [OK] クリック
3. 固有値を確認

▶ 図 4.16  
固有値の結果

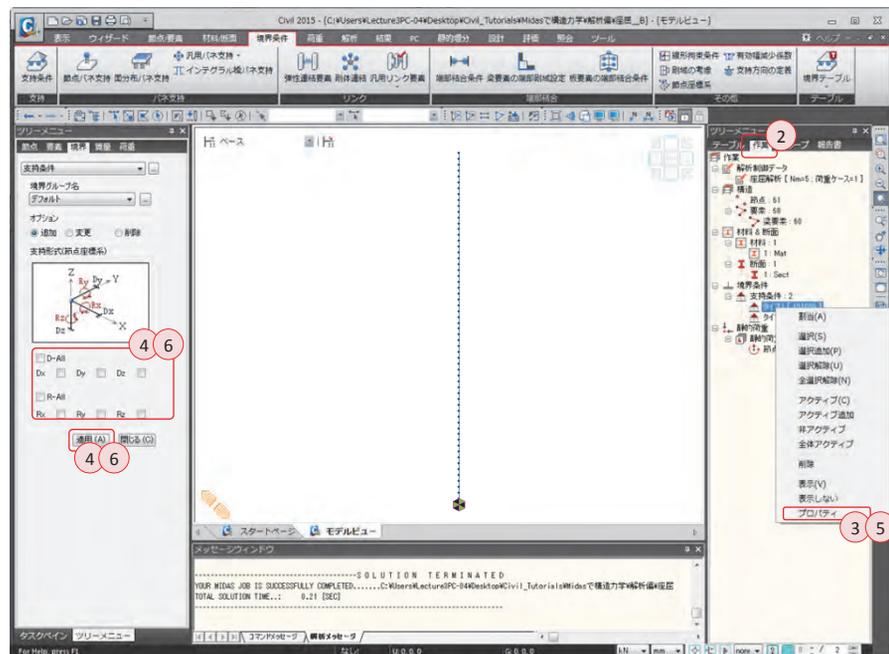
節点	モード	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
<b>座屈解析</b>							
	モード	固有値	許容誤差				
	1	0.571158	0.0000e+000				
	2	2.284631	5.6571e-016				
	3	5.140423	6.6637e-014				
	4	9.138547	2.9183e-013				
	5	14.279034	8.6789e-013				
<b>座屈ベクトル</b>							
▶	1	1	0.000000	0.000000	0.000000	0.004832	0.000000
	2	1	0.001207	0.000000	0.000000	0.004825	0.000000
	3	1	0.002411	0.000000	0.000000	0.004805	0.000000
	4	1	0.003609	0.000000	0.000000	0.004772	0.000000
	5	1	0.004796	0.000000	0.000000	0.004726	0.000000
	6	1	0.006371	0.000000	0.000000	0.004667	0.000000
	7	1	0.007129	0.000000	0.000000	0.004695	0.000000
	8	1	0.008267	0.000000	0.000000	0.004611	0.000000
	9	1	0.009383	0.000000	0.000000	0.004414	0.000000
	10	1	0.010473	0.000000	0.000000		
	11	1	0.011535	0.000000	0.000000		
	12	1	0.012564	0.000000	0.000000		
	13	1	0.013560	0.000000	0.000000		
	14	1	0.014518	0.000000	0.000000		

02.8.3 境界条件による結果の比較 横変位が拘束されていない場合と比較するため、ファイルを別の名前で保存し、部材の上端の節点 61 の境界条件を自由端に変更する。

メインメニュー  /名前を付けて保存

1. ファイル名：“座屈\_B”と入力し、[保存]をクリック
2. ツリーメニュー > 作業タブをクリック
3. 作業 > 境界条件 > 支持条件：2 > タイプ 1 > マウス右ボタンでプロパティ選択
4. 支持形式 > Dx, Dz, Ry (チェックオン)、[適用]クリック、[閉じる]クリック
5. 作業 > 境界条件 > 支持条件：2 > タイプ 2 > マウス右ボタンでプロパティ選択
6. 支持形式 > 全てチェックオフ、[適用]クリック

▶ 図 4.17  
境界条件の修正

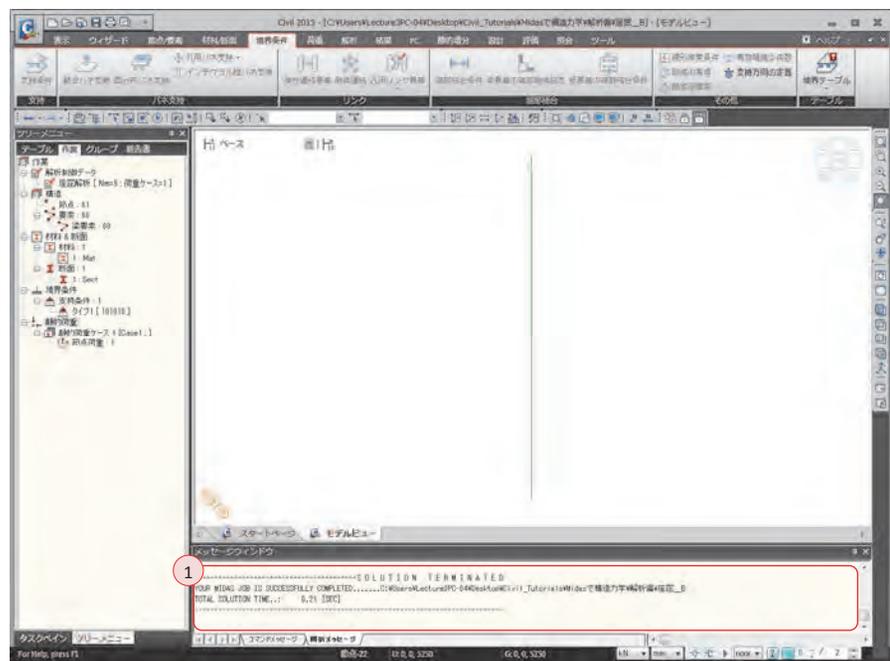


変更した境界条件で座屈解析を実行し、臨界荷重を確認する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

▶ 図 4.18  
解析の正常終了



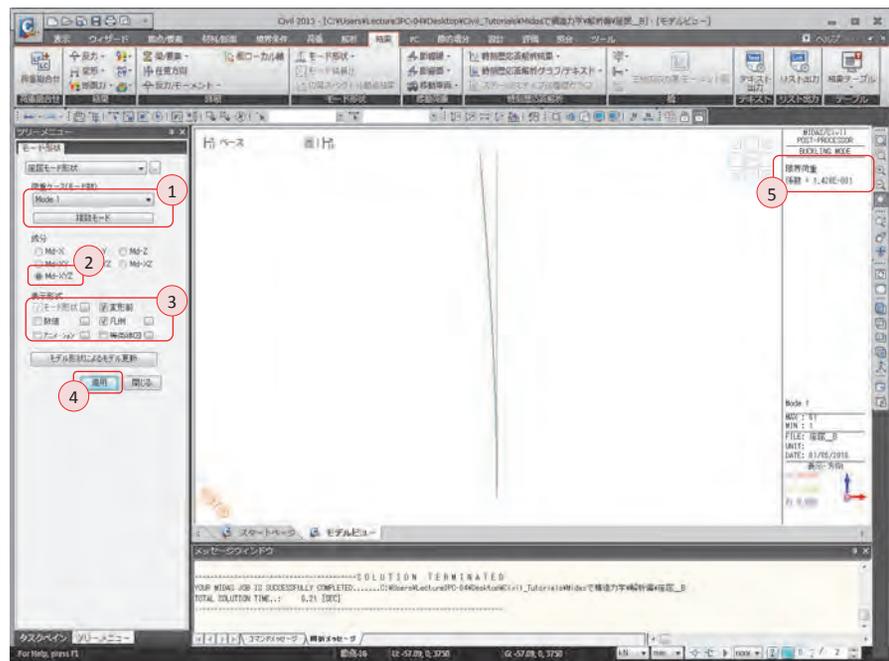
02.8.4 座屈モード

上端の横変位が拘束されていない場合の座屈モード形状を確認する。

メインメニュー [結果] > [モード形状] > [モード形状▼] > [座屈モード形状]

1. 荷重ケース (モード数) > 「Mode1」 選択
2. 成分 > 「Md-XYZ」 選択
3. 表示形式 > 変形前、凡例 (チェックオン)
4. [適用] クリック
5. 限界荷重係数 = 1.428E-001 を確認

▶ 図 4.19  
座屈モード形状



02.8.5 臨界荷重の  
計算

臨界荷重を計算するための固有値の結果を確認する。

メインメニュー [結果] > [テーブル] > [結果テーブル▼] > [座屈モード形状]

1. 座屈モード > モード 1~5 (チェックオン)
2. [OK] クリック
3. 固有値を確認

▶ 図 4.20  
固有値の結果

節点	モード	LX	UY	UZ	RX	RY	RZ
<b>座屈解析</b>							
	モード	固有値	許容誤差				
	1	0.142789	0.0000e+000				
	2	1.285105	1.0244e-017				
	3	3.569737	6.8066e-015				
	4	6.396692	8.3831e-014				
	5	11.565992	3.6694e-013				
<b>座屈ベクトル</b>							
▶	1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	2	-0.000032	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000253	0.000000
	3	-0.000126	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000506	0.000000
	4	-0.000284	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000758	0.000000
	5	-0.000506	0.000000	0.000000	0.000000	-0.001010	0.000000
	6	-0.000789	0.000000	0.000000	0.000000	-0.001261	0.000000
	7	-0.001136	0.000000	0.000000	0.000000	-0.001512	0.000000
	8	-0.001545	0.000000	0.000000	0.000000	-0.001761	0.000000
	9	-0.002016	0.000000				
	10	-0.002550	0.000000				
	11	-0.003144	0.000000				
	12	-0.003800	0.000000				
	13	-0.004516	0.000000				
	14	-0.005293	0.000000				
	15	-0.006129	0.000000				
	16	-0.007024	0.000000				
	17	-0.007978	0.000000				
	18	-0.008989	0.000000				

フィルタリングダイアログ

節点/要素:

Node: Ito61

選択タイプ:

トラス要素  
梁要素  
平面応力要素  
板要素  
平面応力要素  
軸対称要素  
ソリッド要素

座屈モード

モード 1

モード 2

モード 3

モード 4

モード 5

## 03. 構造計算の解説

### 03.1 力学的概念の理解及び数値計算

例題での構造物は端部がヒンジであるため、1章の式 1.1 から次のような式が成り立つ。

▶式 4.10

$$w'' + \frac{P}{EI}w = 0$$

微分方程式の解である  $w$  の形状は次のように仮定される。

▶式 4.11

$$w(x) = A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

微分方程式に  $w(x)$  を代入し、境界条件 ( $w(0) = 0$ ,  $w(\ell) = 0$ ) を適用すると、最終的に次のような結果が得られる。

▶式 4.12

$$\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\ell\right) = 0 \quad \text{または、} \quad \sqrt{\frac{P}{EI}}\ell = n\pi$$

従って、座屈荷重は次のように求められる。

▶式 4.13

$$P_{cr} = n^2 \frac{\pi^2 EI}{(k\ell)^2}$$

ここで  $k$  は変形形状を表す係数で、横変位が拘束されている単純支持の形状は  $k = 1.0$ 、横変位が拘束されていない片持ち梁の形状は  $k = 2.0$  である。また、 $k = 1.0$  かつ、 $n = 1$  の場合の座屈荷重をオイラー荷重とも呼ぶ。解析結果と比較するため、座屈荷重を固有値で表すと次のようになる。

▶式 4.14

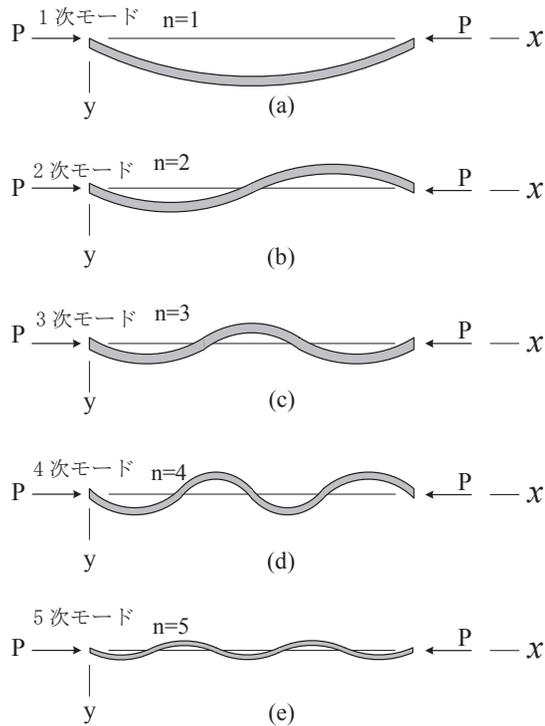
$$\text{固有値} = \frac{P_{cr}}{\text{作用荷重}} = \frac{P_{cr}}{10\text{kN}}$$

次の表は以上のような方法により得られた値と解析結果を比較してまとめたものである。

▶表 4.2  
数値計算による結果の比較

	n	k	座屈荷重 (kN)	固有値	臨界荷重係数
横変位-拘束あり	1	1	5.7116	0.57116	0.57120
	2	1	22.8463	2.28463	2.28464
	3	1	51.4042	5.14042	5.14045
	4	1	91.3852	9.13855	9.13859
	5	1	142.7903	14.27903	14.27911
横変位-拘束なし	1	2	1.4279	0.14279	0.14279

▶図 4.21  
座屈解析の結果



ここでは、P-デルタ解析による方法で座屈解析を行い、その結果を比較する。2章の式2.4に境界条件を適用すると次のようになる。

▶式 4.15

$$\lambda = -\frac{P\ell^2}{30EI}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} + \lambda \frac{EI}{\ell^2} \begin{bmatrix} \frac{36}{\ell} & 3 \\ 3 & 4\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12+36\lambda & 6\ell+3\ell\lambda \\ 6\ell+3\ell\lambda & 4\ell^2+4\ell^2\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

右の項が0になるためには、行列式が0にならない。

$$\lambda = -0.08287 = -\frac{P\ell^2}{30EI}$$

$$P_{cr} = 2.4861 \frac{EI}{\ell^2} \quad \left( \text{厳密解} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{(kL)^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = 2.4674 \frac{EI}{L^2} \right)$$

以上のように、オイラー荷重と比べ違う結果が得られた理由は、座屈変形の形状に対する仮定が異なるためである。すなわち、オイラー荷重は変形を三角関数（sin関数）と仮定する一方で、P-デルタ解析による座屈解析では変形形状を3次関数として仮定する。オイラー荷重よりP-デルタ解析の仮定による値が大きいことから、sin関数が3次式よりエネルギーの消耗が少ない変形形状であるといえる。

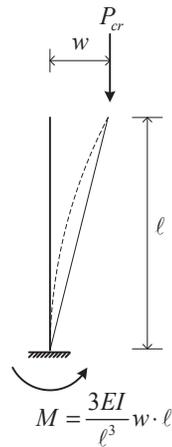
座屈解析でP-δ効果を見逃したP-Δ効果のみを考慮する場合は、トラス要素に対するP-Δ効果の式を用いることができる。図4.3で、横変位wが発生した際の横反力の大きさは3EI/ℓ³となるため、座屈が発生する際のモーメントに対する釣り合い方程式は次のように表せる。

▶式 4.16 
$$\left(\frac{3EI}{\ell^3}w\right)\ell - P_{cr}w = 0 \quad \therefore \left[\frac{3EI}{\ell^2} - P_{cr}\right]w = 0$$

上の式が 0 になるためには座屈荷重が次のようにならなければならない。

$$\frac{3EI}{\ell^2} - P_{cr} = 0 \quad \therefore P_{cr} = 3.0 \frac{EI}{\ell^2}$$

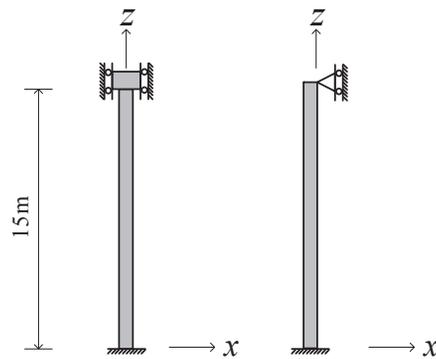
▶図 4.22  
座屈解析



座屈解析で P- $\delta$  効果を見逃し P- $\Delta$  効果のみを考慮した場合にも、約 21.5%の誤差で座屈荷重が予測できることが分かる。

## 04.練習問題

1. 下図のような境界条件を持つ柱部材の座屈モード形状と臨界荷重を求めなさい。



- **材料**  
弾性係数：100N/mm<sup>2</sup>
- **断面**  
断面形状：長方形  
断面寸法：B×H = 1000mm×250mm
- **荷重**  
上端の節点に下向きの節点荷重 10kN を載荷



# 5.

# 固有値 解析

## TABLE OF CONTENTS

### 01 概念の理解

---

01.1 固有値解析の概念	5-1
---------------	-----

### 02 チュートリアル

---

02.1 モデルの概要	5-4
02.2 作業環境の設定	5-5
02.3 材料及び断面の定義	5-7
02.4 節点及び要素の生成	5-8
02.5 境界条件の入力	5-10
02.6 解析条件の入力	5-11
02.7 構造解析の実行	5-12
02.8 解析結果の確認	5-13

### 03 構造計算の解説

---

03.1 力学的概念の理解 及び数値計算	5-21
-------------------------	------

04 練習問題	5-24
---------	------

---



## 01.概念の理解

### 01.1 固有値解析の概念

#### 01.1.1 一般事項

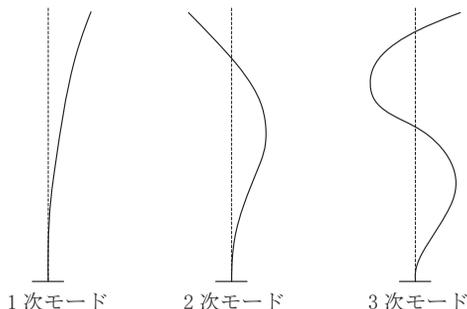
固有値解析は構造物固有の動的特性を分析する際に適用され、自由振動解析 (Free vibration analysis) とも言う。これは構造物の動的特性を表す指標である固有振動数及びモード形状を計算する方法で、Civil では固有ベクトルとリッツベクトル解析の2種類の方法を支援している。2種類の方法と共に構造物の固有値問題に対する特性方程式を構成し、その解を求める点では共通しているが、後者の方法はユーザーが設定した荷重の方向と関連する固有モードを求めるため、固有ベクトル解析と比べ、より効率的なことで知られている。

固有値解析を通して求められる構造物の主な動的特性としては、固有モード (または、モード形状)、固有周期 (または、固有振動数) そして、モード刺激係数 (modal participation factor) などがあり、これらは構造物の質量と剛性により決定される。

固有モードは構造物が自由振動 (または、変形) できる一種の固有形状であり、与えられた形に変形させるための必要なエネルギー (または、力) が最も小さい場合のモード形状から順番に、1次モード形状 (または、基本振動形状)、2次モード形状、…、 $n$ 次モード形状と呼ぶ。図 5.1 は片持ち梁の振動モードを低い次数から (少ないエネルギーで変形させる形から) 順番に表したものである。

固有周期は固有モードと一対一に対応する固有の数値で、構造物が当該のモード形状で1回自由振動する時間を意味する。

▶ 図 5.1  
均一な断面を持つ片持ち梁の  
固有モード



一般の耐震設計の規準では解析に含まれるモード別の有効質量 (effective modal mass) の総和が全体質量の 90%以上となることが求められている。これは、解析の結果に影響を及ぼすほとんどの主要モードを含むためである。

01.1.2 解析の概念

固有値は 1 章の式 1.6 から解が求められる。すなわち、図 1.3 において荷重の項がない場合に対し、力の釣り合い条件を適用することで解が求められる。

▶式 5.1

$$EIw'''' + m\ddot{w} = 0$$

上の式は固有値解析のための式であるため、荷重の項が含まれていない。そのため、固有値解析は数学的な面からすると、座屈解析と同じである。梁の時間によるたわみ  $w(x, t)$  を距離と時間の関数で分離すると、 $w(x, t) = \phi(x)Y(t)$  となり、微分方程式は次のようになる。

▶式 5.2

$$\frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} + \frac{m}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0$$

ここで、 $\phi(x)$  は固有モードの形状を意味し、 $Y(t)$  は時間の関数で、これにより固有周期などが算定できる。式 5.2 を満たすためにはそれぞれの項が定数にならなければならないため、次のように仮定できる。

▶式 5.3

$$\frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} \equiv a^4, \quad -\frac{m}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} \equiv a^4$$

それぞれの微分方程式は次のように表せる。

▶式 5.4

$$\phi''''(x) - a^4\phi(x) = 0$$

▶式 5.5

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad \text{ここで、} \quad \omega \equiv a^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \text{または} \quad a^2 = \omega \sqrt{\frac{m}{EI}}$$

上の式 5.4 に対する一般解は次のように表せる。なお、 $A_1$  は境界条件により求められる。

▶式 5.6

$$\phi(x) = A_1 \cos ax + A_2 \sin ax + A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax$$

式 5.5 から  $a$  が得られると、固有モードの形状が分かり、式 5.6 からは固有値である  $\omega$  が算定できる。

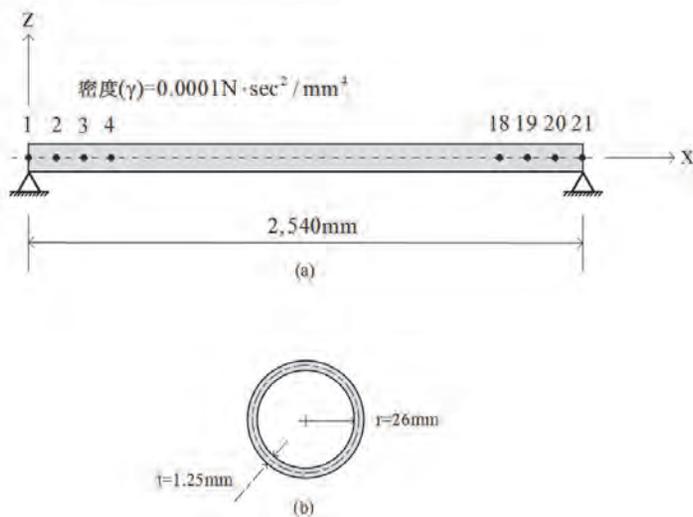
式 5.5 と式 5.6 による固有値の解を求める過程に関しては 3 節の「構造計算の解説」で詳しく説明する。

## 02.チュートリアル

### 02.1 モデルの概要

下図のような単純支持を持つシャフトに対し、固有値解析を行う。シャフトモデルは密度 ( $\gamma$ ) が  $0.0001 \text{ N}\cdot\text{sec}^2/\text{mm}^4$  のモデル 1 と密度 ( $\gamma$ ) が  $0.0002 \text{ N}\cdot\text{sec}^2/\text{mm}^4$  のモデル 2 の 2 種類があり、それぞれの密度 ( $\gamma$ ) の違いによる固有振動数の差を確認する。

▶ 図 5.2  
 (a) 単純支持シャフト  
 (b) 解析モデル



- **材料**  
 弾性係数 :  $2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$
- **断面**  
 断面積 (Area) :  $200 \text{ mm}^2$   
 断面 2 次モーメント ( $I_{yy}$ ) :  $65,000 \text{ mm}^4$   
 半径 (radius) :  $26 \text{ mm}$   
 厚さ (thickness) :  $1.25 \text{ mm}$   
 重力加速度 ( $g$ ) :  $9,806 \text{ mm/sec}^2$

## 02.2 作業環境の設定

### 02.2.1 単位系の設定

新しいプロジェクトを開き、ファイルを保存する。

メインメニュー  >  新規プロジェクト...

メインメニュー  >  保存

1. ファイル名：“固有値解析”と入力し、[保存]をクリック

単位系を設定する。

メインメニュー [ツール] > [セッティング] > [単位系]

2. 長さ > 「mm」、力 > 「N(kg)」を選択

3. [OK]をクリック

▶ 図 4.5

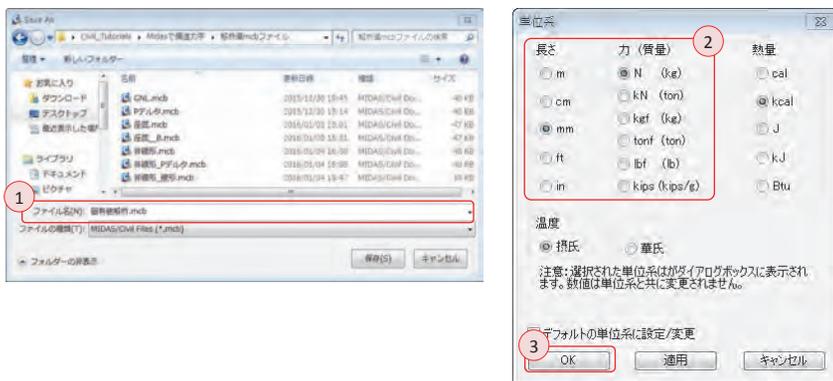
(a) ファイルの保存

(b) 単位系の設定



Tip

単位系の設定は画面下のステータスバーでも簡単に操作できる。



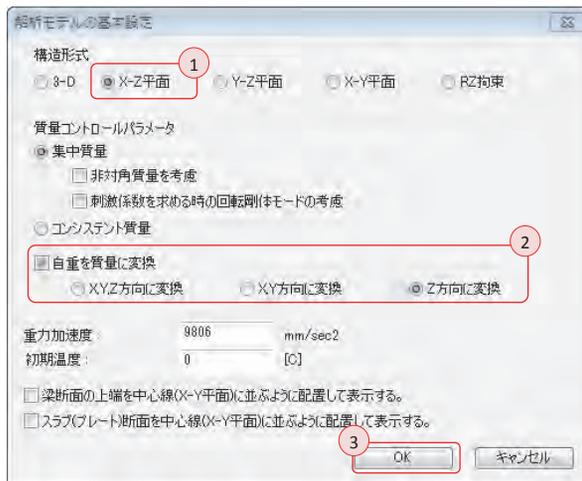
### 02.2.2 作業平面の 設定

解析モデルは平面(X-Z 平面)構造であるため、構造形式を X-Z 平面内で挙動するように指定する。また、自重が節点質量に自動的に置換されるように設定する。

メインメニュー [ウィザード] > [基本設定] > **[基本設定]**

1. 構造形式 > 「X-Z 平面」を選択
2. 「自重を質量に変換」選択 > 「Z 方向に変換」選択
3. [OK]をクリック

▶ 図 5.4  
作業平面の設定



## 02.3 材料及び断面の定義

モデルに使用する材料及び断面は解析の便宜上、ユーザーが直接数値を入力する「ユーザー定義」及び「値入力」機能を利用する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > [材料特性]

1. [追加...]クリック、名称：“Mat” 入力
2. 弾性データ > タイプ > 「ユーザー定義」選択
3. ユーザー定義 > 弾性係数：“2.0e5” 入力  
 > 比重：“0.0001” 入力、[OK]クリック
4. 断面タブをクリック、[追加]クリック、値入力タブをクリック
5. 断面形状 > 「パイプ断面」選択、名称：“Sect” 入力
6. サイズ > D：“52”、tw：“1.25” 入力、  
 断面性能 > Area：“2.0e2”、Iyy：“6.5e4” 入力
7. せん断変形を考慮する (チェックオフ)
8. [OK]クリック、[閉じる]クリック

▶ 図 5.5

- (a) 材料の定義  
(b) 断面の定義



断面寸法を入力した後、[断面性能の計算]をクリックすると、当該断面の性能を自動的に計算する。



## 02.4 節点及び要素の生成

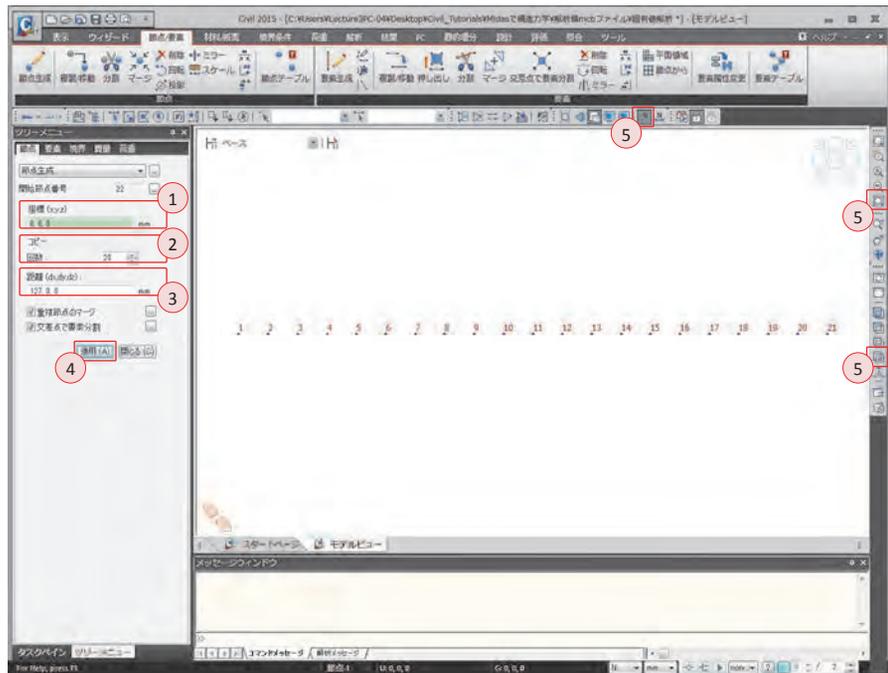
### 02.4.1 節点の生成

要素を生成する位置に節点を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > **[節点生成]**

1. 座標 (x, y, z) : “0, 0, 0” 入力
2. コピーの回数 : “20” 入力
3. 距離(dx, dy, dz) : “127, 0, 0” 入力
4. [適用] クリック
5. 節点番号、自動フィット、正面 (トグルオン)

▶ 図 5.6  
節点の生成



### 02.4.2 要素の生成

節点を連結し要素を生成する。

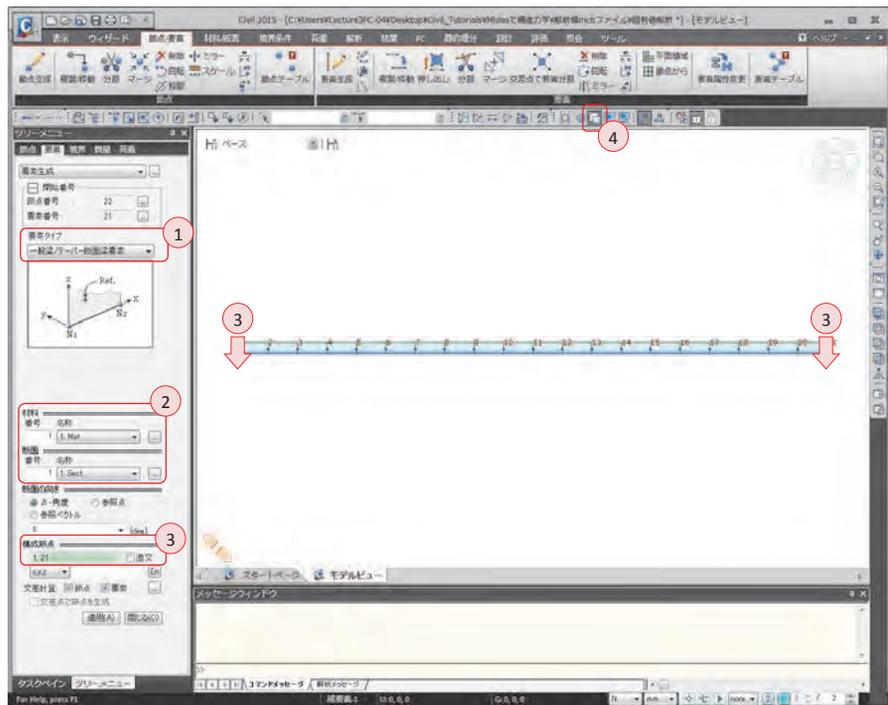
メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [要素生成]

1. 要素タイプ > 「一般梁/テーパ断面梁要素」を選択
2. 材料 > 「1:Mat」を選択、断面 > 「1:Sect」を選択
3. 構成節点の入力ボックス内をクリックし、節点 1 と節点 21 を順番にクリック
4. 隠線除去表示 (トグルオン)

図 5.7  
要素の生成

#### Tip

1 つの部材を複数の要素に分割してモデリングすると部材の詳細な変形結果が確認できる。



## 02.5 境界条件の入力

本チュートリアルでは X-Z 平面に関する挙動のみを許容しているため、ピン支持は  $D_x$ 、 $D_z$  の自由度を拘束し、ローラー支持は  $D_z$  の自由度のみ拘束する。

### 1. 隠線除去表示 (トグルオフ)

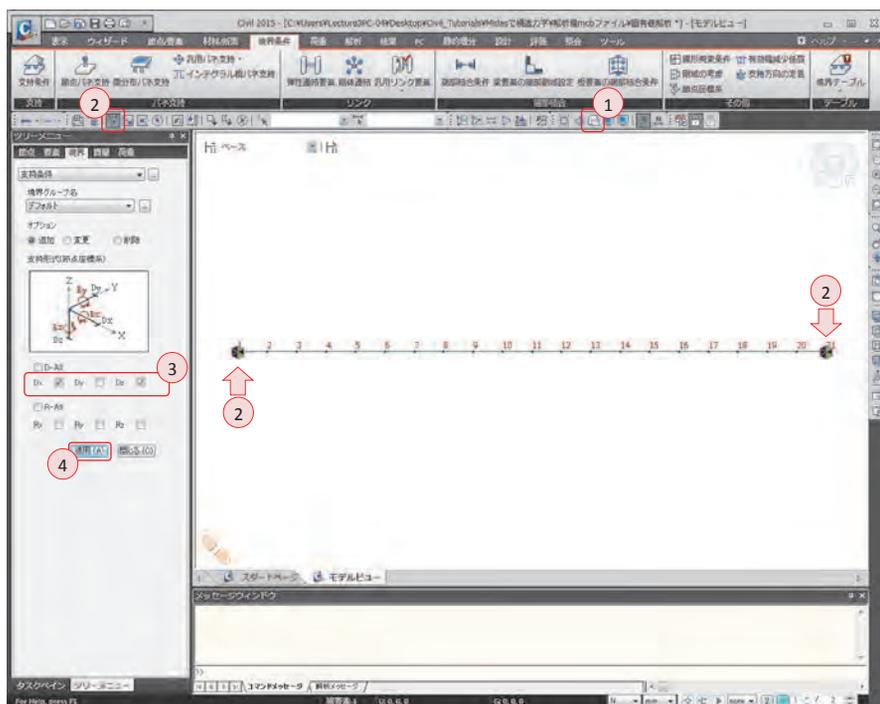
メインメニュー [境界条件] > [支持] > **[支持条件]**

2. **単一選択**で**節点 1**と**節点 21**を選択

3. 支持形式 >  $D_x$ 、 $D_z$  (チェックオン)

4. **[適用]**クリック

▶ 図 5.8  
支持条件の入力



## 02.6 解析条件の入力

### 02.6.1 固有値の入力

固有値解析のための解析データを入力する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > **[固有値解析]**

1. 解析タイプ > 「固有ベクトル」選択 > 「Subspace Iteration」選択
2. 固有ベクトル > 解析するモード数: “6”入力
3. 固有値制御データ > 繰り返し回数 : “20”入力  
> 負空間次元 : “0”入力  
> 収束判定値 : “1e-006”入力
4. [OK]クリック

▶ 図 5.9  
固有値解析データの入力



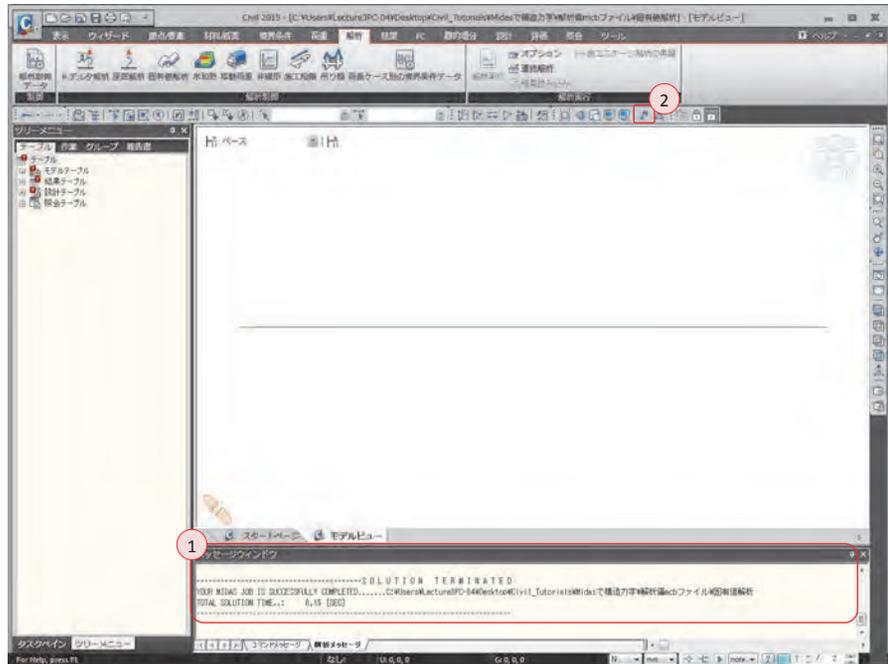
## 02.7 構造解析の実行

モデルの生成及び固有値解析のデータを入力した後、解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認
2. 節点番号 (トグルオフ)

▶ 図 5.10  
解析の正常終了のメッセージ



## 02.8 解析結果の確認

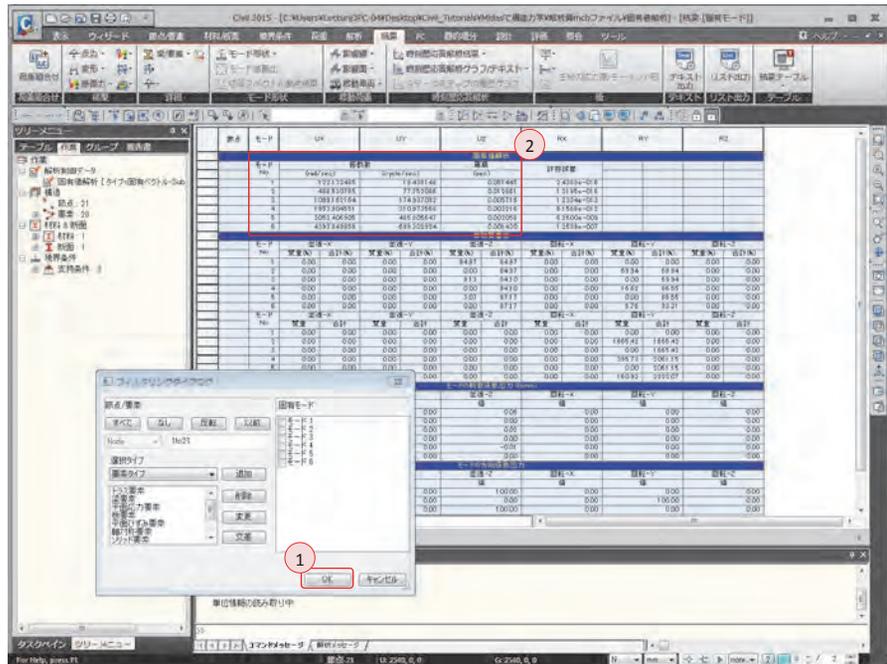
### 02.8.1 固有値解析 結果の確認

本チュートリアルでは結果テーブルで固有値解析の結果を確認する。固有振動数は構造物に外力と減衰が作用しない状態で構造物の剛性と質量により発生する自由振動の振動数を言う。これは構造物が持つ固有の動的特性であり、構造物の動的挙動を判断する指標である。

メインメニュー [結果] > [テーブル] > [結果テーブル▼] > **[固有モード形状]**

1. **[OK]** クリック
2. モード別の周期などの固有値の結果を確認

▶ 図 5.11  
固有値解析の結果テーブル



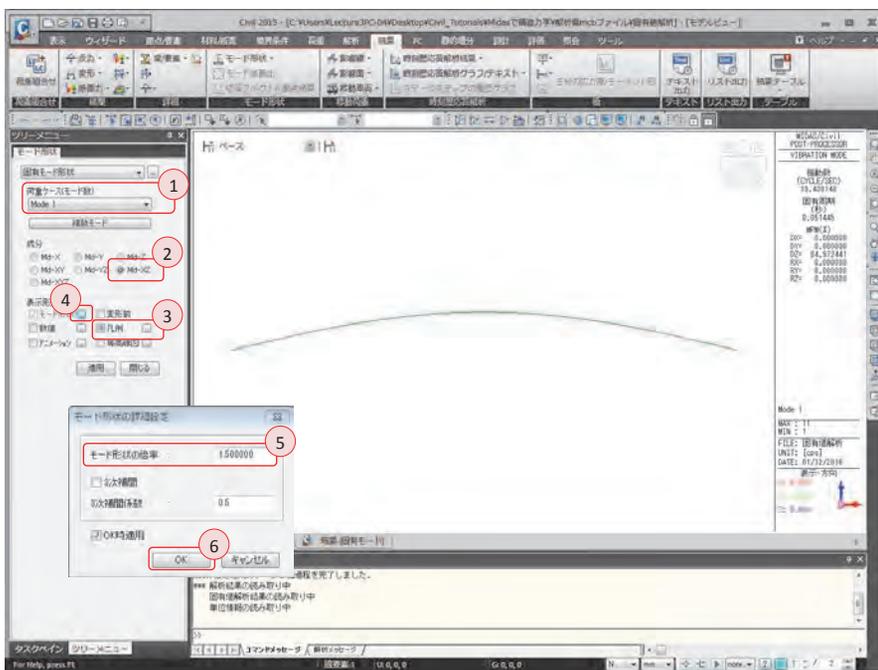
02.8.2 モード形状の確認  
1次モードに対するモード形状 (mode shape) 及び固有振動数を確認する。

モデルビュータブをクリック

メインメニュー [結果] > [モード形状] > [モード形状▼] > [固有モード形状]

1. 荷重ケース (モード数) > 「Mode 1」選択
2. 成分 > 「Md-XZ」選択
3. 表示形式 > 凡例 (チェックオン)
4. モード形状の  をクリック
5. モード形状の倍率: “1.5” 入力
6. [OK] クリック

▶ 図 5.12  
1次モード形状

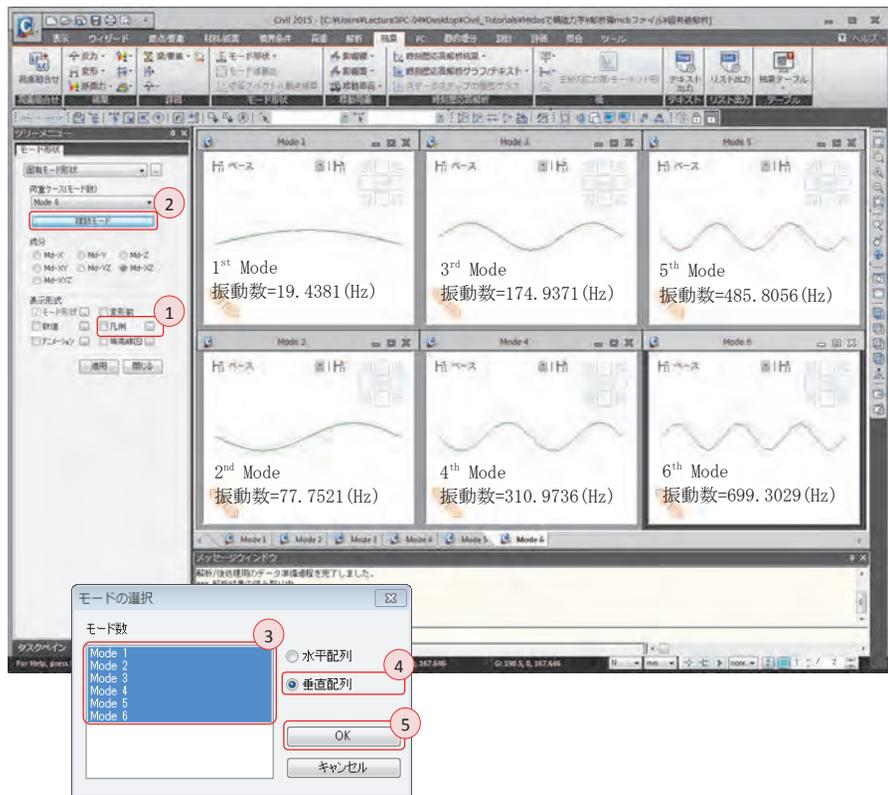


02.8.3 モード別の結果の確認  
複数のモード形状を同時に確認する。

メインメニュー [結果] > [モード形状] > [モード形状▼] > [固有モード形状]

1. 表示形式 > 凡例 (チェックオフ)
2. [複数モード] クリック
3. モード数 > 「Mode 1」 ~ 「Mode 6」 選択 (Shift キーを利用)
4. [垂直配列] 選択
5. [OK] クリック

▶ 図 5.13  
1~6 次モード形状  
(6 つのモード別の結果ウィンドウを  
正面ビューに設定し整列)



02.8.4 モデル2の  
生成

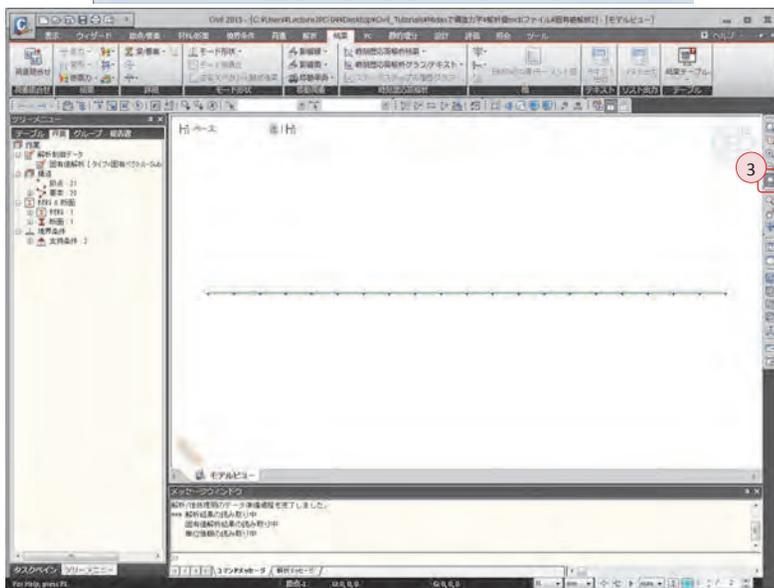
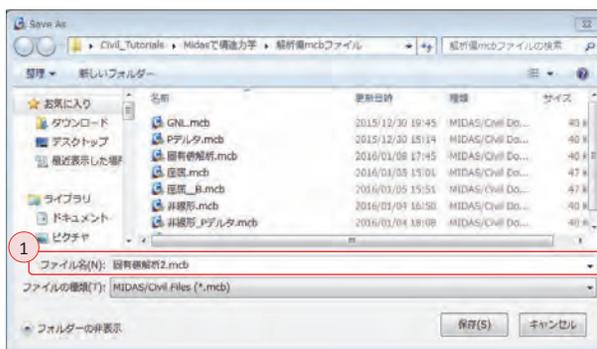
モデル2を生成するため、新しい名前でもファイルを保存する。

メインメニュー  > **名前を付けて保存...**

1. ファイル名：“固有値解析2”と入力し、[保存]をクリック
2. モデルビュー以外のウィンドウを閉じ、 全体表示をクリック
3. **ズームフィット** (トグルオン)

▶ 図 5.14

モデル2のファイル保存



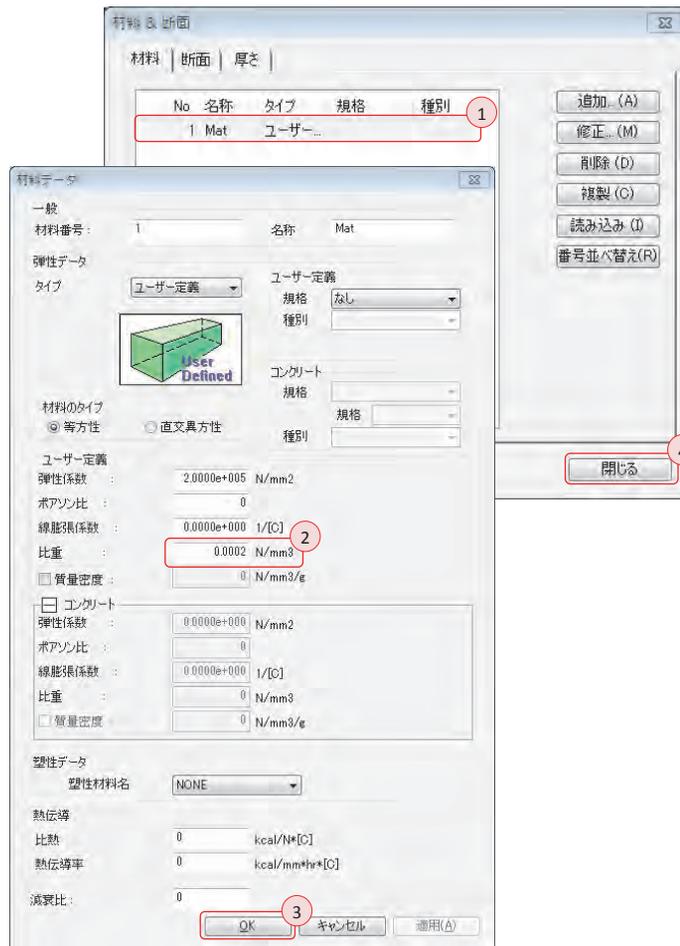
### 02.8.5 材料情報の 変更

既に入力されている材料の比重を 0.0002 に変更する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料特性] > [材料特性]

1. 材料No.1の **Mat** をダブルクリック
2. 比重：“0.0002” 入力
3. [OK] クリック
4. [閉じる]クリック

▶ 図 5.15  
材料情報の変更



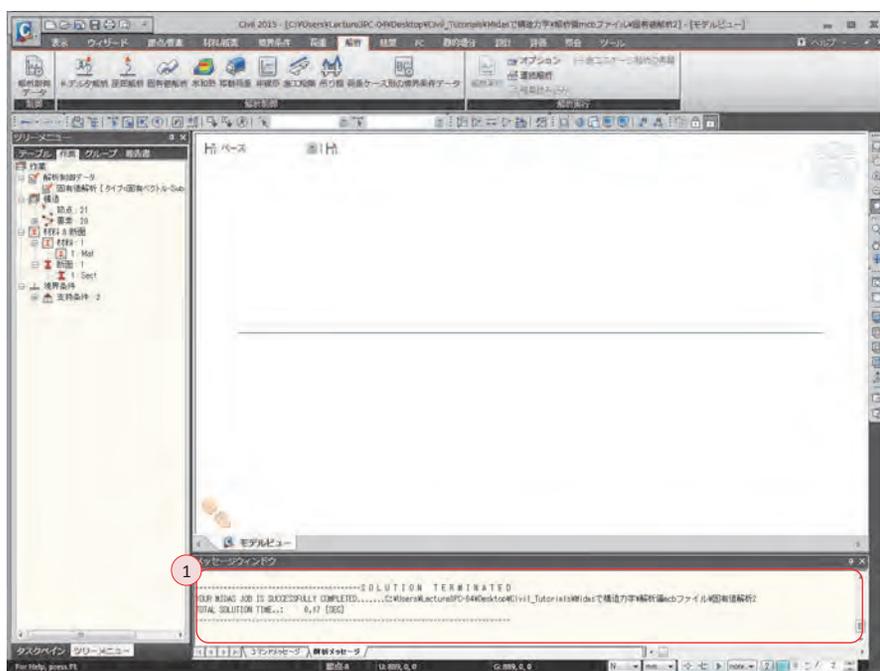
### 02.8.5 構造解析の 実行

モデル 2 の構造解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

▶ 図 5.16  
解析の正常終了のメッセージ



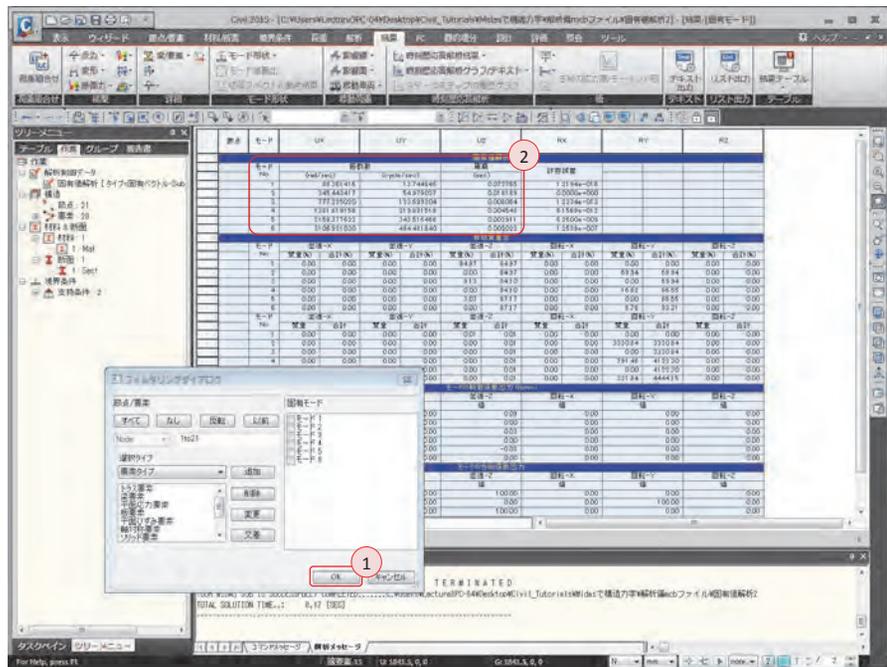
02.8.7 固有値解析  
結果の確認

モード別の固有値の結果をテーブルで確認する。

メインメニュー [結果] > [テーブル] > [結果テーブル▼] > [固有モード形状]

1. [OK]クリック
2. モード別の周期などの固有値の結果を確認

▶ 図 5.17  
固有値解析の結果テーブル



02.8.8 モード別の  
結果の確認

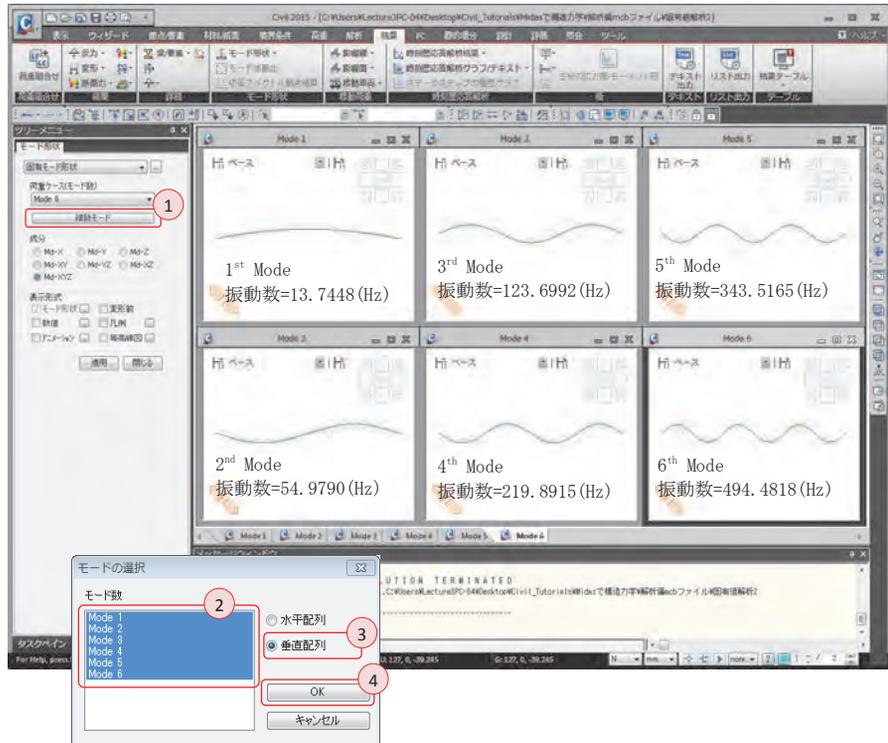
複数のモード形状 (mode shape) を同時に確認する。

モデルビュータブをクリック

メインメニュー [結果] > [モード形状] > [モード形状▼] > [固有モード形状]

1. 表示形式 > 凡例 (チェックオフ)
2. [複数モード] クリック
3. モード数 > 「Mode 1」 ~ 「Mode 6」 選択 (Shift キーを利用)
4. [垂直配列] 選択
5. [OK] クリック

▶ 図 5.18  
1~6 次モード形状  
(6つのモード別の結果ウィンドウ  
を正面ビューに設定し整列)



## 03. 構造計算の解説

### 03.1 力学的概念の理解及び数値計算

単純梁は端部で変位とモーメントが0になるため、式5.6に次のような境界条件が適用できる。

▶式 5.7 
$$\phi(0) = 0, \quad EI\phi''(0) = 0, \quad \phi(\ell) = 0, \quad EI\phi''(\ell) = 0$$

その結果として次のような解が得られる。

▶式 5.8 
$$\sin a\ell = 0$$

sin 関数が0となる条件は、 $a = \frac{n\pi}{\ell}$  であるため、式5.4から固有値の解は次のように算定できる。

▶式 5.9 
$$\omega = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (\text{単位} = \text{rad/sec})$$

式5.9から得られる $\omega$ は角速度といい、振動数 $f$ 及び周期 $T$ との関係は次の通りである。

▶式 5.10 
$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{単位} = \text{rad/sec}), \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{単位} = \text{sec})$$

ここで、 $n$ はモード番号、 $m$ は単位長さ当たりの質量を表す。ここで、密度が単位体積に対する重量の比として与えられたため、質量密度（単位体積当たり質量）に換算すると、次のようになる。

モデル1の場合（密度=0.0001N/mm<sup>3</sup>）

▶式 5.11 
$$\gamma = \frac{1.0 \times 10^{-4} \text{ N/mm}^3}{g} = \frac{1.0 \times 10^{-4} \text{ N/mm}^3}{9806 \text{ mm/sec}^2} = 1.01978 \times 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{sec}^2/\text{mm}^4$$

したがって、

$$m = 1.01978 \times 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{sec}^2 / \text{mm}^4 \times 200 \text{ mm}^2 = 2.03957 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{sec}^2 / \text{mm}^2$$

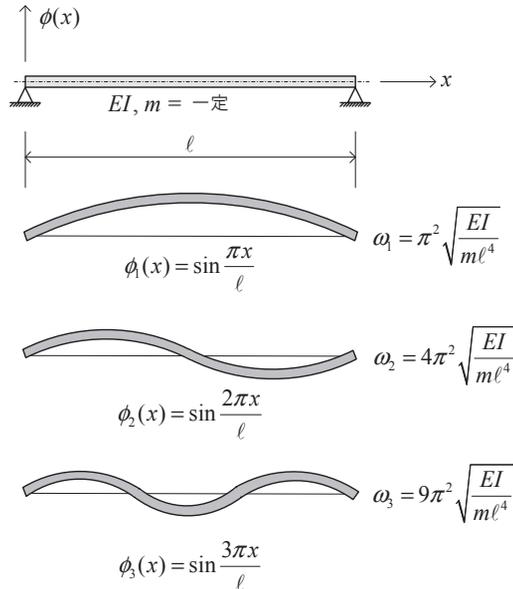
2 つのモデルの固有振動数  $f$  に対する数値計算と Civil 解析の結果を比較してまとめたのが表 5.1 である。なお、モード形状は図 5.19 に示す。

[単位: Hz]

▶表 5.1  
 解析結果の比較

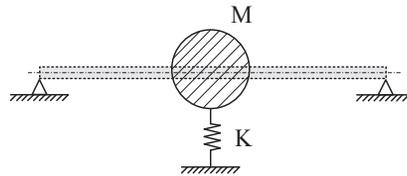
	モデル 1		モデル 2	
	数値計算	Civil	数値計算	Civil
1 次モード	19.4382	19.4381	13.7449	13.7448
2 次モード	77.7526	77.7521	54.9794	54.9790
3 次モード	174.9434	174.9371	123.7037	123.6992
4 次モード	311.0105	310.9736	219.9176	219.8915
5 次モード	485.9539	485.8056	343.6213	343.5165
6 次モード	699.7736	699.3029	494.8147	494.4818

▶ 図 5.19  
 モード別の固有値



固有値解析を通して求められた固有値の意味を考察するため、対象となる構造物を図 5.20 のように単純化したモデルを想定しよう。

▶ 図 5.20  
固有値解析の単純化モデル



単純化モデルにおいて、梁の質量は中央に集中するようにし、梁の曲げ変形に対する垂直方向の剛性をバネに置き換えた。バネの剛性は梁の中央部で単位たわみ（たわみが 1.0）を発生させる集中荷重の大きさとして仮定した。従って、梁の質量とバネの剛性は次のように表せる。

▶ 式 5.12

$$M = \frac{m\ell}{2}, \quad K = \frac{48EI}{\ell^3}$$

また、バネの変形を  $Y$  とし、釣り合い方程式を適用すると次のようになる。

▶ 式 5.13

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y = 0$$

ここで、 $\omega^2 = K/M$  であるため、式 5.13 は式 5.5 と類似する形態であることが分かる。従って、単純化モデルに対する 1 次モードの角速度は式 5.14 のように計算できる。

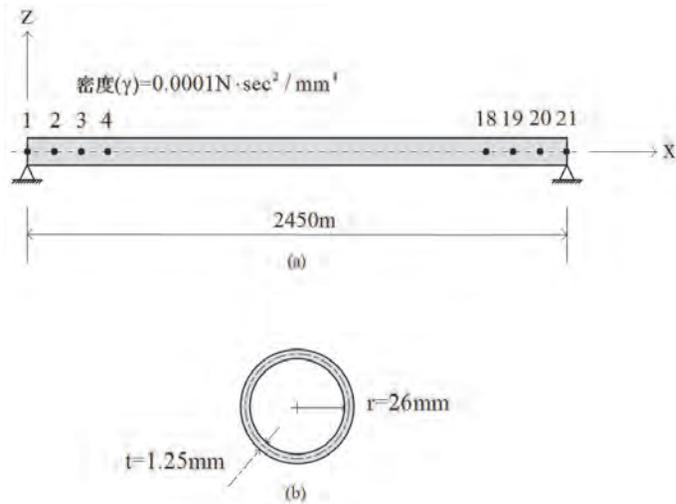
▶ 式 5.14

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{48EI/\ell^3}{m\ell/2}} = \left(\frac{3.13}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

単純化モデルによる 1 次モードの固有値を、式 5.9 で  $n = 1.0$  の場合に対する値と比較すると、かなり正確な値が得られることが分かる。

## 04.練習問題

1. 下図のように単純支持を持つシャフトを、同じ条件の下、弾性係数のみ変更し（モデル1：変更前、モデル2：変更後）、固有値解析の結果を比較しなさい。



➤ **材料**

弾性係数：モデル1 =  $2.0 \times 10^5$  N/ mm<sup>2</sup>

モデル2 =  $4.0 \times 10^5$  N/ mm<sup>2</sup>

➤ **断面**

断面積 (Area) : 200mm<sup>2</sup>

断面2次モーメント ( $I_{yy}$ ) : 65,000mm<sup>4</sup>

半径(radius) : 26mm

厚さ(thickness) : 1.25mm

重力加速度 (g) : 9,806mm/sec<sup>2</sup>

# 6.

# 時刻歴 解析

## TABLE OF CONTENTS

### 01 概念の理解

---

01.1 時刻歴解析の概念 6-1

### 02 チュートリアル

---

02.1 モデルの概要 6-6

02.2 作業環境の設定 6-7

02.3 材料及び断面の定義 6-9

02.4 節点及び要素の生成 6-10

02.5 境界条件の入力 6-12

02.6 荷重の入力 6-13

02.7 構造解析の実行 6-18

02.8 解析結果の確認 6-19

### 03 構造計算の解説

---

03.1 力学的概念の理解  
及び数値計算 6-31

04 練習問題 6-37

---



## 01.概念の理解

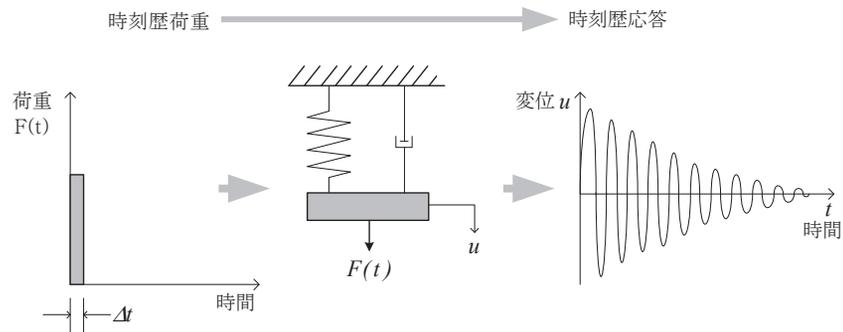
### 01.1 時刻歴解析の概念

#### 01.1.1 一般事項

物体が外力を受け時間の経過とともに運動する場合は、周期的な運動から全く不規則的な運動まで多様なケースが考えられる。しかし、周波数の側面からすると、周期的な反応 (periodic response) は 1 つの振動数を持つ動応答である反面、不規則的な挙動は無数の周期的反応の組み合わせとして捉えることもできる。この場合、どの振動数を持つ反応が支配的であるかは、外部からの動荷重の振動数および大きさ、また物体の特性などにより判断できる。

一方、物体の動的挙動は時間的側面と周波数的側面から分析が可能であり、前者を時刻歴応答解析、後者を周波数応答解析 (frequency response analysis) と呼ぶ。前者の解析法が、どの時点で最大応答が発生するか、または、時間の経過により挙動はどう変化するかなどを調べる方法であるとするれば、後者は物体がどの周波数に対し敏感に反応するか、または、共振現象が発生するかなどを調べる方法である。このような特性から、2 種類の方法を一緒に適用して解析を行うのが一般的である。

▶図 6.1  
時刻歴解析



#### 01.1.2 解析の概念

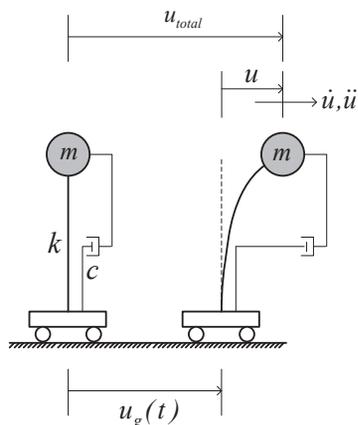
▶式 6.1

地盤の運動に対する 1 自由度システムの運動方程式 (微分方程式) は次のようになり、式 1.7 と類似する形であることが確認できる。

$$m(\ddot{u}_g + \ddot{u}) + c\dot{u} + ku = 0 \quad \text{または、} \quad m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f = -m\ddot{u}_g$$

ここで（相対）変位、速度、加速度などは時間の関数として表せるが、数式を簡略化するため、 $u$ 、 $\dot{u}$ 、 $\ddot{u}$  のように表記した。

▶ 図 6.2



微分方程式の解は直接積分法（direct integration）または、モード重ね合わせ法（modal superposition）に数値積分法（numerical integration）を適用することで変位、速度、加速度が算定できる。

数値積分法は、地盤加速度を時間間隔  $h(=\Delta t)$  で細分し、各区間に対する値を算定し累積していく方法である。数値積分法には複数の方法があるが、全て同じ概念に基づいているためここでは中央差分法とニューマークの  $\beta$  法、そして線形加速度法を紹介する。

中央差分法では次のようなテイラー展開の拡張式を使用する。

▶ 式 6.2

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + \frac{h^2}{2}\ddot{u}_i + \dots$$

▶ 式 6.3

$$u_{i-1} = u_i - h\dot{u}_i + \frac{h^2}{2}\ddot{u}_i + \dots$$

2つの式の和と差により次の結果が得られる。

▶式 6.4 
$$\dot{u}_i \approx \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1})$$

▶式 6.5 
$$\ddot{u}_i \approx \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$$

中央差分法では、まず  $i$  番目段階での式 6.4 と式 6.5 を式 6.1 に代入し、次の段階である  $i+1$  番目の変位値を算定する。

▶式 6.6 
$$\left(\frac{m}{h^2} + \frac{c}{2h}\right)u_{i+1} = f_i - \left(k - \frac{2m}{h^2}\right)u_i - \left(\frac{m}{h^2} - \frac{c}{2h}\right)u_{i-1}$$

続いて、 $i$  番目の式 6.4 と式 6.5 を利用し速度と加速度を算定する。この時、 $u_{i-1}$  の値が必要となるが、 $u_{i-1}$  は式 6.4 と式 6.5 で  $u_{i+1}$  を消去することで得られる。

▶式 6.7 
$$u_{i-1} = u_i - hu_i + 0.5h^2\ddot{u}_i$$

中央差分法では時間間隔  $h$  (または、time increment) を過剰に大きくすると安定的な解が得られないため  $h$  は次のように制限する。

▶式 6.8 
$$h \leq T_{\min}/\pi$$

ここで、 $T_{\min}$  は構造物の固有周期のうち、最小値を意味する。

ニューマークの  $\beta$  法は次のような近似的な関係式を使用する。

▶式 6.9 
$$\dot{u}_{i+1} \approx \dot{u}_i + \left[(1-\alpha)\ddot{u}_i + \alpha\ddot{u}_{i+1}\right]h$$

▶式 6.10 
$$u_{i+1} \approx u_i + \dot{u}_i h + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}_i + \beta\ddot{u}_{i+1}\right]h$$

ここで、 $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 0.25$ であれば、次のような結果が得られる。

▶式 6.11 
$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{h}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

▶式 6.12 
$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + \frac{h^2}{4}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

ニューマークの $\beta$ 法を用いると、時間間隔 $h$ （または、time increment）に関係なく安定的な解が得られるが、適切な時間間隔は次の通りである。

▶式 6.13 
$$h = T_{\min}/10$$

ニューマークの $\beta$ 法で $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 1/6$ の場合を線形加速度法という。以上の数値積分法は 1 自由度システムに対する例であるが、多自由度システムの場合もこれと同様である。

運動方程式で固有値の正確な数が分かっている場合、または、ある限界までの固有地だけを反映することが可能である場合はモード重ね合わせ法が適用できる。モード重ね合わせ法を次のような 2 自由度システムを例に説明する。

▶式 6.14 
$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\ddot{u}_g$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g$$

上の式では 2 つの固有値が存在するため、運動方程式の解は次のように表せる。

▶式 6.15 
$$u = \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} y_1 + \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} y_2 \quad \text{または、} \quad u = \Phi y = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

ここで、 $\phi_i$ は $i$ 次モードの変形形状を表す固有ベクトルで、 $y_i$ は時間の経過による変位の大きさである。

固有ベクトルの直交性の特性を利用し、固有ベクトルを質量に対し無次元化すると、次のような関係が成り立つ。

▶式 6.16

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ m_i^* & (i = j) \end{cases} \quad \phi_i^T K \phi_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ k_i^* & (i = j) \end{cases} \quad \phi_i^T C \phi_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ c_i^* & (i = j) \end{cases}$$

ここで、減衰行列  $C$  を仮定するには次のような方法がある。

- 質量及び剛性に比例 (mass and stiffness proportion) :  $C = \alpha M + \beta K$
- ひずみエネルギー比例 (strain energy proportion)
- 要素の質量及び剛性に比例 (element mass and stiffness proportion)

式 6.16 は、式 6.14 に  $i$  次モードの固有ベクトルを乗ざると  $i$  次モード以外のモードの寄与度は全て 0 になることを意味する。従って、式 6.14 の多自由度システムは全モード次数分の 1 自由度システムに分割できる。ここでの例題のような 2 自由度システムの場合には、2 つの独立な 1 自由度システムに分割できる。

▶式 6.17

$$\begin{bmatrix} m_1^* & 0 \\ 0 & m_2^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1^* & 0 \\ 0 & c_2^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^* & 0 \\ 0 & k_2^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Phi_1^T \\ \Phi_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g$$

▶式 6.18

$$\begin{aligned} m_1^* \ddot{y}_1 + c_1^* \dot{y}_1 + k_1^* y_1 &= -\Gamma_1 \ddot{u}_g \\ m_2^* \ddot{y}_2 + c_2^* \dot{y}_2 + k_2^* y_2 &= -\Gamma_2 \ddot{u}_g \end{aligned}$$

ここで、 $\Gamma_i$  はモード刺激係数といい、次のような式で表す。

▶式 6.19

$$\Gamma_i = \frac{\phi_i^T M \mathbf{1}}{\phi_i^T M \phi_i}, \quad \mathbf{1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

それぞれの 1 自由度システムは数値積分法により  $y_1$  と  $y_2$  を算定し、式 6.15 により  $\mathbf{u}$  が求められる。また、モード重ね合わせ法は計算されたモードを対象に運動方程式を分割するため、計算された固有値の数が十分確保されていないと正確な値が求められない。

## 02.チュートリアル

## 02.1 モデルの概要

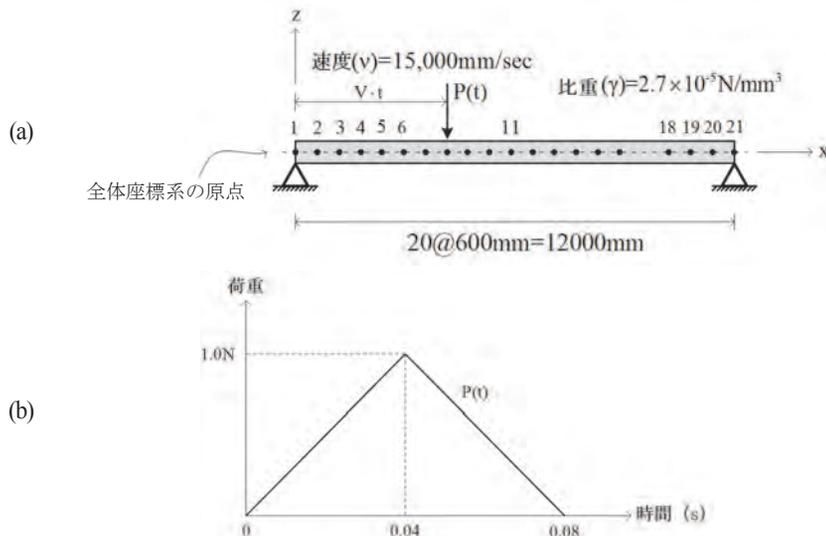
15,000 mm/sec の速度で移動する荷重を受ける単純梁に対する時刻歴解析を通して動的荷重に対する反応の拡大効果を把握し、荷重周期を変更した場合の共振の影響を検討する。

▶ 図 6.3

解析モデル

(a) 移動荷重を受ける単純梁

(b) 時刻歴荷重関数



### ➤ 材料

弾性係数 :  $4.0 \times 10^6$  N/mm<sup>2</sup>

比重( $\gamma$ ) :  $2.7 \times 10^{-5}$  N/mm<sup>3</sup>

### ➤ 断面

断面積(Area) : 645mm<sup>2</sup>

断面2次モーメント( $I_{yy}$ ) : 36,000mm<sup>4</sup>

直径(diameter) : 250mm

厚さ(thickness) : 50mm

重力加速度 (g) : 9,806mm/sec<sup>2</sup>

## 02.2 作業環境の設定

### 02.2.1 単位系の設定

新しいプロジェクトを開き、ファイルを保存する。

メインメニュー  >  新規プロジェクト...

メインメニュー  >  保存

1. ファイル名：“時刻歴 1”と入力し、[保存]をクリック

単位系を設定する。

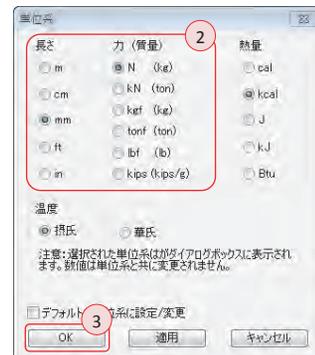
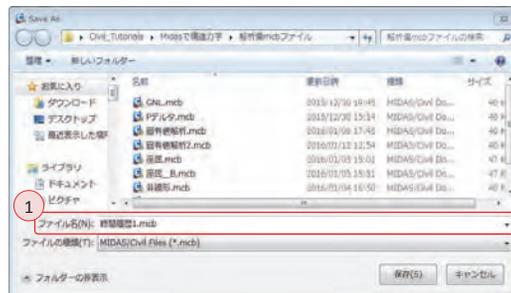
メインメニュー [ツール] > [セッティング] > [単位系]

2. 長さ > 「mm」、力 > 「N(kg)」を選択

3. [OK]をクリック

▶ 図 6.4

- (a) ファイルの保存
- (b) 単位系の定義



単位系の設定は画面下のステータスバーで簡単に操作できる。

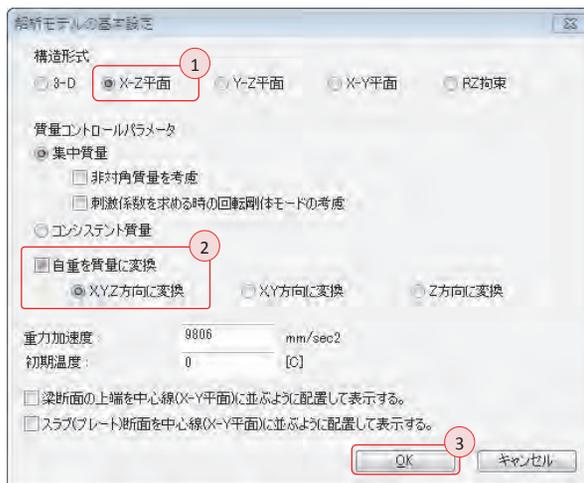
### 02.2.2 作業平面の 設定

本チュートリアルでは全体座標系（Global Coordinate System, GCS）を基準に X-Z 平面の挙動のみを許容するため、構造形式を 2-D 挙動の構造物（XZ 平面）と指定する。また、自重が節点質量に自動的に置換されるよう設定する。

メインメニュー [ウィザード] > [基本設定] > **[基本設定]**

1. 構造形式 > 「X-Z 平面」を選択
2. 「自重を質量に変換」選択 > 「X, Y, Z 方向に変換」選択
3. [OK]をクリック

▶ 図 6.5  
作業平面の設定



## 02.3 材料及び断面の定義

モデルに使用する材料及び断面は解析の便宜上、ユーザーが直接数値を入力する「ユーザー定義」及び「値入力」機能を利用する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > **[材料特性]**

1. [追加...]クリック、名称：“Mat” 入力
2. 弾性データ > タイプ > 「ユーザー定義」選択
3. ユーザー定義 > 弾性係数：“4.0e6” 入力  
> 比重 : “2.7e-5” 入力、[OK]クリック
4. 断面タブをクリック、[追加]クリック、**値入力**タブをクリック
5. 断面形状 > 「パイプ断面」選択、名称：“Sect” 入力
6. サイズ > D：“250”、tw：“50” 入力  
断面性能 > Area：“645”、Iyy：“36000” 入力
7. **せん断変形を考慮する** (チェックオフ)
8. [OK]クリック、[閉じる]クリック

▶ 図 6.6

- (a) 材料の定義  
(b) 断面の定義



## 02.4 節点及び要素の生成

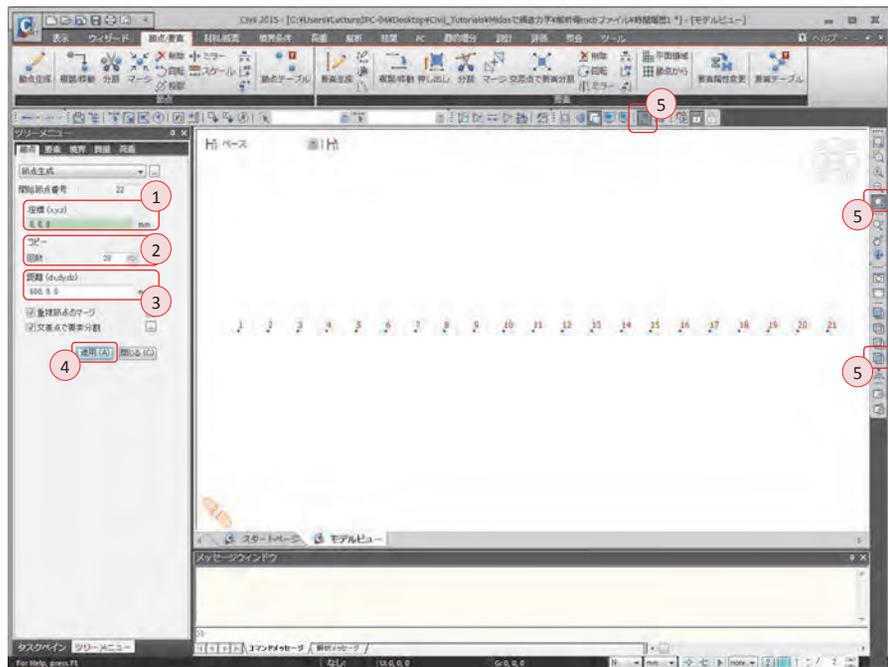
### 02.4.1 節点の生成

要素を生成する位置に節点を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [節点生成]

1. 座標 (x, y, z) : “0, 0, 0” 入力
2. コピーの回数 : “20” 入力
3. 距離(dx, dy, dz) : “600, 0, 0” 入力
4. [適用] クリック
5. 節点番号、自動フィット、正面 (トグルオン)

▶ 図 6.7  
節点の生成



### 02.4.2 要素の生成

節点を連結し要素を生成する。

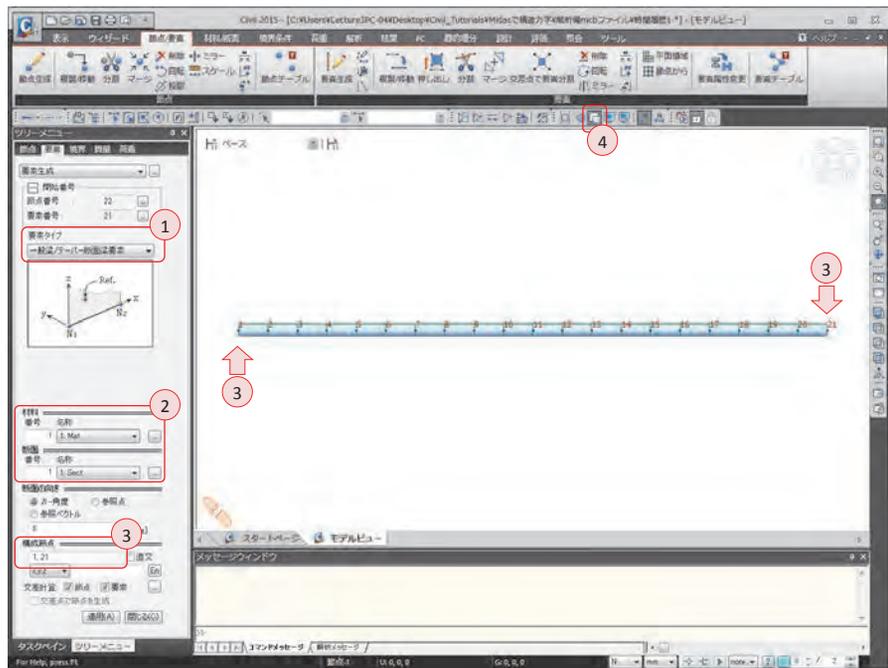
メインメニュー [節点/要素] > [要素] > **[要素生成]**

1. 要素タイプ > 「**一般梁/テーパ断面梁要素**」を選択
2. 材料 > 「**1:Mat**」を選択、断面 > 「**1:Sect**」を選択
3. **構成節点**の入力ボックス内をクリックし、**節点 1** と **節点 21** を順番にクリック
4. **隠線除去表示** (トグルオン)

▶ 図 6.8  
要素の生成

#### Tip

1 つの部材を複数の要素に分けて生成すると部材の詳細な変形結果が確認できる。



## 02.5 境界条件の入力

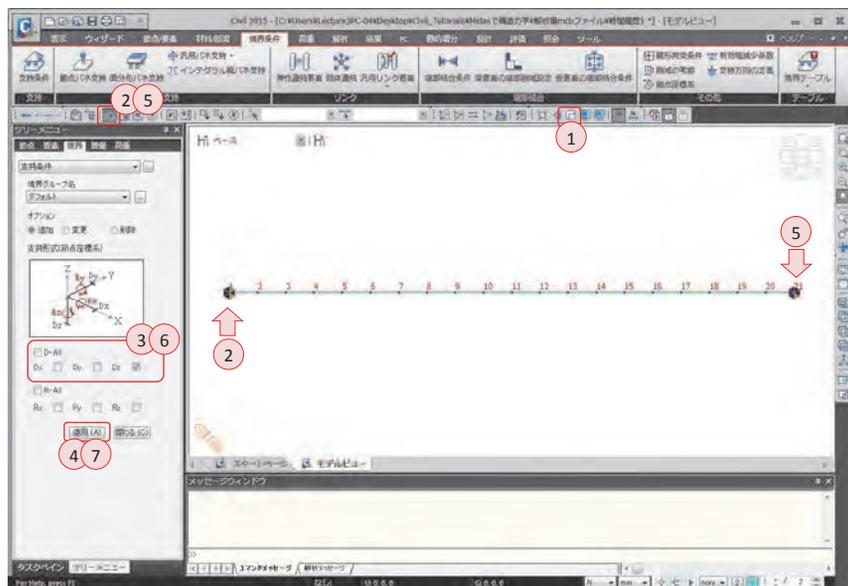
単純梁の両端に支持条件を入力する。左端の支点(節点 1)はピン支持、右端の支点(節点 21)はローラー支持と指定する。

### 1. 隠線除去表示 (トグルオフ)

メインメニュー [境界条件] > [支持] > **[支持条件]**

2. **[単一選択]**で節点 1 を選択
3. 支持形式 > **Dx**、**Dz** (チェックオン)
4. **[適用]**クリック
5. **[単一選択]**で節点 21 を選択
6. 支持形式 > **Dx** (チェックオフ)、**Dz** (チェックオン)
7. **[適用]**クリック

▶図 6.9  
支持条件の入力



## 02.6 荷重の入力

### 02.6.1 固有値解析条件 の入力

固有値解析を実行するためのデータを入力する。  
時刻歴解析を実行するためには、まず固有値解析で動的特性を把握する必要がある。  
本チュートリアルでは構造物の 1 次モードの影響のみを考慮し、時刻歴解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > **[固有値解析]**

1. 解析タイプ > 「固有ベクトル」選択 > 「Subspace Iteration」選択
2. 固有ベクトル > 解析するモード数: “1” 入力
3. 固有値制御データ > 繰り返し回数 : “20” 入力  
> 負空間次元 : “1” 入力  
> 収束判定数 : “1e-010” 入力
4. [OK] クリック

▶ 図 6.10  
固有値解析条件の入力



02.6.2 時刻歴荷重関数の入力 時刻歴解析に適用する時刻歴荷重を定義する。1 節点に作用する荷重の持続時間は分割された要素の長さで速度により決定される。

$$t = 600 / 15000 = 0.04 \text{ sec}$$

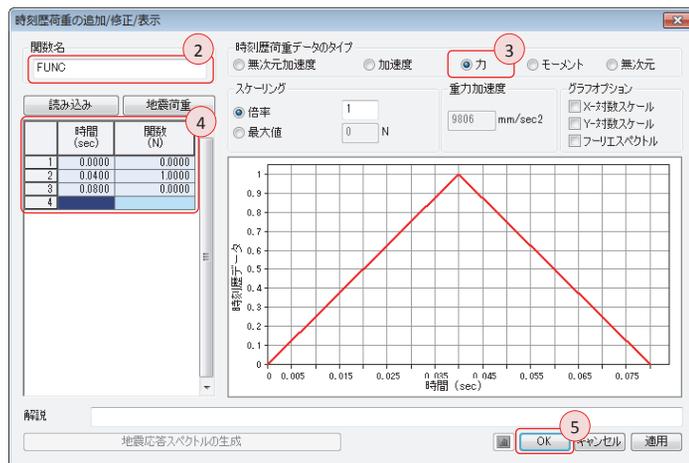
メインメニュー [荷重/地震荷重] > [時刻歴応答解析データ] > [時刻歴荷重]

1. [時刻歴荷重の追加] クリック
2. 関数名：“FUNC” 入力
3. 時刻歴荷重データのタイプ > 「力」選択
4. テーブルで、  
 時間(sec)：“0.00”、関数(N)：“0.0” 入力  
 時間(sec)：“0.04”、関数(N)：“1.0” 入力  
 時間(sec)：“0.08”、関数(N)：“0.0” 入力、次の行をクリックしグラフを確認
5. [OK] クリック、[閉じる] クリック

▶ 図 6.11  
時刻歴荷重関数の入力



テーブルに入力する際には、セル内に数値を入力し次の行をクリックすることで入力完了し、入力した内容を確認できる。



### 02.6.3 時刻歴荷重条件 の入力

時刻歴解析の荷重条件を入力する。  
継続時間（解析時間）は、移動荷重が節点 1 で載荷されてから節点 21 に到達（12000/15000=0.8sec）するまでの時間と、その後の一定時間の自由振動を考慮し、2.0sec と入力する。時間増分は、考慮しようとするモードまたは荷重周期のうち、小さいほうの 1/10 とするのが一般的である。本チュートリアルでは固有値解析の実行前であるため、十分に小さい値（0.001 秒）を入力し、減衰は考慮しないこととする。

メインメニュー [荷重/地震荷重] > [時刻歴応答解析データ] > [荷重ケース]

1. [追加] クリック
2. 名称：“Time” 入力
3. 継続時間：“2.0” 入力、時間増分：“0.001” 入力  
結果出力のステップ数：“1” 入力
4. [OK] クリック、[閉じる] クリック

▶ 図 6.12  
時刻歴荷重条件の入力



#### 02.6.4 動的節点荷重の 入力

動的節点荷重の入力では、定義した時刻歴荷重の関数が適用される節点を指定する。本チュートリアルでは動的荷重の移動を設定するため、「遅延時間」を利用し、時間の経過による動的荷重の載荷位置（節点）を指定する。遅延時間は時刻歴解析が開始された後、当該節点において時刻歴荷重が作用するまでの時間を意味する。

メインメニュー [荷重/地震荷重]>[時刻歴応答解析データ]>[時刻歴節点荷重制御データ]

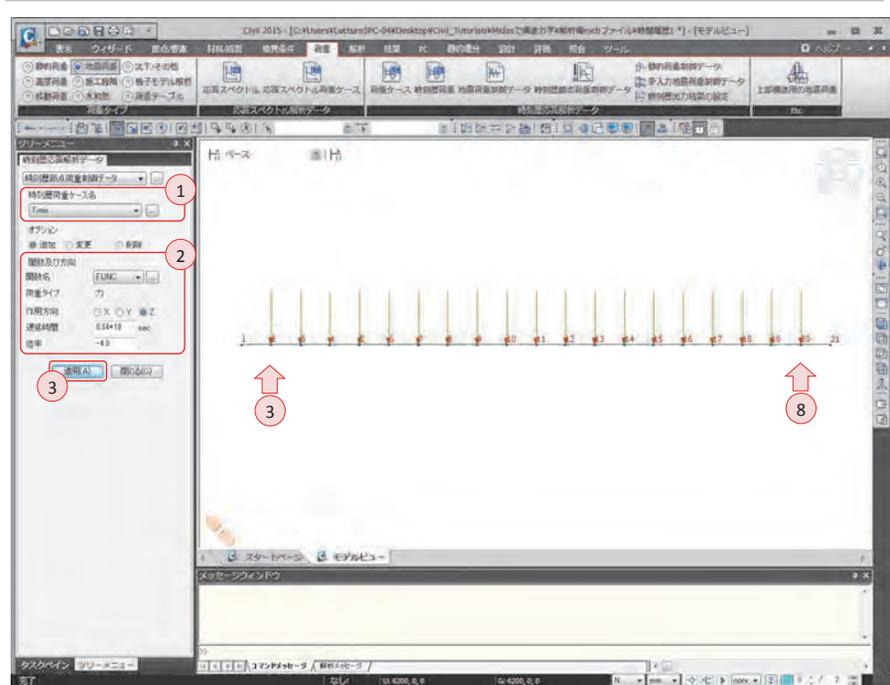
1. 時刻歴荷重ケース名 > 「Time」 選択
2. 関数及び方向 > 関数名：“FUNC” 選択、作用方向 > 「Z」 選択  
倍率：“-4.0” 入力
3.  単一選択で節点 2 選択  
遅延時間：“0” 入力、[適用] クリック
4.  単一選択で節点 3 選択  
遅延時間：“0.04\*1” 入力、[適用] クリック
5.  単一選択で節点 4 選択  
遅延時間：“0.04\*2” 入力、[適用] クリック
6.  単一選択で節点 5 選択  
遅延時間：“0.04\*3” 入力、[適用] クリック
7.  単一選択で節点 6 選択  
遅延時間：“0.04\*4” 入力、[適用] クリック  
(同じ方法で節点 7～節点 19 に遅延時間を増分しながら入力)
8.  単一選択で節点 20 選択  
遅延時間：“0.04\*18” 入力、[適用] クリック

倍率(scale factor) **-4.0** は単純梁の中央に荷重される場合、最大変位 1mm を発生させる集中荷重の大きさであり、次のように計算できる。

$$\delta_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} = 1$$

$$\therefore P = 4.0$$

▶ 図 6.13  
動的荷重の入力



## 02.7 構造解析の実行

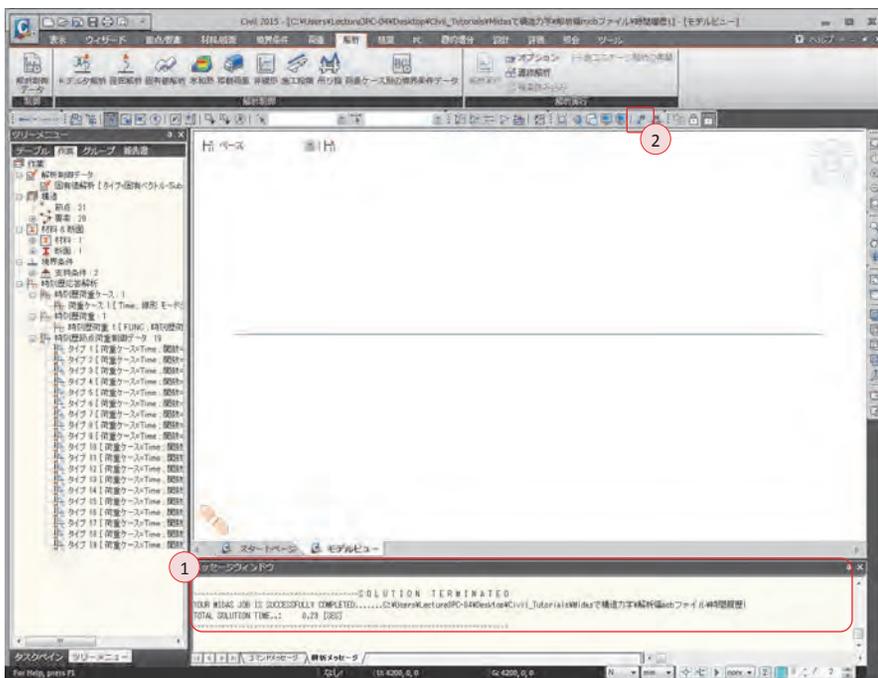
モデルの生成と時刻歴解析の情報を入力し、終わったら解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

2. 節点番号 (トグルオフ)

▶ 図 6.14  
解析の正常終了メッセージ



## 02.8 解析結果の確認

### 02.8.1 固有値の結果 確認

まず、固有値解析の結果から固有振動数を確認する。

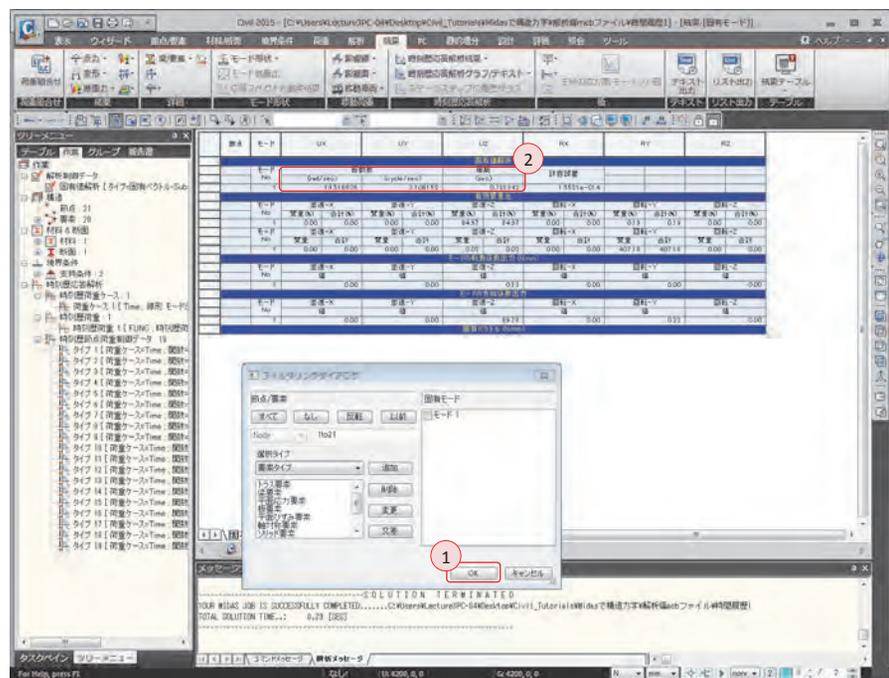
メインメニュー [結果] > [テーブル] > [結果テーブル▼] > [固有モード形状]

1. [OK] クリック

2. モード別の周期などの固有値の結果を確認

1次モードの固有振動数 : 19.5165rad/sec、3.1062cycle/sec、周期 : 0.3219 確認

▶ 図 6.15  
固有値解析の結果テーブル



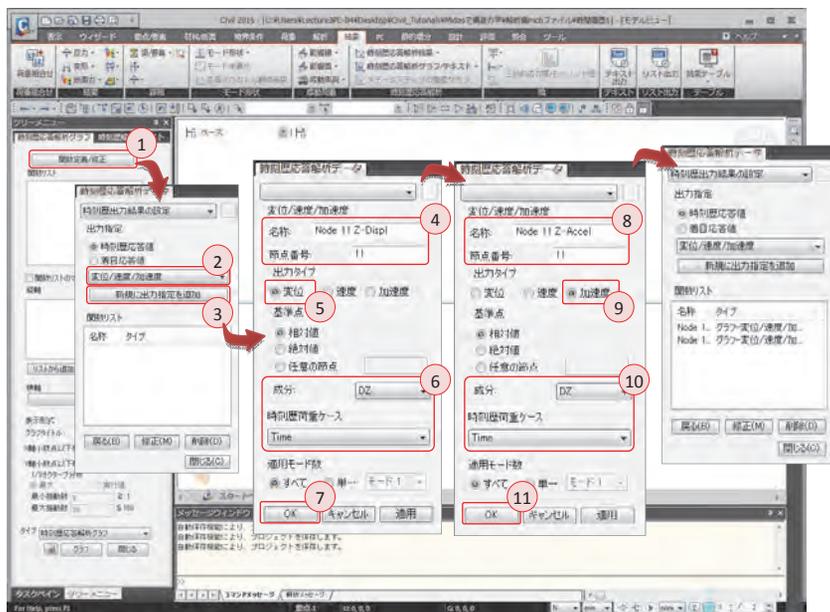
02.8.2 時刻歴解析の結果グラフの定義 中央部の節点での変位と加速度の時刻歴を確認する。まず、時刻歴グラフを定義する。

モデルビュータブをクリック

メインメニュー[結果]>[時刻歴応答解析]>[時刻歴応答解析グラフ/テキスト]>[時刻歴応答解析グラフ]

1. [関数定義/修正]をクリック
2. [変位/速度/加速度]を選択
3. [新規に出力指定の追加]
4. 名称：“Node 11 Z-Displ”入力、節点番号：“11”入力
5. 出力タイプ>「変位」選択
6. 成分 >「DZ」選択、時刻歴荷重ケース>「Time」選択
7. [適用]をクリック
8. 名称：“Node 11 Z-Accel”入力、節点番号：“11”入力
9. 出力タイプ>「加速度」選択
10. 成分 >「DZ」選択、時刻歴荷重ケース>「Time」選択
11. [OK]をクリック、[閉じる]をクリック

▶ 図 6.16  
時刻歴グラフの定義



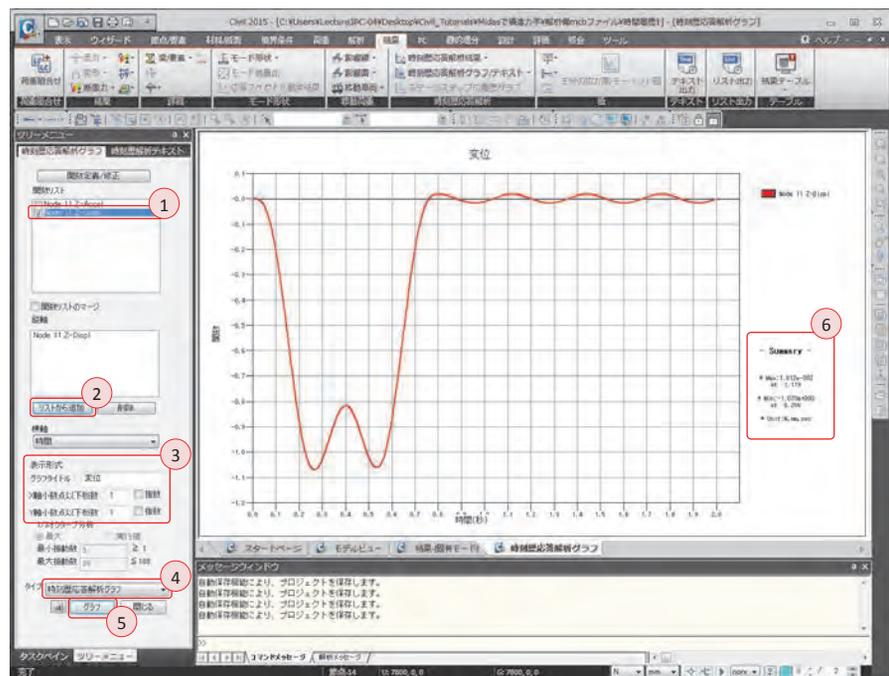
02.8.3 時刻歴解析  
結果\_変位の確認

0.0 秒から 0.8 秒まで単純梁に移動荷重が作用する場合、中央（節点 11）での変位時刻歴グラフを出力する。荷重の載荷が完了した後の自由振動まで確認するため、グラフの出力時間を 2.0 秒とする。

メインメニュー[結果]>[時刻歴応答解析]>[時刻歴応答解析グラフ/テキスト] > [時刻歴応答解析グラフ]

1. 関数リスト > **Node 11 Z-Displ** (チェックオン)
2. 縦軸 > [リストから追加] クリック
3. 表示形式 > グラフタイトル: “変位” 入力  
X 軸小数点以下桁数: “1” 入力  
Y 軸小数点以下桁数: “1” 入力
4. タイプ > 「時刻歴応答解析グラフ」 選択
5. [グラフ] クリック
6. 絶対最大変位の確認

▶ 図 6.17  
変位の時刻歴グラフ



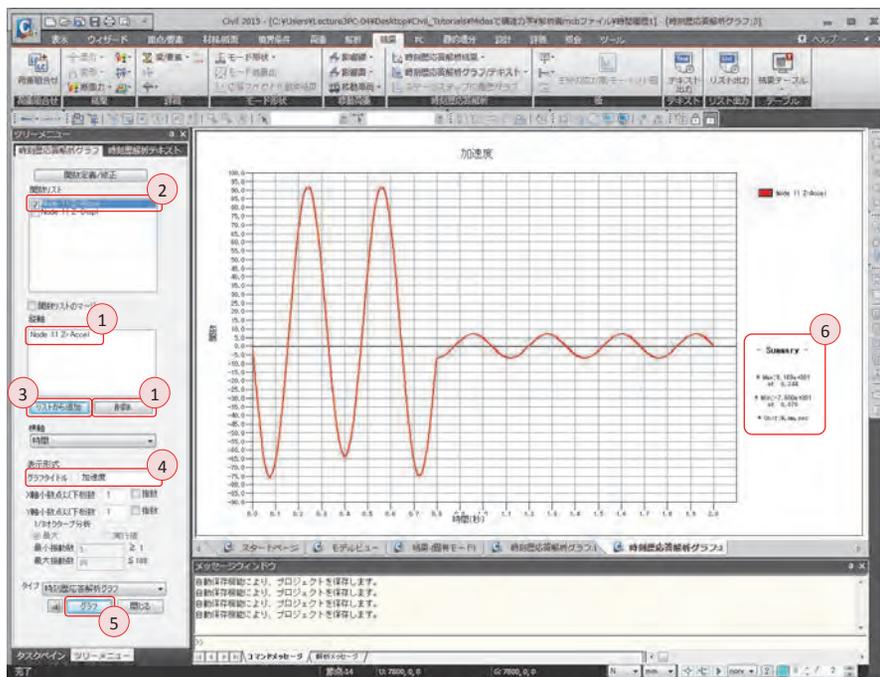
グラフの結果から、節点 11 での最大変位（最大絶対値）は 0.266 秒で 1.07mm であることが確認できる。

02.8.4 時刻歴解析  
結果\_加速度の確認

次に、0.0 秒から 0.8 秒まで単純梁に移動荷重が作用する場合、中央（節点 11）で加速度の時刻歴グラフを出力する。

1. 縦軸 > 「Node 11 Z-Displ」 選択、[削除] クリック
2. 関数リスト > **Node 11 Z-Accel** (チェックオン)
3. 縦軸 > [リストから追加] クリック
4. グラフタイトル: “**加速度**” 入力
5. [グラフ] クリック
6. 最大加速度を確認

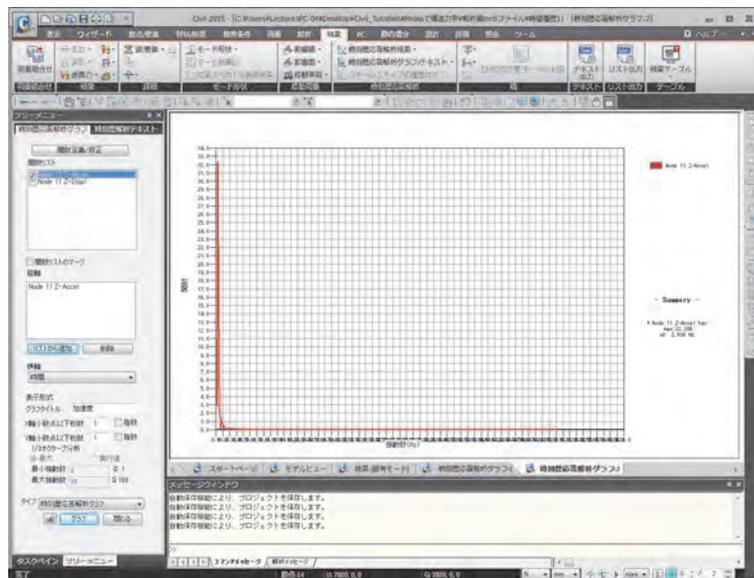
▶ 図 6.18  
加速度の時刻歴グラフ



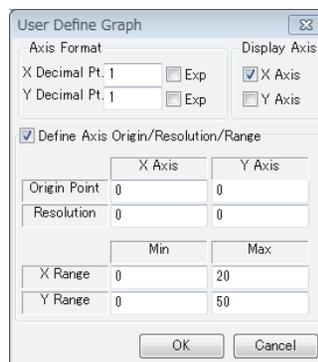
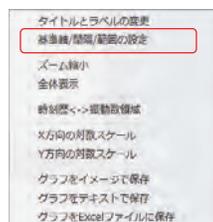
最大加速度は 0.244sec で 91.69mm/sec<sup>2</sup>である。

加速度の時刻歴を周波数領域に変換し、確認する。  
 加速度のグラフのウィンドウでマウスの右ボタンをクリックし、「時刻歴↔振動数領域」を実行すると、FFT(Fast Fourier Transform)アルゴリズムを利用し、時刻歴グラフを周波数領域に変換できる。

▶図 6.19  
周波数グラフ



マウスの右ボタンをクリックし、項目の中から「標準軸/間隔/範囲の設定」を実行し、出力範囲を設定する。

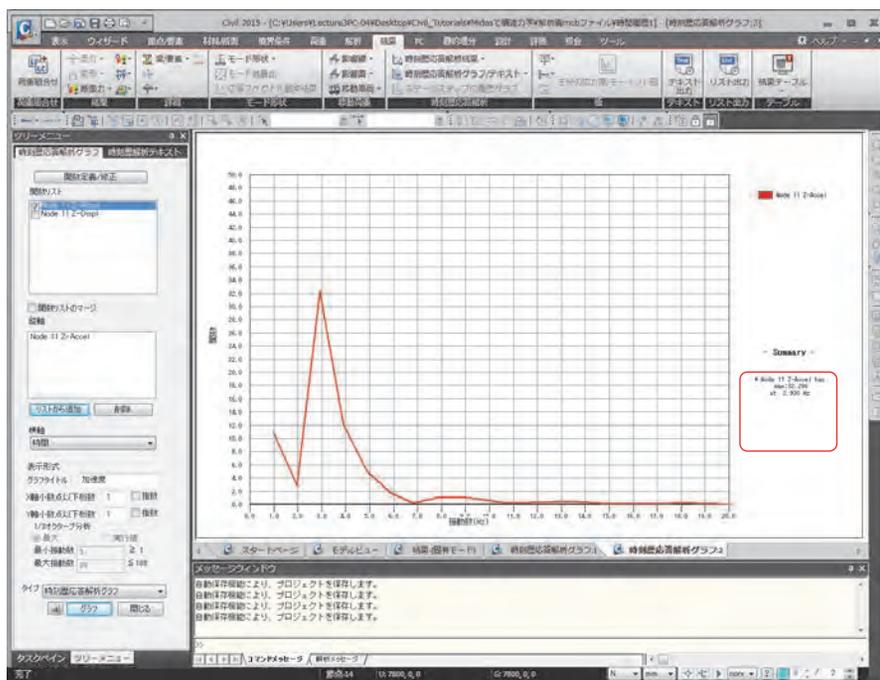


Axis Format  
 X Decimal Pt. : 1  
 Y Decimal Pt. : 1  
 Define Axis: チェックオン  
 X Range  
 Min : 0  
 Max : 20  
 Y Range  
 Min : 0  
 Max : 50

周波数領域 (frequency domain) での応答を検討することで、応答値の周波数特性が把握できる。最大応答が発生する固有振動数は図 6.15 の単純梁の固有振動数に近い 2.93Hz であることが分かる。

もし、周期的に繰り返される荷重が単純梁に作用し、またその荷重の周期が構造物の固有周期と一致するのであれば、同じ大きさの荷重でも大きな応答値が誘発されることが予想できる。これに関して、モデル 2 で荷重を変更して確認してみよう。

▶ 図 6.20  
 加速度の周波数特性グラフ



02.8.5 解析モデル別の名前で保存する。

### 周期荷重モデルの生成

メインメニュー  > **名前を付けて保存...**

1. ファイル名：“時刻歴2”と入力し、[保存]をクリック

02.8.6

### 時刻歴関数の追加

構造物の固有周期 (0.3219) と同じ周期をもつ荷重を追加する。

メインメニュー [荷重/地震荷重] > [時刻歴応答解析データ] > **[時刻歴荷重]**

1. **[時刻歴荷重の追加]**クリック
2. 関数名：“FUNC2”入力
3. 時刻歴荷重データのタイプ > 「力」選択
4. テーブルで、

時間(sec)：“0.0000”、関数(N)：“1.0” 入力/時間(sec)：“0.3219”、関数(N)：“0.0” 入力

時間(sec)：“0.3220”、関数(N)：“1.0” 入力/時間(sec)：“0.6438”、関数(N)：“0.0” 入力

時間(sec)：“0.6439”、関数(N)：“1.0” 入力/時間(sec)：“0.9657”、関数(N)：“0.0” 入力

時間(sec)：“0.9658”、関数(N)：“1.0” 入力/時間(sec)：“1.2876”、関数(N)：“0.0” 入力

時間(sec)：“1.2877”、関数(N)：“1.0” 入力/時間(sec)：“1.6095”、関数(N)：“0.0” 入力

時間(sec)：“1.6096”、関数(N)：“1.0” 入力/時間(sec)：“1.9314”、関数(N)：“0.0” 入力

(次の行をクリックしグラフを確認)

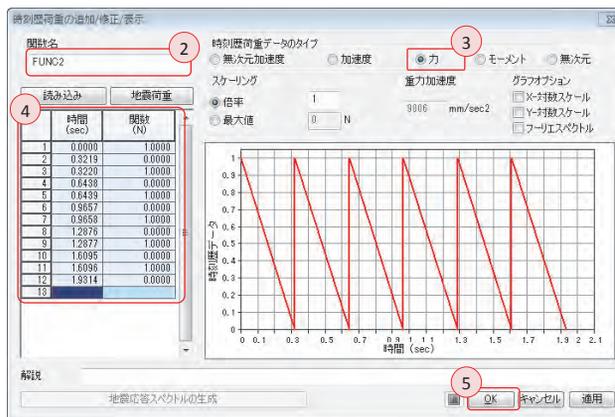
5. **[OK]**クリック、**[閉じる]**クリック



テーブルに数値を入力する際には、当該セルで数値を入力した後、次の行をクリックすることで入力された数値がグラフに反映されることを確認する。

▶ 図 6.21

時刻歴荷重の追加入力



### 02.8.7 時刻歴荷重 条件の追加

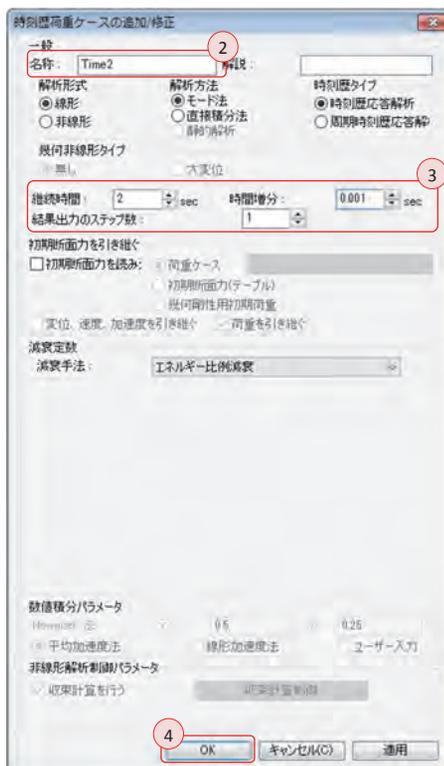
時刻歴解析の荷重条件を追加する。

メインメニュー [荷重/地震荷重] > [時刻歴応答解析データ] > [荷重ケース]

1. [追加]クリック
2. 名称：“Time2” 入力
3. 継続時間：“2.0” 入力、時間増分：“0.001” 入力  
結果出力のステップ数：“1” 入力
4. [OK]クリック、[閉じる]クリック

▶ 図 6.22

時刻歴荷重条件の修正



02.8.8 動的節点荷重の修正

動的節点荷重テーブルを利用し、集中荷重の位置及び遅延時間を修正する。

メインメニュー[荷重/荷重テーブル]>[荷重テーブル]>[時刻歴解析テーブル]>[時刻歴節点荷重制御データ]

1. 節点 11 の節点荷重以外はすべて Delete キーで削除
2. 「荷重タイプ」項目をクリックし、「Time2」に修正
3. 「関数」項目をクリックし、「FUNC2」に修正
4. 遅延時間：「0」入力  
(次の行をクリックし、入力内容を確認)



Tip

荷重が移動荷重として作用すると、時間ごとに荷重を入力するが、ここでは中央の節点に 1 回だけ入力するため遅延時間を 0 とする。

▶ 図 6.23  
動的節点荷重の修正

節点	荷重ケース	荷重タイプ	関数	作用方向	遅延時間 (sec)	倍率
2	Time	力	FUNC	Z	0.00	-4.00
2	Time	力	FUNC	Z	0.04	-4.00
4	Time	力	FUNC	Z	0.08	-2.00
5	Time	力	FUNC	Z	0.12	-4.00
6	Time	力	FUNC	Z	0.16	-4.00
7	Time	力	FUNC	Z	0.20	-2.00
8	Time	力	FUNC	Z	0.24	-4.00
9	Time	力	FUNC	Z	0.28	-4.00
10	Time	力	FUNC	Z	0.32	-2.00
11	Time	力	FUNC	Z	0.36	-4.00
12	Time	力	FUNC	Z	0.40	-2.00
13	Time	力	FUNC	Z	0.44	-4.00
14	Time	力	FUNC	Z	0.48	-4.00
15	Time	力	FUNC	Z	0.52	-2.00
16	Time	力	FUNC	Z	0.56	-4.00
17	Time	力	FUNC	Z	0.60	-4.00
18	Time	力	FUNC	Z	0.64	-2.00
19	Time	力	FUNC	Z	0.68	-4.00
20	Time	力	FUNC	Z	0.72	-2.00

節点	荷重ケース	荷重タイプ	関数	作用方向	遅延時間 (sec)	倍率
11	Time2	力	FUNC2	Z	0.00	-4.00

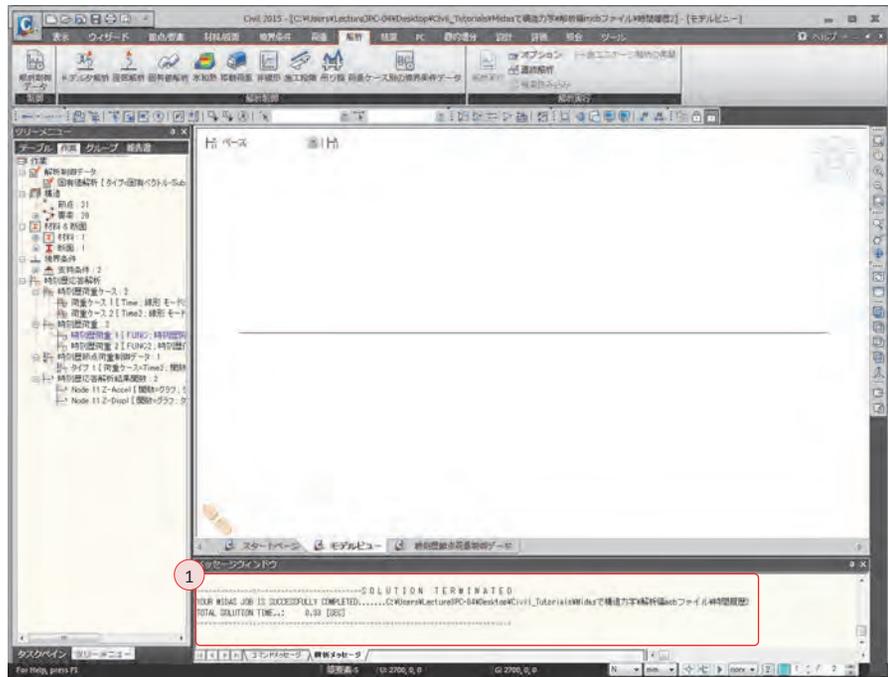
02.8.9 構造解析の  
実行

荷重と時刻歴解析条件の修正が終わったら構造解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認
2. モデルビュータブクリック

▶ 図 6.24  
解析の正常終了のメッセージ

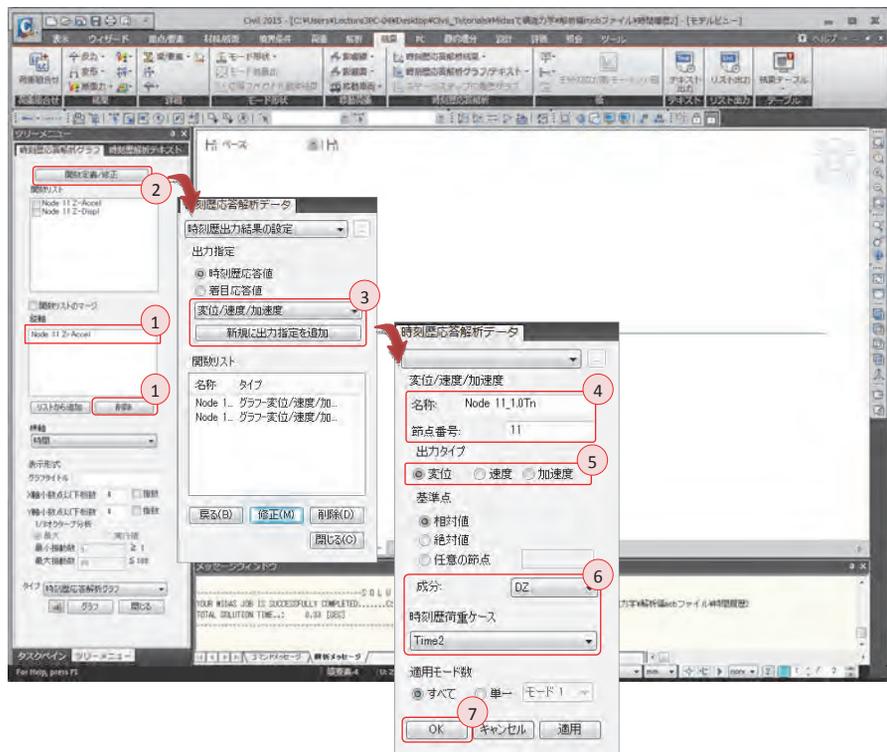


02.8.10 時刻歴グラフ 構造物の固有周期と同じ周期を持つ荷重がかかる時の解析結果をグラフで確認するため、出力内容を定義する。

メインメニュー[結果]>[時刻歴応答解析]>[時刻歴応答解析グラフ/テキスト]▼>[時刻歴応答解析グラフ]

1. 縦軸 > 「Node 11 Z-Accel」 選択、[削除]クリック
2. [関数定義/修正]クリック
3. [変位/速度/加速度]選択、[新規に出力指定の追加]
4. 名称：“Node 11\_1.0Tn” 入力、節点番号：“11” 入力
5. 出力タイプ > 「変位」 選択
6. 成分 > 「DZ」 選択、時刻歴荷重ケース > 「Time2」 選択
7. [OK]クリック

▶ 図 6.25  
時刻歴グラフの定義



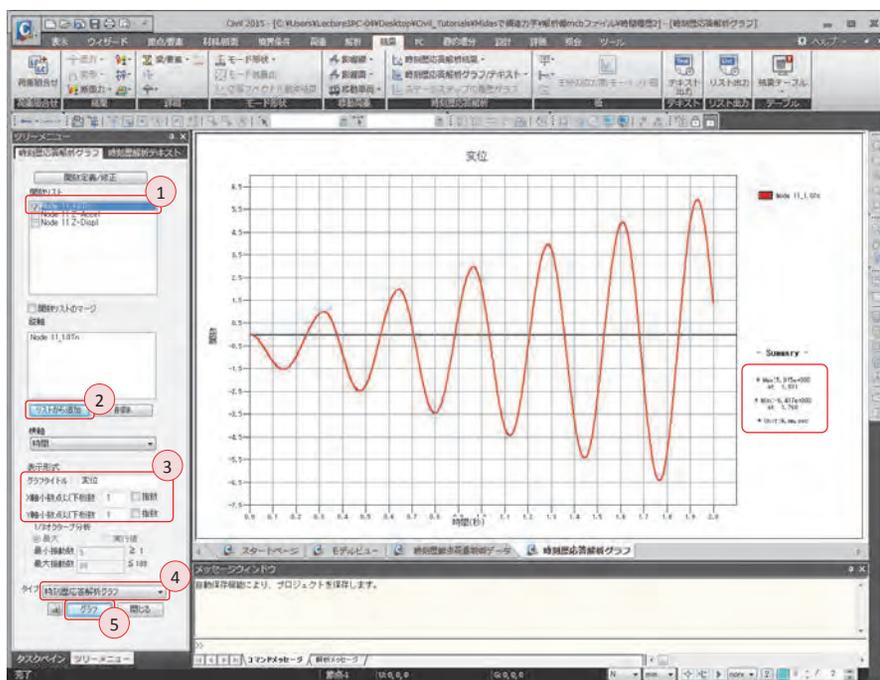
02.8.11 時刻歴解析  
の結果\_変位の確認

節点 11 に動的節点荷重が作用する場合の変位グラフを出力する。

メインメニュー[結果]>[時刻歴応答解析]>[時刻歴応答解析グラフ/テキスト]>[時刻歴応答解析グラフ]

1. 関数リスト > **Node 11\_1.0Tn** (チェックオン)
2. 縦軸 > [リストから追加] クリック
3. 表示形式 > グラフタイトル: “**変位**” 入力  
X 軸小数点以下桁数: “**1**” 入力  
Y 軸小数点以下桁数: “**1**” 入力
4. タイプ > 「**時刻歴応答解析グラフ**」選択
5. [グラフ] クリック

▶ 図 6.26  
変位の時刻歴グラフ



構造物の固有周期と同じ周期を持つ荷重が作用する場合には増幅された変位が発生することが確認できる。2 秒間の応答を検討した結果、節点 11 での最大変位は 1.768 秒で下向きの 6.417mm であった。このことから、構造物の動的荷重に対する安定性及び使用性の確保は、共振の発生可能性を確認し、その抑制に対する対策を考えることから始まると言えよう。

## 03.構造計算の 03.1 力学的概念の理解及び数値計算 解説

### 03.1.1 モデル 1

モデル 1 では荷重  $P(t)$  が節点 2 から節点 20 まで速度 15,000 mm/sec で移動する場合を想定している。従って、節点 20 に到達する時間は 0.72 秒で、荷重の載荷が終了する時間は 0.8 秒である。このような解析解を数値計算で求めるためには、それぞれの節点に到達する荷重に対する解析を行った後、全てのケースを時間の経過に沿って累積していく方法が考えられる。しかし、計算過程が非常に複雑で解析の原理を理解するのに不適切であるため、モデル 1 の構造を 1 自由度系と仮定し、単純梁の中央に 1 つの集中荷重が作用する場合を対象として説明する。

単純梁に対する 1 次モードの固有値は次のような方法（5 章の固有値解析を参照）により求められる。

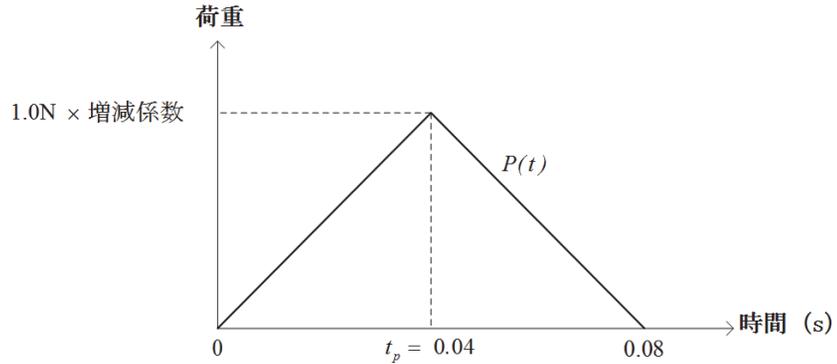
$$\omega_n = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} = \left(\frac{\pi}{12,000}\right)^2 \sqrt{\frac{4.0 \times 10^6 \times 36,000}{1.776 \times 10^{-6}}} = 19.5165 \text{ rad/sec}$$

$$\text{ここで、単位長さ当たり質量} \quad \bar{m} = \frac{A \cdot \gamma}{g} = \frac{645 \times 2.7 \times 10^{-5}}{9806} = 1.776 \times 10^{-6}$$

単純梁の中央に集中荷重が作用する場合、中央部にたわみ 1mm 発生させる荷重は次のように計算できるため、増減係数を 4.0 とした。

$$P = \frac{48EI}{\ell^3} = \frac{48 \times 4.0 \times 10^6 \times 36,000}{12,000^3} = 4.0 \text{ N}$$

▶ 図 6.27  
時刻歴荷重



モデル 1 のような構造で、減衰効果を見ないニューマークの  $\beta$  法を適用すると次のようにまとめられる。

1) 初期値の場合：  $i = 0$

$$\ddot{u}_0 = (f_0 - ku_0) / m$$

2) 初期値以降の場合：  $i = 0$

$$u_i = \frac{f_i + (4m/h^2)(u_{i-1} + h\dot{u}_{i-1} + h^2\ddot{u}_{i-1}/4)}{k + 4m/h^2}$$

$$\ddot{u}_i = \frac{4}{h^2} \left( u_i - u_{i-1} - h\dot{u}_{i-1} - \frac{h^2}{4}\ddot{u}_{i-1} \right)$$

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{h}{2}(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i)$$

ここで、質量  $m$  と剛性  $k$  は次のように計算できる。

$$m = \bar{m} \frac{\ell}{2} = 1.066 \times 10^{-2} \text{ N}$$

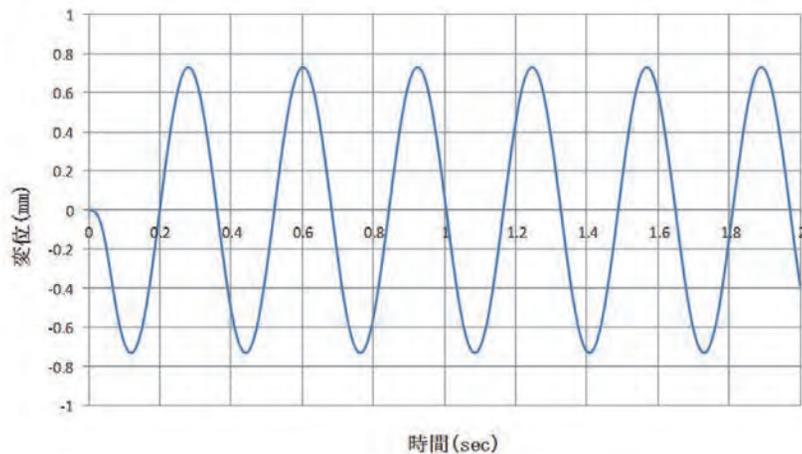
$$k = \frac{48EI}{\ell^3} = 4.0 \text{ N/mm}$$

表 6.1 はニューマークの  $\beta$  法を 5 段階まで適用した例をまとめたもので、図 6.38 は表により得られた時間—変位間の関係をグラフで表したものである。

$i$	$t$	$f_i$	$u_i$	$\ddot{u}_i$	$\dot{u}_i$
0	0	0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.004	-0.4	-0.0001	-37.4822	-0.0750
2	0.008	-0.8	-0.0009	-74.7397	-0.2994
3	0.012	-1.2	-0.0028	-111.5489	-0.6720
4	0.016	-1.6	-0.0066	-147.6892	-1.1905
5	0.02	-2	-0.0127	-182.9437	-1.8517

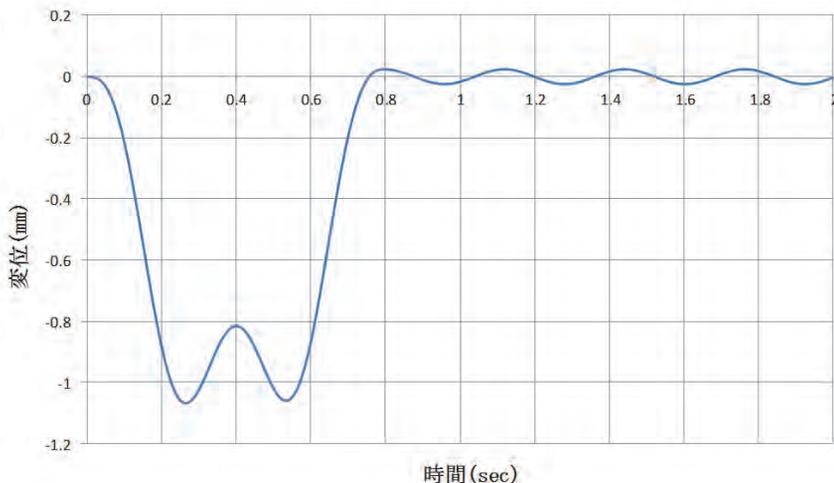
単純梁の中央に荷重が作用する場合の解析結果を Civil と比較した。Civil では直接積分法やモード重ね合わせ法が使用でき、数値計算と Civil による解析結果が正確に一致するため、ここでは Civil の結果は省く。

(Civil での確認は、チュートリアルモデル 1 において、動的節点荷重テーブルの節点 11 のみを残し、節点 2～節点 20 に載荷されたデータを全て削除した後に解析を実行することで確認できる。)



単純梁の中央（節点 11）に静的荷重 4N が作用する場合の中央部のたわみは 1.0mm となるはずであるが、動的荷重の場合は最大たわみが 0.731mm であることが確認できる。しかし、チュートリアルモデル 1 のように、移動荷重が持続的に作用する場合には図 6.29 のように直前の時間帯に発生した荷重によるたわみが存在する状態で続けて荷重を受けるため、静的荷重の場合より大きいたわみ（1.07mm）が発生する。

▶ 図 6.29  
 単純梁に移動荷重が作用する  
 場合の中央部のたわみ



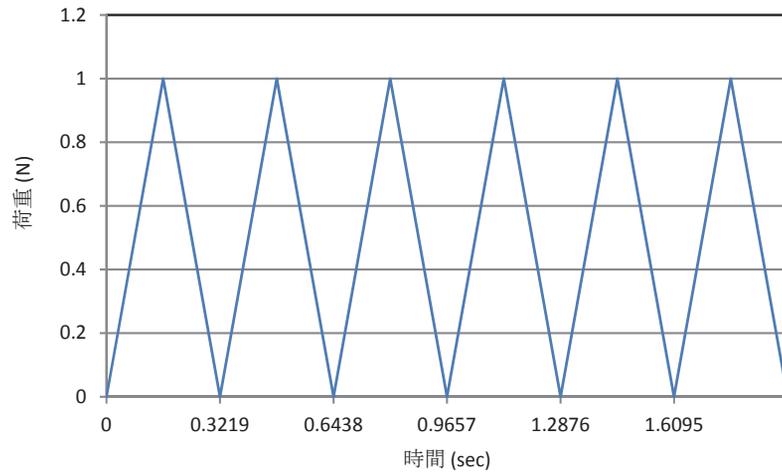
モデル 1 では減衰効果を反映しないため、荷重が終了した後（0.8 秒以降）も残存変位が減衰することなく持続的な自由振動を見せることが確認できる。

### 03.1.2 モデル 2

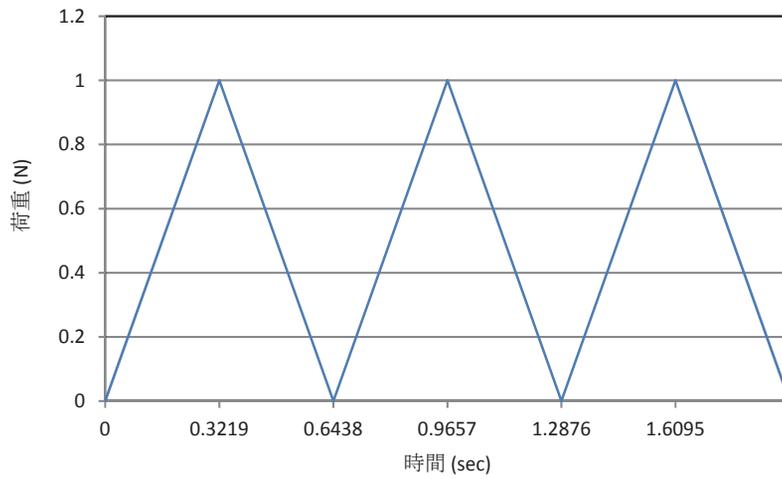
モデル 2 は構造物の固有周期と荷重の周期との相関関係による構造物の応答を確認するためのモデルである。

ここでは、構造物の固有周期の 1.0 倍と 2.0 倍の周期を持つ荷重を作用させ、時刻歴応答を検討した。構造物の固有周期は  $T_n = 2\pi/\omega_n = 0.3219\text{sec}$  であるため、荷重の周期が 0.3219 秒である場合と 0.6438 秒である場合の 2 種類の荷重を作用させた。（Civil では時刻歴荷重ケース及び時刻歴荷重関数で次のように周期を設定する。）

▶ 図 6.30  
固有周期の 1.0 倍の周期を  
持つ荷重



▶ 図 6.31  
固有周期の 2.0 倍の周期を  
持つ荷重



固有周期の 1.0 倍、2.0 倍の周期を持つ荷重に対する結果を図 6.32 に示す。

▶ 図 6.32  
荷重の周期による変位の  
結果

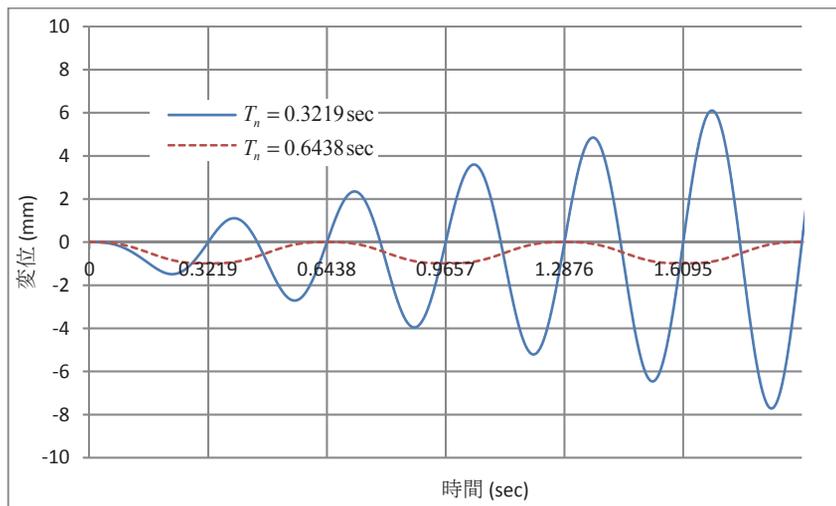
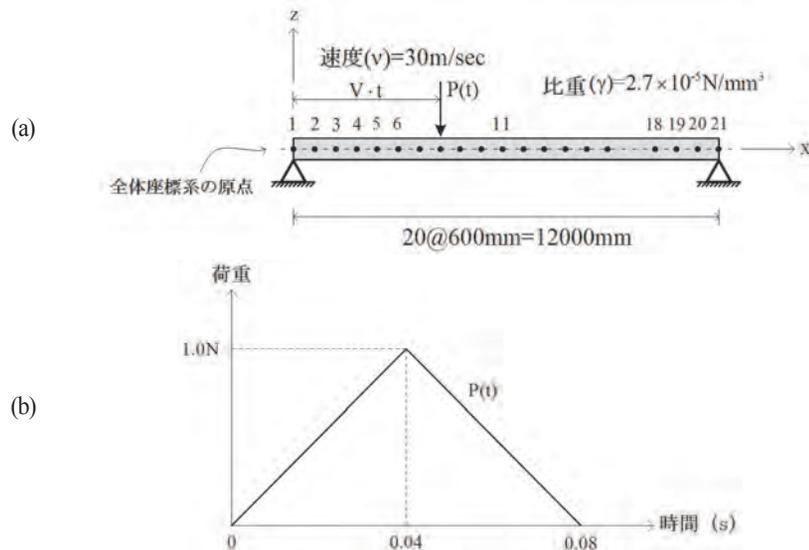


図 6.32 を見ると、構造物の固有周期と一致する周期 ( $1.0T_n$ ) では変位が大きく増幅することが確認できる。しかし、構造物の固有周期とは異なる周期 ( $2.0T_n$ ) で荷重が作用すると、比較的小さい幅で増幅される。(Civil ではそれぞれ  $1.0T_n$  と  $2.0T_n$  を持つ動的節点荷重を中央の節点 11 に集中荷重として載荷させ解析を行い、時刻歴グラフで確認できる。) 以上のような結果から、実際に構造物を設計する場合においても構造物の固有周期と荷重の周期が同じにならないよう心掛ける必要がある。

## 04.練習問題

1. 本文の解析モデル（時刻歴 1.mcb）で、荷重の移動速度が 30m/sec に増加した場合に対し時刻歴解析を行い、スパン中央での変位、速度、加速度を比較しなさい。



➤ **材料**

弾性係数 :  $4.0 \times 10^6$  N/mm<sup>2</sup>

比重( $\gamma$ ) :  $2.7 \times 10^{-5}$  N/mm<sup>3</sup>

➤ **断面**

断面積 (Area) : 645mm<sup>2</sup>

断面 2 次モーメント ( $I_{yy}$ ) : 36,000mm<sup>4</sup>

直径 (diameter) : 250mm

厚さ (thickness) : 50mm

重力加速度 (g) : 9,806mm/sec<sup>2</sup>



# 7. 応答 スペクトル 解析

## TABLE OF CONTENTS

### 01 概念の理解

---

01.1 応答スペクトル解析の概念 7-1

### 02 チュートリアル

---

02.1 モデルの概要 7-5

02.2 作業環境の設定 7-7

02.3 材料及び断面の定義 7-9

02.4 節点及び要素の生成 7-11

02.5 境界条件の入力 7-15

02.6 荷重の入力 7-17

02.7 構造解析の実行 7-21

02.8 解析結果の確認 7-22

### 03 構造計算の解説

---

03.1 力学的概念の理解  
及び数値計算 7-25



# 01.概念の理解 01.1 応答スペクトル解析の概念

## 01.1.1 解析の概念

時刻歴解析法では構造物の加速度、速度、変位などの時間軸上の応答値を算定する。一方、応答スペクトル解析法ではそれぞれのモードにおける最大応答値を求めた後、それらを適切に組み合わせることで全体的な応答値を予測する。図7.1は各周期での最大応答値を求め、周期ごとの最大応答変位をグラフで表す手順である。

▶図 7.1  
 変位応答スペクトルの  
 算定方法

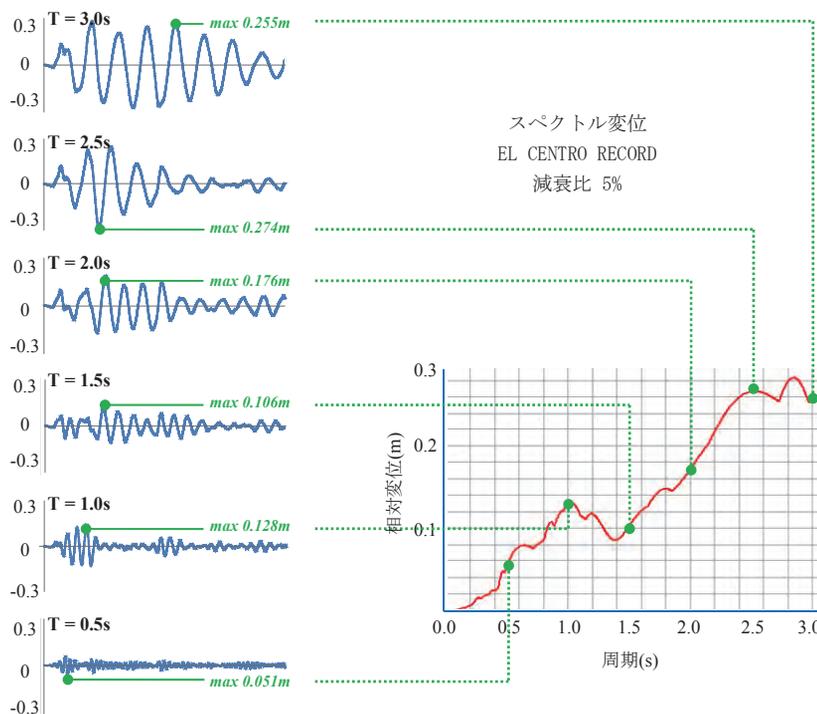
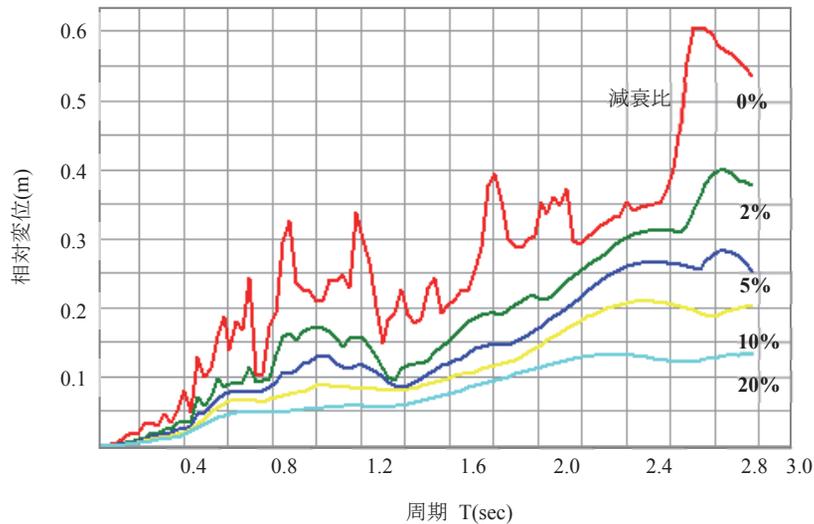


図7.1の左側のグラフは構造物の周期別（0.5s～3.0s）に時刻歴解析を行い、変位の最大値を求める過程を示している。右図は構造物の周期ごとの最大応答変位を表す図であるため、変位応答スペクトルと呼ぶ。

加速度及び速度に対しても類似のグラフで表せる。

構造解析プログラムでは自動的に応答スペクトルを算定し、特定の周期における最大応答を求める。図7.2は減衰の程度により求められた変位応答スペクトルをまとめたものである。

▶ 図 7.2  
減衰の程度による変位応答  
スペクトル



構造物が複雑になるほど構造物の変形に寄与する固有モード（または、固有周期）の数は多くなり、それぞれのモードが寄与する程度が反映された結果が表れる。従って、最大応答値を求めるためには各モードの寄与度を算定する必要がある。固有値解析を通して6章の式6.19のような方法で各モードの刺激係数 $\Gamma_i$ （ $i$ 番目モードの刺激係数）を算定する。

層せん断力や変位などは周期ごとの最大応答値とモード刺激係数の積として次のように算定される。

▶式 7.1 
$$V_i = \Gamma_i m (S_{ai} g) \phi_i$$

▶式 7.2 
$$D_i = \Gamma_i S_{di} \phi_i$$

上の式は、構造物の各層の質量が全て  $m$  で同じであると仮定した場合を表している。式の  $S_{ai}$  と  $S_{di}$  は  $i$  番目の加速度応答スペクトルの重力加速度に対する比、および変位応答スペクトルを表し、 $\phi_i$  は  $i$  番目の固有ベクトル、 $g$  は重力加速度を意味する。加速度、速度、変位応答スペクトルは近似的に次のように表せる。

▶式 7.3 
$$S_a = \omega S_v = \omega^2 S_d$$

式 7.1 から、当該モードの層せん断力は質量と加速度応答スペクトルの積にモード形状を反映し、層ごとの分布を求めた後、モード刺激係数を乗ずることで算定できることが分かる。層変位の場合においても、変位応答スペクトルにモード形状を反映し、層ごとの分布を求めた後、モード刺激係数を乗じて算定する。

それぞれのモードの応答が求められたら、適切に組み合わせる。図 7.1 で分かるように、最大値が得られる時間がそれぞれ異なるため、単純に最大値を合計することでは応答を求めることはできない。従って、次のような方法の中から適切な方法を選定し、モードごとの応答を組み合わせる。

▶式 7.4 - SRSS (Square Root of the Sum of the Squares): 
$$R_{\max} = [R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_n^2]^{1/2}$$

▶式 7.5 - ABS (Absolute Sum): 
$$R_{\max} = |R_1| + |R_2| + \dots + |R_n|$$

▶式 7.6 - CQC (Complete Quadratic Combination): 
$$R_{\max} = \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i \rho_{ij} R_j \right]^{1/2}$$

ここで、 $R_i$  =  $i$  番目モードの最大応答値

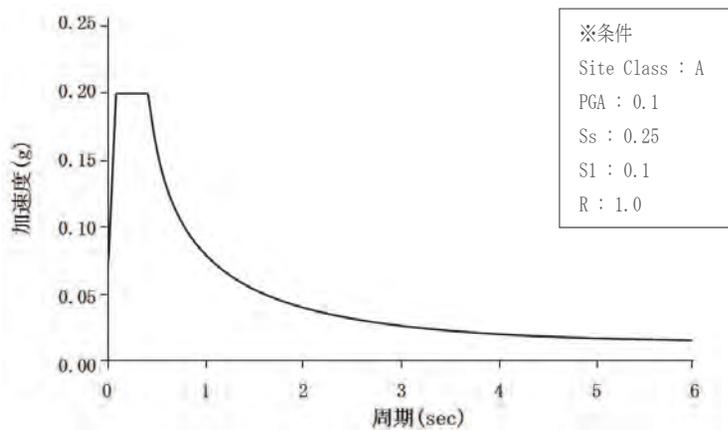
$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2r(1+r)^2}, \quad r = \frac{\omega_j}{\omega_i}$$

$r$  =  $i$  番目モードに対する  $j$  番目モードの固有振動数の割合

$\xi$  = 減衰比

応答スペクトル解析法を1次モードのみに適用すると等価静的解析法となる。  
下図は AASHTO LRFD 6<sup>th</sup> で使用する加速度設計スペクトルを示す。

▶ 図 7.3  
加速度設計スペクトル  
(AASHTO LRFD 6th)

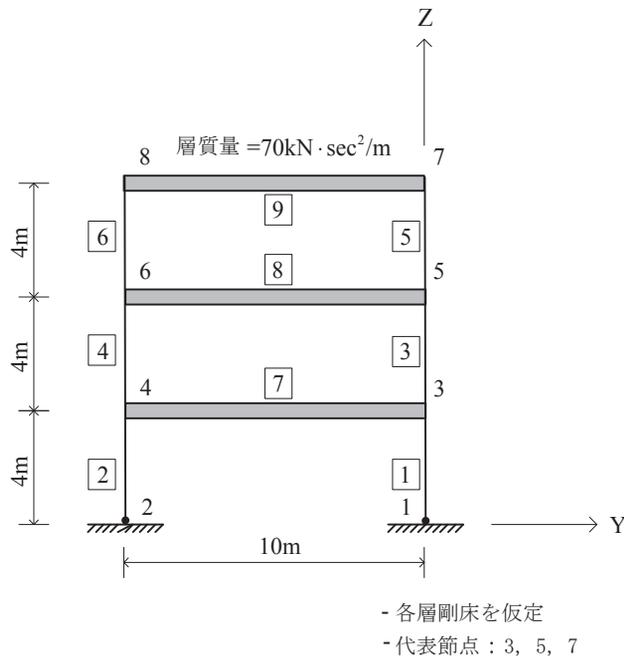


## 02.チュートリアル

## 02.1 モデルの概要

応答スペクトル解析は、地震荷重による構造物の挙動を分析することで部材力を計算し、設計に適用するための解析法である。ここでは、下図のように2次元上にある3階建ての骨組みに対し、El Centro 地震波 NS 成分で求めたスペクトルを適用し、応答スペクトル解析を行う。

▶図 7.4  
解析モデル



解析モデルは層別の剛体挙動を考慮するため、従属節点 (slave node) 4、6、8 の平面挙動の自由度をそれぞれの代表節点 (master node) に従属させる。

➤ **材料**

弾性係数 :  $2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

➤ **断面**

柱 : 断面積 (Area) :  $6.0 \times 10^{12} \text{ mm}^2$

断面 2 次モーメント ( $I_{yy}$ ) :  $4.0 \times 10^8 \text{ mm}^4$

梁 : 断面 2 次モーメント ( $I_{yy}$ ) :  $4.0 \times 10^{14} \text{ mm}^4$

層質量 (floor mass, M) :  $70.0 \text{ kN}\cdot\text{sec}^2/\text{m}$

減衰比 ( $\xi$ ) : 0.05 (5%)

重力加速度 (g) :  $9,806 \text{ mm/sec}^2$

応答スペクトルのデータ : El Centro N-S 成分

## 02.2 作業環境の設定

### 02.2.1 単位系の設定

新しいプロジェクトを開き、ファイルを保存する。

メインメニュー  >  新規プロジェクト...

メインメニュー  >  保存

1. ファイル名：“**応答**”と入力し、**[保存]**をクリック

単位系を設定する。

メインメニュー [ツール] > [セッティング] > **[単位系]**

2. 長さ > 「**mm**」、力 > 「**N(kg)**」を選択

3. **[OK]**をクリック

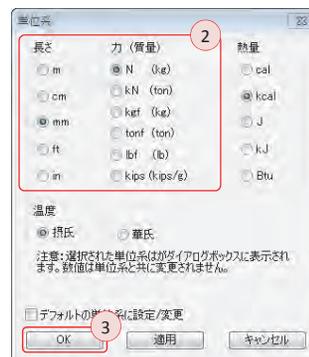
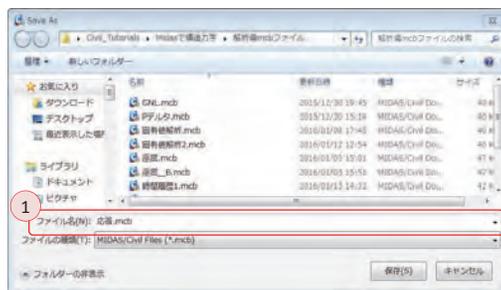
▶ 図 7.5

- (a) ファイルの保存
- (b) 単位系の設定



Tip

単位系の設定は画面下のステータスバーでも簡単に操作できる。



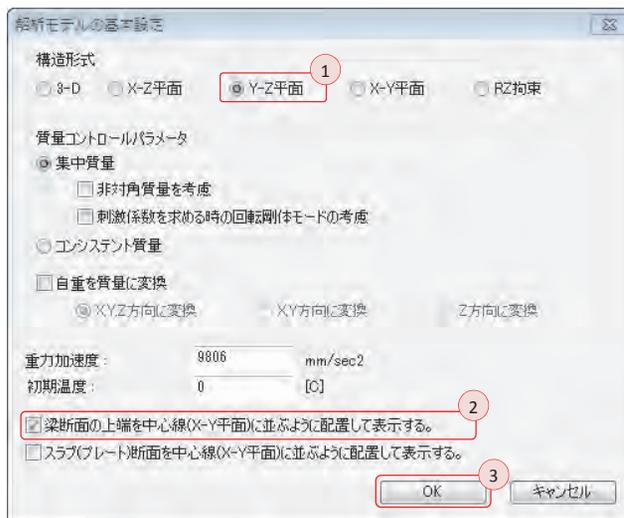
### 02.2.2 作業平面の 設定

本チュートリアルでは全体座標系 (Global Coordinate System, GCS) を基準に Y-Z 平面の挙動のみを許容するため、構造形式を 2-D 挙動の構造物 (YZ 平面) と指定する。

メインメニュー [ウィザード] > [基本設定] > **[基本設定]**

1. 構造形式で「Y-Z 平面」を選択
2. 梁断面の上端を中心線 (X-Y 平面) に並ぶように配置して表示する (チェックオン)
3. [OK] をクリック

▶ 図 7.6  
作業平面の設定



## 02.3 材料及び断面の定義

モデルに使用する材料及び断面は解析の便宜上、ユーザーが直接数値を入力する「ユーザー定義」及び「値入力」機能を利用する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > **[材料特性]**

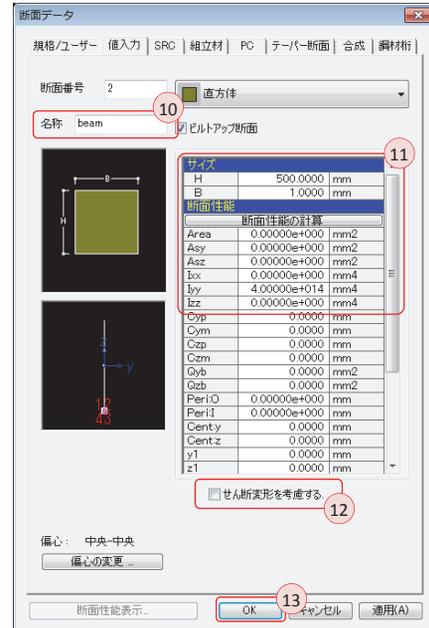
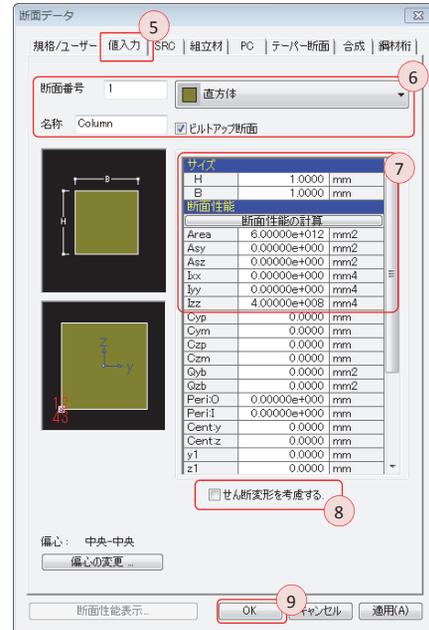
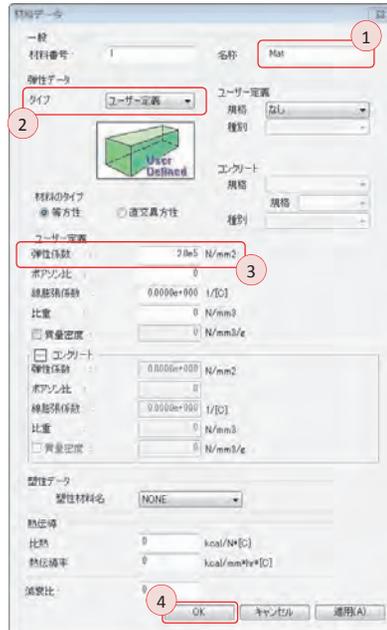
1. **[追加...]** クリック、名称：“**Mat**” 入力
2. 弾性データ > タイプ > 「**ユーザー定義**」 選択
3. ユーザー定義 > 弾性係数：“**2.0e5**” 入力
4. **[OK]** クリック
5. **断面** タブをクリック、**[追加]** クリック、**値入力** タブをクリック
6. 断面形状 > 「**直方体**」 選択、名称：“**Column**” 入力
7. サイズ > H：“**1**”、B：“**1**” 入力  
断面性能 > Area：“**6.0e12**”、Izz：“**4.0e8**” 入力
8. **せん断変形を考慮する** (チェックオフ)
9. **[適用]**
10. 名称：“**Beam**” 入力
11. サイズ > H：“**500**”、B：“**1**” 入力、  
断面性能 > Iyy：“**4.0e14**”、Izz：“**0**” 入力
12. **せん断変形を考慮する** (チェックオフ)
13. **[OK]** クリック、**[閉じる]** クリック



断面情報が「値入力」で入力された断面は、解析の際に「断面性能」に入力されているデータで解析を行う。「サイズ」の欄に入力された数値はモデル表示のみに反映される。

▶ 図 7.7

- (a) 材料の定義  
(b) 断面の定義



## 02.4 節点及び要素の生成

### 02.4.1 節点の生成

部材を生成するための節点を生成する。

1. ステータスバーで、力：「kN」、長さ：「m」修正

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [節点生成]

2. 座標 (x, y, z) : “0, 0, 0” 入力
3. コピーの回数 : “1” 入力、距離(dx, dy, dz) : “0, -10, 0” 入力
4. [適用]クリック

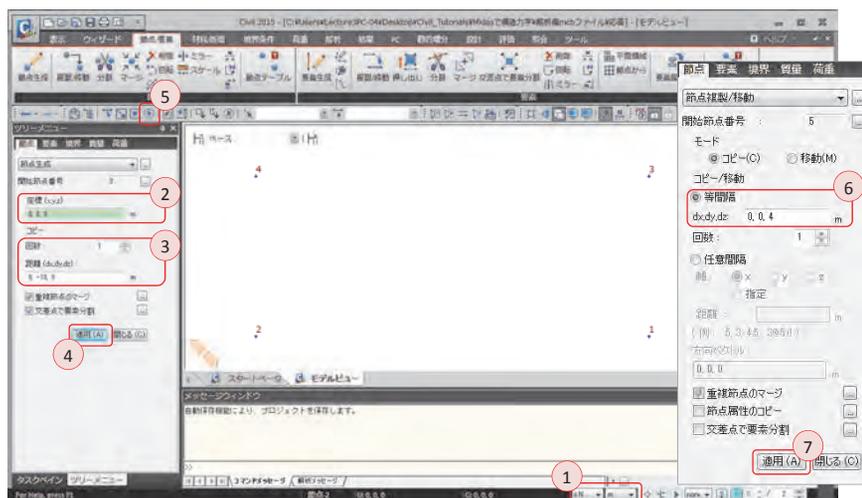


自動フィットはモデルが画面全体に表示されるよう自動でズームを調節する機能である。

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [複製/移動]

5. 全て選択クリック
6. コピー/移動 > 「等間隔」選択、dx, dy, dz : “0, 0, 4” 入力
7. [適用]クリック
8. 節点番号、自動フィット、右側 (トグルオン)

▶ 図 7.8  
節点の生成



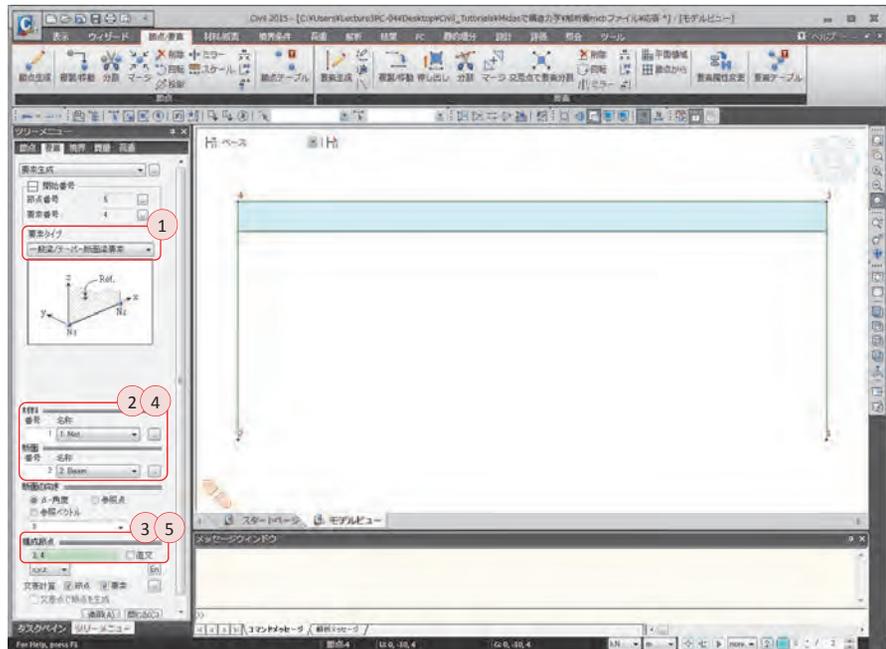
02.4.2 要素の生成

節点を連結し要素を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [要素生成]

1. 要素タイプ > 「一般梁/テーパー断面梁要素」を選択
2. 材料 > 「1:Mat」を選択、断面 > 「1:Column」を選択
3. 構成節点の入力ボックス内をクリックし、節点 1 と節点 3、節点 2 と節点 4 を順番にクリック
4. 材料 > 「1:Mat」を選択、断面 > 「2:Beam」を選択
5. 構成節点の入力ボックス内をクリックし、節点 3 と節点 4 を順番にクリック

▶ 図 7.9  
要素の生成

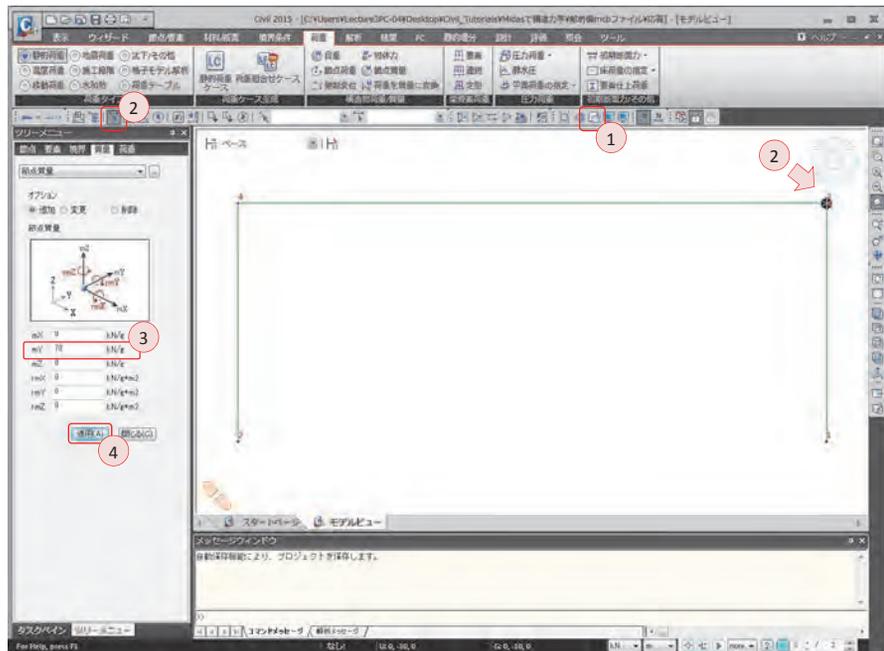


02.4.3 層質量の入力 固有値解析のための層質量を入力する。ここでは、各層に剛体連結条件が与えられるため、層質量を代表節点に入力する。

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重タイプ/質量] > [節点質量]

1. 隠線除去表示 (トグルオフ)
2.  単一選択で節点3 選択
3. 節点質量 > mY: “70” 入力
4. [適用] クリック

▶ 図 7.10  
層質量の入力



02.4.4 3階建て骨組みの生成

1階に入力した部材及びモデリングデータを複製し、3階建ての骨組みを生成する。

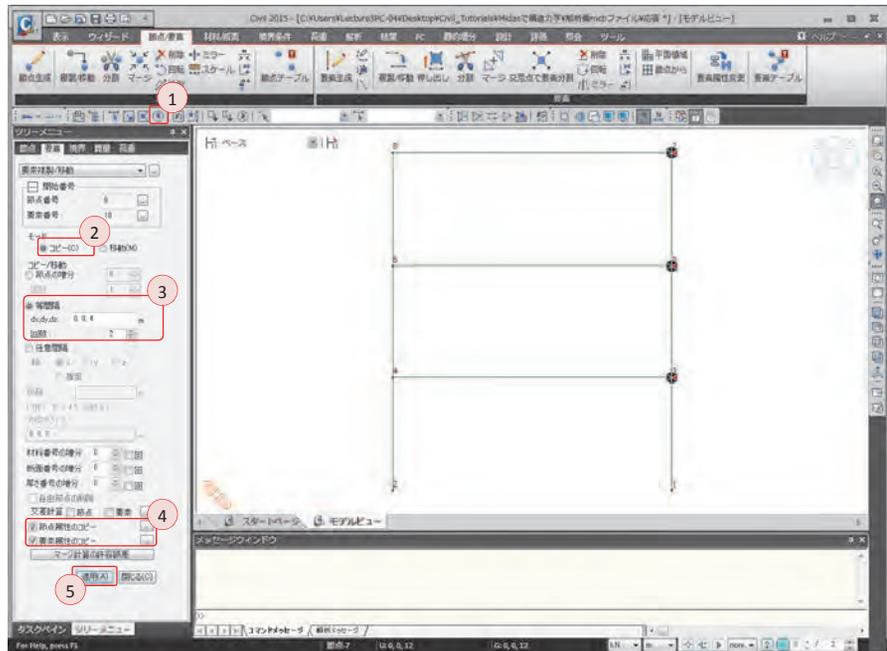
メインメニュー [節点/要素] > [要素] > **[複製/移動]**

1.  全て選択クリック
2. モード>「コピー」選択
3. コピー/移動>「等間隔」選択> dx, dy, dz : “0, 0, 4” 入力  
回数 : “2” 入力
4. 節点属性のコピー、要素属性のコピー (チェックオン)
5. **[適用]**クリック

▶ 図 7.11  
3階建て骨組みの生成

 Tip

ディスプレイ> Misc タブで節点質量をチェックオンすると節点質量が複製されたことが確認できる。



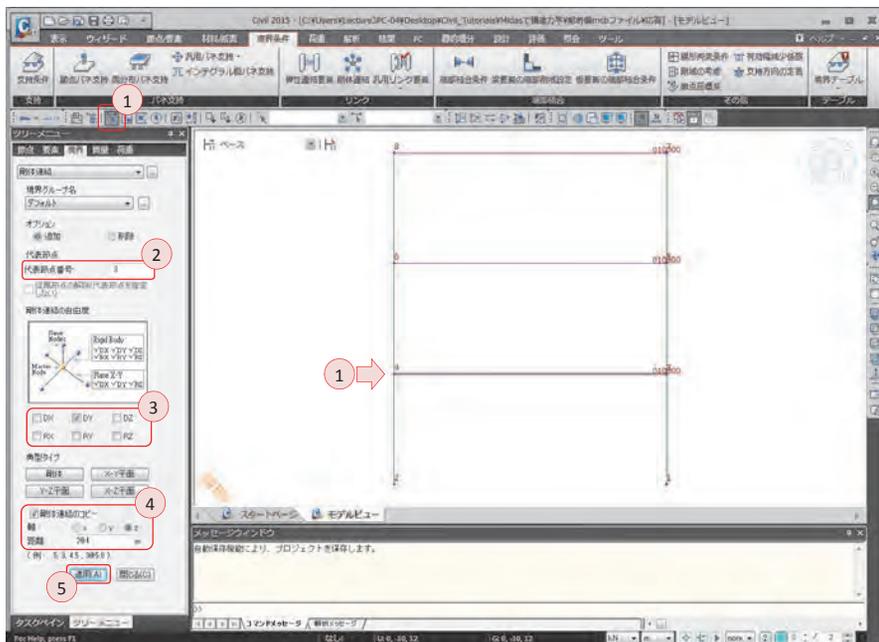
## 02.5 境界条件の入力

**02.5.1 剛体連結条件** 節点4の自由度を剛体連結条件を利用し、代表節点3に従属させる。上部層も同じく剛体連結を定義する。Y-Z平面内の挙動のみを許容するため、DY自由度のみ固定する。

メインメニュー [境界条件] > [リンク] > **[剛体連結]**

1. **単一選択**で**節点4**を選択
2. 代表節点番号：“3”入力
3. 剛体連結の自由度 > **DY** (チェックオン)
4. **剛体連結のコピー** (チェックオン)  
軸 > **[Z]** 選択、距離：“2@4”入力
5. **[適用]**クリック

▶ 図 7.12  
支持条件の入力



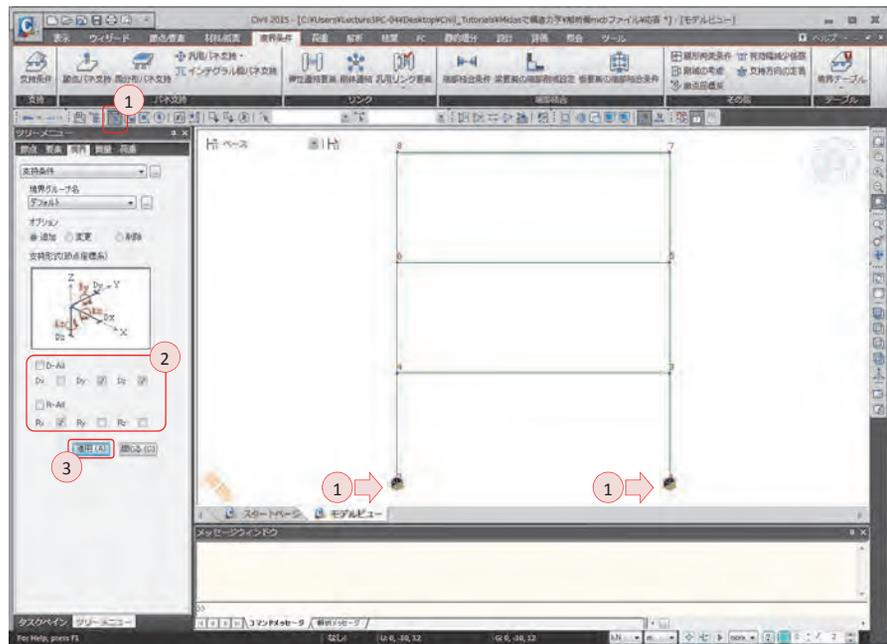
### 02.5.2 支持条件の 入力

柱の下端に固定端の支持条件を入力する。

メインメニュー [境界条件] > [支持] > [支持条件]

1. 単一選択で節点 1、節点 2 を選択
2. 支持形式 > Dy, Dz, Rx (チェックオン)
3. [適用]クリック

▶ 図 7.13  
支持条件の入力



## 02.6 荷重の入力

### 02.6.1 地震荷重 スペクトルの入力

1940年のエルセントロ (El Centro N-S) の地震データを利用し、応答スペクトル解析を実行する。応答スペクトル解析では固有値解析を通して求めた構造物のモード別の固有周期と応答スペクトルデータを利用し、計算された地震荷重を構造物に適用する。

1. ステータスバーで、長さ > 「mm」 に修正

メインメニュー [ツール] > [コマンドシェル] > *[MCT コマンドシェル]*

2. コマンドまたはデータ > 「\*SFUNCTION」 選択
3. [コマンド挿入] クリック
4. 空白、コンマ、ピリオドなどに注意し次のようにデータを入力
5. [実行] クリック、[閉じる] クリック

▶ 図 7.14

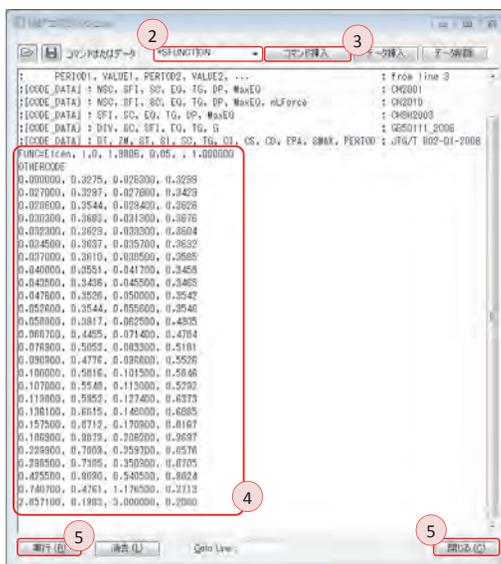
El Centro 地震スペクトルの入力



Tip

本チュートリアルでは El centro の地震データを直接入力したが、Civil では地震データを自動的に入力する機能が搭載されている。

[ツール>生成>地震波形  
データ生成]



SFUNC=Elcen, 1.0, 1.9806, 0.05, 1.000000			
OTHERCODE			
0.000000, 0.3275, 0.026300, 0.3299			
0.027000, 0.3297, 0.027800, 0.3429			
0.028600, 0.3544, 0.029400, 0.3626			
0.030300, 0.3683, 0.031300, 0.3676			
0.032300, 0.3629, 0.033300, 0.3604			
0.034500, 0.3637, 0.035700, 0.3632			
0.037000, 0.3610, 0.038500, 0.3585			
0.040000, 0.3551, 0.041700, 0.3458			
0.043500, 0.3436, 0.045500, 0.3465			
0.047600, 0.3528, 0.050000, 0.3542			
0.052600, 0.3544, 0.055600, 0.3546			
0.058800, 0.3917, 0.062500, 0.4305			
0.066700, 0.4455, 0.071400, 0.4784			
0.076900, 0.5053, 0.083300, 0.5181			
0.090900, 0.4776, 0.096600, 0.5526			
0.100000, 0.5816, 0.101500, 0.5846			
0.107000, 0.5548, 0.113000, 0.5292			
0.119800, 0.5952, 0.127400, 0.6373			
0.136100, 0.6615, 0.146000, 0.6885			
0.157500, 0.8712, 0.170900, 0.8167			
0.186900, 0.9679, 0.206200, 0.9697			
0.229900, 0.7009, 0.259700, 0.8576			
0.298500, 0.7385, 0.350900, 0.8705			
0.425500, 0.9090, 0.540500, 0.9824			
0.740700, 0.4761, 1.176500, 0.2713			
2.857100, 0.1983, 3.000000, 0.2000			

### 02.6.2 荷重条件の定義

入力した応答スペクトルデータを確認し、スペクトル荷重条件を定義する。地震応答スペクトルは当該地震が発生した時、各固有周期を持つ構造物に発生する最大応答値（変位、速度、加速度）をプロットしたものである。

メインメニュー [荷重/地震荷重] > [応答スペクトル解析データ] > [応答スペクトル]

1. スペクトル名 > **Elcen** (ダブルクリック)
2. 応答スペクトルデータのタイプ > 「無次元加速度」確認  
スケーリング > 倍率: “1”、重力加速度: “9806” 確認
3. [OK]クリック、[閉じる]クリック

メインメニュー [荷重/地震荷重] > [応答スペクトル解析データ] > [応答スペクトル荷重ケース]

4. 荷重ケース名: “RY” 入力、方向 > 「X-Y」選択、地震入力角度: “90” 入力
5. 応答スペクトル関数 > 関数名 > **Elcen (0.05)** (チェックオン)
6. オペレーション > [追加]クリック、[閉じる]クリック

▶ 図 7.15  
応答スペクトルの確認及び  
荷重ケースの入力

図 7.15 は、Midas Civil の「応答スペクトル」および「応答スペクトル荷重ケース」のダイアログボックスのスクリーンショットを示しています。左側の「応答スペクトルの追加/修正/表示」ダイアログには、関数名「Elcen」が選択されています。中央の「応答スペクトルデータのタイプ」セクションでは、「無次元加速度」が選択されており、スケールリングの倍率が「1」、重力加速度が「9806 mm/sec<sup>2</sup>」と設定されています。右側の「応答スペクトル荷重ケース」ダイアログでは、荷重ケース名「RY」、方向「X-Y」、地震入力角度「90 [deg]」、関数「Elcen (0.05)」が選択されています。下部には「追加」ボタンが強調されています。また、中央には「スペクトル関数」のグラフが描かれています。

周期 (sec)	スペクトルデータ (g)
1	0.0000
2	0.0263
3	0.0270
4	0.0278
5	0.0266
6	0.0294
7	0.0303
8	0.0313
9	0.0323
10	0.0333
11	0.0345
12	0.0357
13	0.0370
14	0.0385
15	0.0400
16	0.0417
17	0.0435
18	0.0458

**02.6.3 固有値解析条件の入力** 解析する際に考慮する固有モードの数を入力する。本チュートリアルでは固有値解析において構造物の 3 次モードまで求めた結果を、応答スペクトル解析に適用する。

メインメニュー [解析] > [解析制御] > **[固有値解析]**

1. 解析タイプ > 「固有ベクトル」選択 > 「Subspace Iteration」選択
2. 固有ベクトル > 解析するモード数 : “3” 入力
3. 固有値制御データ > 繰り返し回数 : “20” 入力  
負空間次元 : “0” 入力  
収束判定値 : “1e-010” 入力
4. [OK]クリック

▶ 図 7.16  
固有値解析条件の入力



02.6.4 応答スペクトル解析条件の入力

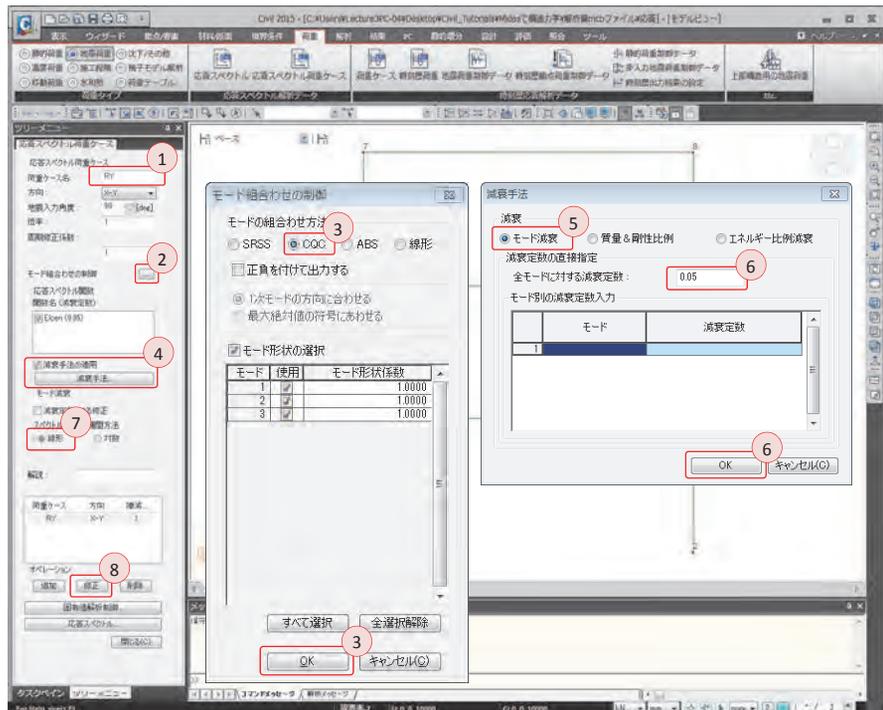
各モードの解析結果を組み合わせる方法を決める。

本チュートリアルでは、CQC(Complete Quadratic Combination)法を適用し、構造物の減衰比は5%と仮定する。

メインメニュー [荷重/地震荷重]>[応答スペクトル解析データ]>[**応答スペクトル荷重**-ス]

1. 荷重ケース名 > 「RY」 確認
2. モード組み合わせの制御の [ ] をクリック
3. モード組み合わせ方法 > 「CQC」 選択、[OK] クリック
4. **減衰手法の適用** (チェックオン)、[**減衰手法**] クリック
5. 減衰 > 「**モード減衰**」 選択
6. 減衰定数の直接指定 > 全モードに対する減衰定数: “0.05”、[OK] クリック
7. スペクトルデータの補間方法 > 「**線形**」 選択
8. [**修正**] クリック

▶ 図 7.17  
応答スペクトル解析条件



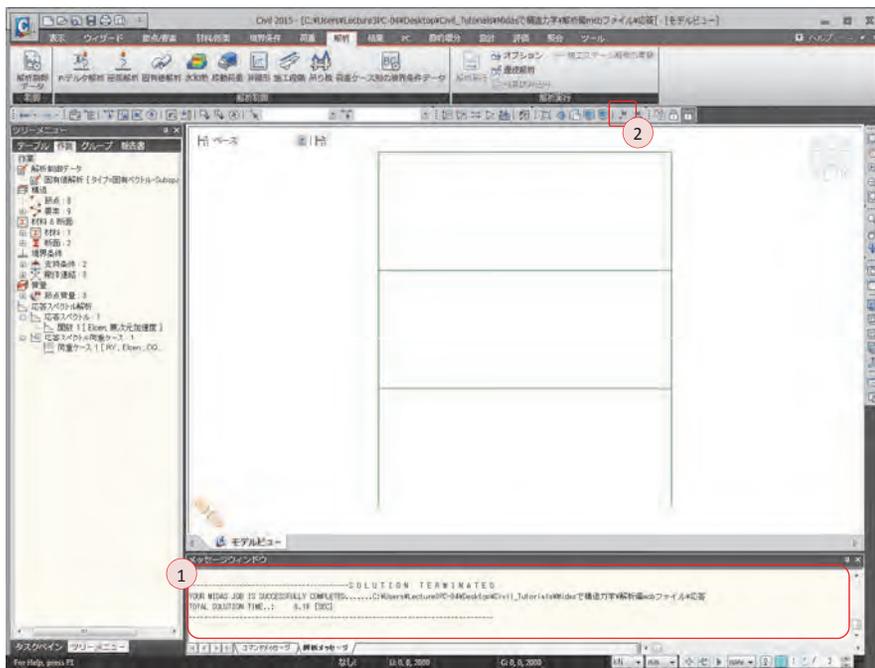
## 02.7 構造解析の実行

モデルの生成及び荷重の入力が終わったら固有値解析及び応答スペクトル解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認
2. 節点番号 (トグルオフ)

▶ 図 7.18  
解析の正常終了メッセージ



## 02.8 解析結果の確認

### 02.8.1 固有値結果の確認

まず、固有値解析の結果から解析モデルの固有振動数を確認する。

メインメニュー [結果] > [テーブル] > [結果テーブル] > **[固有モード形状]**

1. フィルタリングダイアログ > [OK] クリック
2. 周期の確認 (1次、2次、3次モードでそれぞれ、0.6819、0.2433、0.1684)
3. 有効質量比の確認 (3次モードの並進Y、回転Xに対し全て 100%)
4. モード刺激係数の確認 (並進Yにおける1次、2次、3次それぞれ、0.44、0.13、-0.05)

▶ 図 7.19  
固有値解析の結果テーブル



**Tip**  
固有値解析の結果で、有効質量比は 90%以上確保される必要がある。

節点	モード	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ						
<b>固有値解析</b>													
モード No		振動数		周期	許容誤差								
		(rad/sec)	(cycle/sec)	(sec)									
1		9.213226	1.468331	0.681374	5.0225e-016								
2		25.814802	4.108569	0.243394	0.0000e+000								
3		37.303643	5.937059	0.168434	3.2679e-016								
<b>有効質量比</b>													
モード No		並進-X		並進-Y		並進-Z		回転-X		回転-Y		回転-Z	
		質量(%)	合計(%)	質量(%)	合計(%)	質量(%)	合計(%)	質量(%)	合計(%)	質量(%)	合計(%)	質量(%)	合計(%)
1		0.00	0.00	91.41	91.41	0.00	0.00	98.90	98.90	0.00	0.00	0.00	0.00
2		0.00	0.00	7.48	98.89	0.00	0.00	1.03	99.93	0.00	0.00	0.00	0.00
3		0.00	0.00	1.10	100.00	0.00	0.00	0.07	100.00	0.00	0.00	0.00	0.00
モード No		並進-X		並進-Y		並進-Z		回転-X		回転-Y		回転-Z	
		質量	合計	質量	合計	質量	合計	質量	合計	質量	合計	質量	合計
1		0.00	0.00	0.19	0.19	0.00	0.00	15506776.	15506776.	0.00	0.00	0.00	0.00
2		0.00	0.00	0.02	0.21	0.00	0.00	16179506	15668971.	0.00	0.00	0.00	0.00
3		0.00	0.00	0.00	0.21	0.00	0.00	1142801	15680000.	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>モード刺激係数出力 (kN/mm)</b>													
モード No		並進-X		並進-Y		並進-Z		回転-X		回転-Y		回転-Z	
		値		値		値		値		値		値	
1		0.00		0.44		0.00		0.00		0.00		0.00	
2		0.00		0.13		0.00		0.00		0.00		0.00	
3		0.00		-0.05		0.00		0.00		0.00		0.00	
<b>モードの方向係数出力</b>													
モード No		並進-X		並進-Y		並進-Z		回転-X		回転-Y		回転-Z	
		値		値		値		値		値		値	
1		0.00		49.03		0.00		51.97		0.00		0.00	
2		0.00		87.89		0.00		12.11		0.00		0.00	
3		0.00		93.81		0.00		61.9		0.00		0.00	
<b>固有ベクトル (kN/mm)</b>													

モード別の有効質量の和が 3 次モードまで 100%確保されていることから、構造物の動的特性がすべて反映されたことが確認できた。

従って、固有値解析の結果を応答スペクトル解析に適用できる。

02.8.2 変位の確認

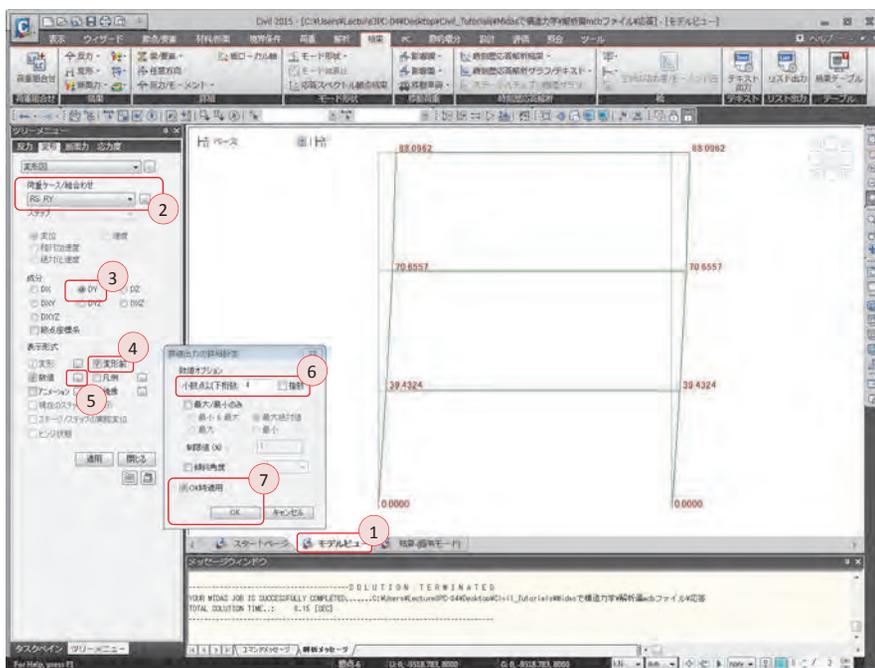
各層で発生する変位を確認する。

1. モデルビュータブクリック

メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変形図]

2. 荷重ケース/組み合わせ「RS:RY」選択
3. 成分「DY」選択
4. 表示形式「変形前」(チェックオン)
5. 数値の表示をオンにする
6. 小数点以下桁数: "4" 入力
7. OK時適用 (チェックオン)、[OK]クリック

▶ 図 7.20  
変位の結果



各層の変位がそれぞれ、39.4324mm、70.6557mm、88.0962mm であることが確認できる。

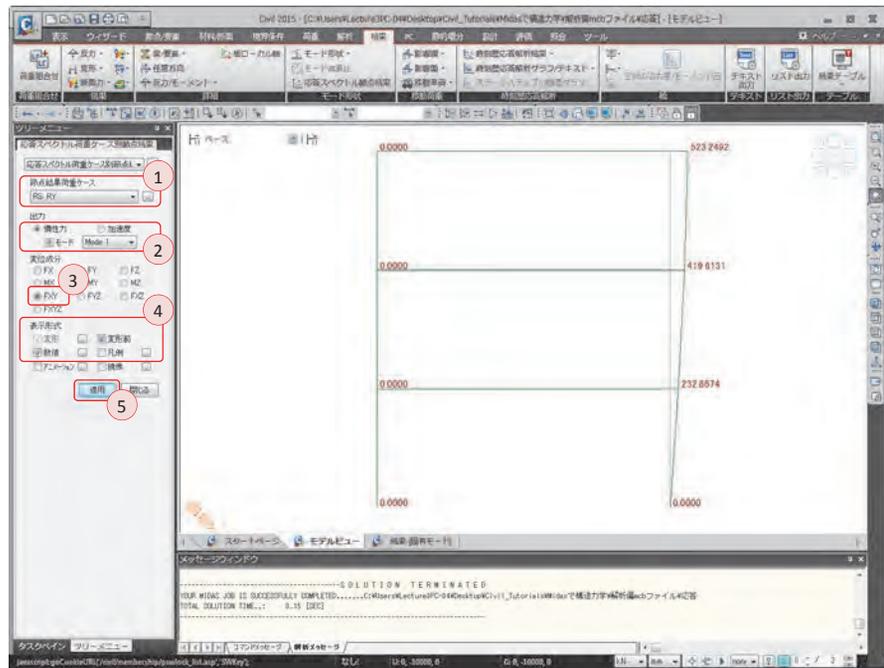
02.8.3 層せん断力の  
確認

応答スペクトル解析により発生した横方向の層せん断力を確認する。

メインメニュー [結果] > [モード形状] > [応答スペクトル節点結果]

1. 節点結果荷重ケース > 「RS:RY」 選択
2. 出力 > 「慣性力」 選択 > モード「モード1」 選択
3. 変位成分 > 「FX」 選択
4. 表示形式 > 変形前、数値 (チェックオン)
5. [適用] クリック

▶ 図 7.21  
層せん断力の結果



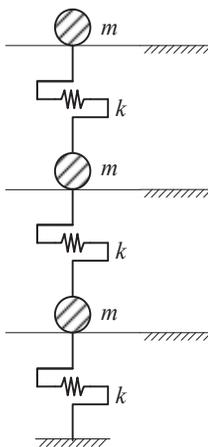
各層の層せん断力はそれぞれ、232.8674kN、419.6131kN、523.2492kNであることが確認できる。

## 03. 構造計算の解説

### 03.1 力学的概念の理解及び数値計算

本チュートリアルでは梁の剛性が柱の剛性より  $10^6$  倍大きいので、梁が柱を完全に拘束していると仮定できる。従って、次の図のような構造と同じ挙動を示すと仮定できる。ここで、質量  $m$  は水平方向にのみ移動できる。

▶ 図 7.22  
固有値解析のための質量分布  
の概念図



与えられた条件により各階の質量と横剛性を求めると次のようになる。

$$\text{各階の水平剛性} : k = 2 \times \frac{12EI}{\ell^3} = 30,000 \text{ N/mm}$$

$$\text{層質量} : m = 70 \text{ N} \cdot \text{sec}^2 / \text{mm}$$

固有値解析のための質量と剛性行列を次に示す。

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

固有値解析は自由振動解析に相当するため、行列式 (determinant) はゼロ (0) にならなければならない。

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{または、} \quad -\omega^6 + 5\omega_n^2\omega^4 - 6\omega_n^4\omega^2 + \omega_n^6 = 0$$

ここで、  $\omega_n = k/m$

上の方程式は  $\omega^2$  に対する 3 次方程式で、3 次方程式の解法により求めた固有値は Civil による解析の結果と一致する。

▶表 7.1  
固有値計算の結果

	1 次モード	2 次モード	3 次モード
$\omega$	9.21	25.81	37.3
T (固有周期)	0.6820	0.2434	0.1684

各固有値に対するモード形状の行列は次のようになる。計算過程は省く。

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] = \begin{bmatrix} 1.2397 & 2.7855 & -2.2338 \\ 2.2338 & 1.2397 & 2.7855 \\ 2.7855 & -2.2338 & -1.2397 \end{bmatrix}$$

刺激係数は次のように計算し、その結果は Civil の解析結果と一致する。

$$\Gamma_i = \frac{\phi_i^T M 1}{\phi_i^T M \phi_i} = \frac{\phi_i^T M 1}{m_i^*} = \frac{\sum_{j=1}^3 m_j \phi_{ji}}{\sum_{j=1}^3 m_j \phi_{ji}^2} = \frac{\sum_{j=1}^3 \phi_{ji}}{\sum_{j=1}^3 \phi_{ji}^2} = \frac{1.2397 + 2.2338 + 2.7855}{1.2397^2 + 2.2338^2 + 2.7855^2} = 0.4381$$

同じ方法で 2 次及び 3 次モードに対する値も算定できる。

$$\Gamma_2 = 0.1254, \quad \Gamma_3 = -0.0482$$

応答スペクトルの値の算定に必要な結果値を次の表にまとめる。

▶表 7.2  
モードごとの固有値結果

	1次モード	2次モード	3次モード
固有周期 $T_i$	0.6820	0.2434	0.1684
モード刺激係数 $\Gamma_i$	0.4381	0.1254	-0.0482
加速度応答スペクトル $S_a(T_i) = S_{ai}$	0.6246	0.7717	0.8269
変位応答スペクトル $S_d(T_i) = S_{di}$	72.1497	11.3557	5.8267

ここで、加速度応答スペクトルは応答スペクトル解析の結果による値を直線補間で算定しており、変位応答スペクトルは  $S_d(T_i) = S_a(T_i) / \omega^2$  で計算する。

以上の結果から、各階の層せん断力は次のように算定できる。

$$\begin{aligned}
 V &= M\Phi S_a \Gamma g = [V_1 \quad V_2 \quad V_3] \\
 &= \begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2397 & 2.7855 & -2.2338 \\ 2.2338 & 1.2397 & 2.7855 \\ 2.7855 & -2.2338 & -1.2397 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4381 \times 0.6246 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1254 \times 0.7717 & 0 \\ 0 & 0 & -0.04816 \times 0.8269 \end{bmatrix} g \\
 &= \begin{bmatrix} 232.850 & 185.031 & 61.060 \\ 419.570 & 82.349 & -76.140 \\ 523.195 & -148.384 & 33.887 \end{bmatrix} kN
 \end{aligned}$$

ここで、最初のモードに対する層せん断力の算定手順を次に示す。

$$V_1 = \Gamma_1 m (S_{a1} g) \phi_1 = 9.806 \times 70 \times (0.6246 \times 0.4381) \times \begin{Bmatrix} 1.2397 \\ 2.2338 \\ 2.7855 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 232.850 \\ 419.570 \\ 523.195 \end{Bmatrix} kN$$

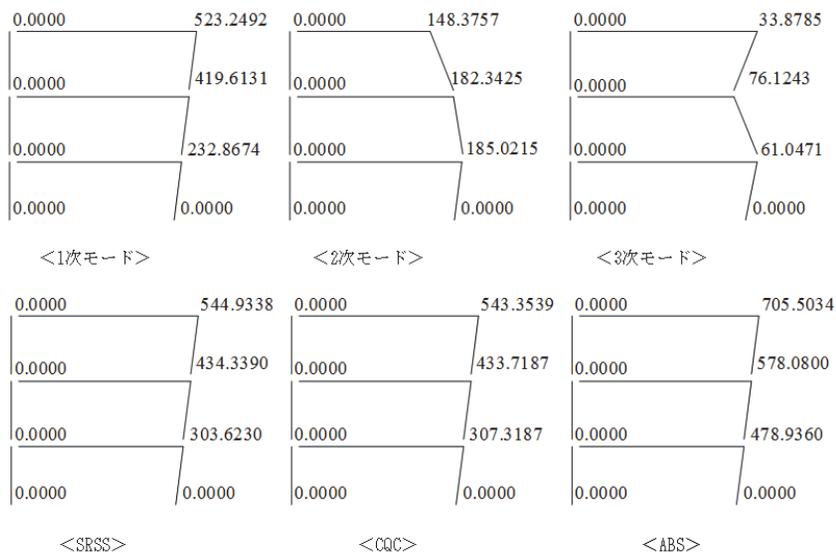
各モードで求めた層せん断力は SRSS、CQC または、ABS などの方法で組み合わせる。その結果と Civil による解析結果とを比較してまとめたものが次の表である。計算結果において微少な違いがあるのは軸変形の影響や小数点以下の桁数の処理方式（エクセルとプログラム）の違いなどに起因するものと考えられる。軸変形の影響を排除するため、Civil では柱の断面積を大きく設定したが、完全には排除されていない。

▶表 7.3  
モード別層せん断力

せん断力の位置	計算方法	1次モード	2次モード	3次モード	SRSS	CQC	ABS
3階	数値計算(kN)	523.195	-148.384	33.887	544.884	546.495	705.465
	数値計算/ Civil	99.99%	100.01%	100.02%	99.99%	100.58%	99.99%
2階	数値計算(kN)	419.570	82.349	-76.140	434.301	429.523	578.059
	数値計算/ Civil	99.99%	100.01%	100.02%	99.99%	99.03%	100.00%
1階	数値計算(kN)	232.850	185.031	61.060	303.618	307.496	478.942
	数値計算/ Civil	99.99%	100.01%	99.93%	100.00%	100.06%	100.00%
基礎	数値計算(kN)	1175.615	118.997	18.806	1181.772	1183.445	1313.418
	数値計算/ Civil	99.99%	100.01%	99.72%	99.90%	99.95%	99.91%

例：SRSSによる基礎のせん断力 =  $\sqrt{1176.615^2 + 118.997^2 + 18.806^2} = 1181.772 \text{ kN}$

▶図 7.23  
モード別の層せん断力



各階の変位は次のように算定される。

$$\begin{aligned}
 D &= \Phi \Gamma S_d = [D_1 \quad D_2 \quad D_3] \\
 &= \begin{bmatrix} 1.2397 & 2.7855 & -2.2338 \\ 2.2338 & 1.2397 & 2.7855 \\ 2.7855 & -2.2338 & -1.2397 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4381 \times 72.1497 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1254 \times 11.3557 & 0 \\ 0 & 0 & -0.04816 \times 5.8267 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 39.188 & 3.966 & 0.627 \\ 70.612 & 1.765 & -0.782 \\ 88.052 & -3.181 & 0.348 \end{bmatrix} mm
 \end{aligned}$$

ここで、最初のモードに対する層変位の算定過程は次のように表せる。

$$D_1 = \Gamma_1 S_{d1} \phi_1 = 0.4381 \times 72.1497 \times \begin{Bmatrix} 1.2397 \\ 2.2338 \\ 2.7855 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 39.188 \\ 70.612 \\ 88.052 \end{Bmatrix} mm$$

それぞれのモードで求めた層変位は SRSS、CQC または、ABS などの方法で組合わせる。その結果と Civil との結果の比較をまとめたものが次の表である。

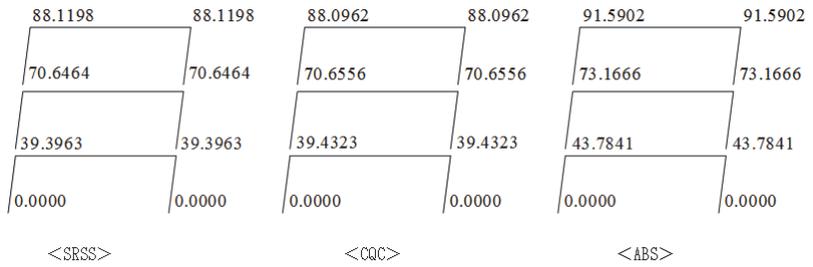
変位の位置	計算方法	1次モード	2次モード	3次モード	SRSS	CQC	ABS
3階	数値計算 (mm)	88.052	-3.181	0.348	88.110	88.087	91.581
	数値計算 / Civil	-	-	-	99.99%	99.99%	99.99%
2階	数値計算 (mm)	70.612	1.765	-0.782	70.639	70.648	73.159
	数値計算 / Civil	-	-	-	99.99%	99.99%	99.99%
1階	数値計算 (mm)	39.188	3.966	0.627	39.393	39.429	43.781
	数値計算 / Civil	-	-	-	99.99%	99.99%	99.99%

例：SRSS による 1 階の層変位 =  $\sqrt{39.188^2 + 3.966^2 + 0.627^2} = 39.393mm$

▶表 7.4  
層変位



▶ 図 7.24  
層変位



# 8.

# プレストレス 解析

## TABLE OF CONTENTS

### 01 概念の理解

---

01.1 プレストレス解析の概念 8-1

### 02 チュートリアル

---

02.1 モデルの概要 8-4

02.2 作業環境の設定 8-5

02.3 材料及び断面の定義 8-7

02.4 節点及び要素の生成 8-8

02.5 境界条件の入力 8-10

02.6 荷重の入力 8-11

02.7 構造解析の実行 8-13

02.8 解析結果の確認 8-14

### 03 構造計算の解説

---

03.1 力学的概念の理解  
及び数値計算 8-16

04 練習問題 8-19

---



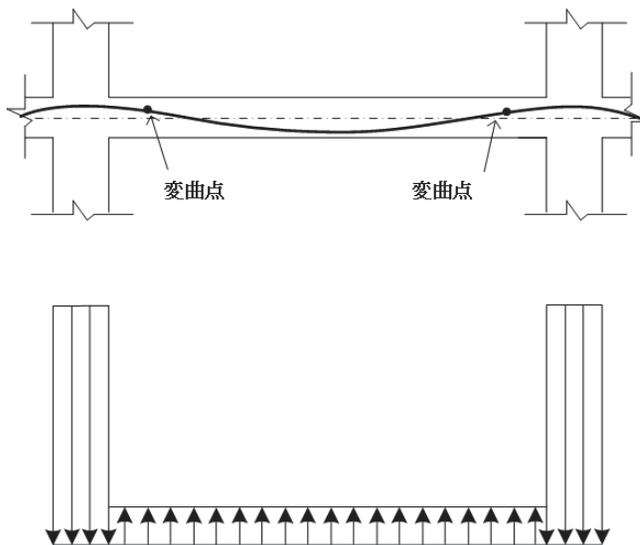
## 01.概念の理解

### 01.1 プレストレス解析の概念

#### 01.1.1 解析の概念

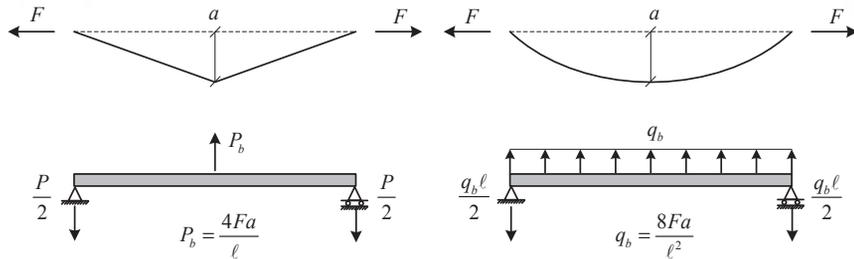
プレストレス構造は PC 鋼材に引張力を加え、PC 鋼材にかかった力がコンクリートに伝わる効果を利用した構造である。図 8.1 に示すように、PC 鋼材が設置され、両側に引張力を加えると、スラブの中央で上向きに等分布荷重が作用するのと同じ効果が生じる。従って、固定荷重や活荷重のような鉛直荷重は下向きであるため、プレストレスにより鉛直荷重が相殺される効果が得られる。また、相殺された鉛直力は支持構造である柱に下向きの力として伝達される。以上のような概念を利用した解析法を荷重バランス法と呼ぶ。

▶図 8.1  
プレストレスの効果



PC 鋼材が折れた形や曲線で配置された場合、次のような方法で上向きの荷重が算定できる。

▶図 8.2  
PC鋼材の形状と効果

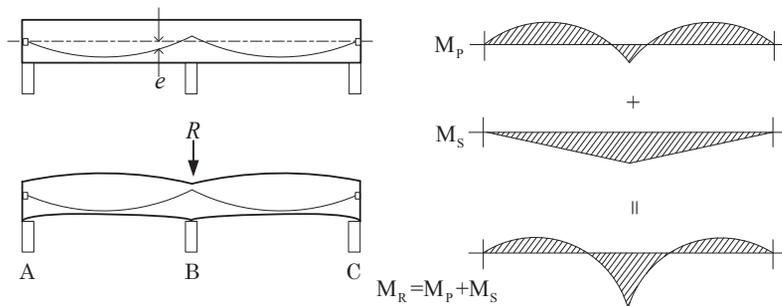


連続梁に対するプレストレス効果は変形法の概念で理解できる。図 8.3 のような連続梁で緊張力が働く場合、中央部に支点がないと中央部は上向きにたわみが発生する。しかし、実際は中央に支点があるためたわみは発生しない。従って、中央部にたわみが発生しないように働く反力は B 点で発生すると考えられる。このような反力によるモーメントを 2 次モーメント (secondary moment,  $M_s$ ) といい、緊張力によるモーメントを 1 次モーメント (primary moment,  $M_p$ ) という。ここで 1 次モーメントは緊張力の大きさ  $P$  に PC 鋼材の偏心距離  $e$  を乗じた値で定義される。なお、実際に構造物に発生するモーメント、すなわち、以上の計算により求められるモーメントを結果モーメント (resulting moment,  $M_R$ ) という。これらのモーメントの関係は以下のように示される。

▶式 8.1

$$M_R = M_p + M_s$$

▶図 8.3  
連続梁のモーメント



---

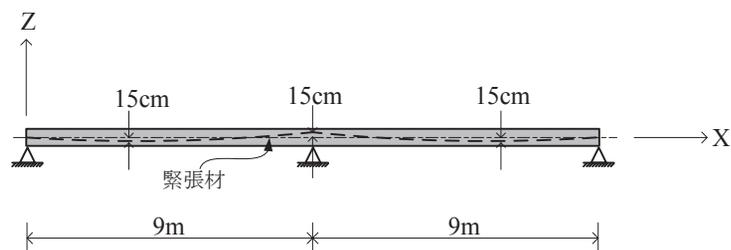
結果モーメントは緊張材の偏心距離の効果によるモーメントと支点の反力によるモーメントを合計したものである。静定構造物の場合には支点が変形を拘束しないことから、 $M_s$ が発生しないため $M_R = M_p$ となる。結果的に2次モーメントの大きさは結果モーメントから1次モーメントを除する方法( $M_s = M_R - M_p$ )で算定できる。

## 02.チュートリアル

## 02.1 モデルの概要

下図のように緊張材が配置された 2 スパン連続梁に対し、プレストレスに対する曲げモーメントを確認する。

▶図 8.4  
解析モデル



- **材料**  
弾性係数 :  $30,000 \text{ N/mm}^2$
- **断面**  
長方形 :  $300 \times 550$
- **荷重**  
放物線状に配置された緊張材のプレストレスによる荷重  $900 \text{ kN}$  作用

## 02.2 作業環境の設定

### 02.2.1 単位系の設定

新しいプロジェクトを開き、ファイルを保存する。

メインメニュー  >  新規プロジェクト...

メインメニュー  >  保存

1. ファイル名：“プレストレス”と入力し、[保存]をクリック

単位系を設定する。

メインメニュー [ツール] > [セッティング] > [単位系]

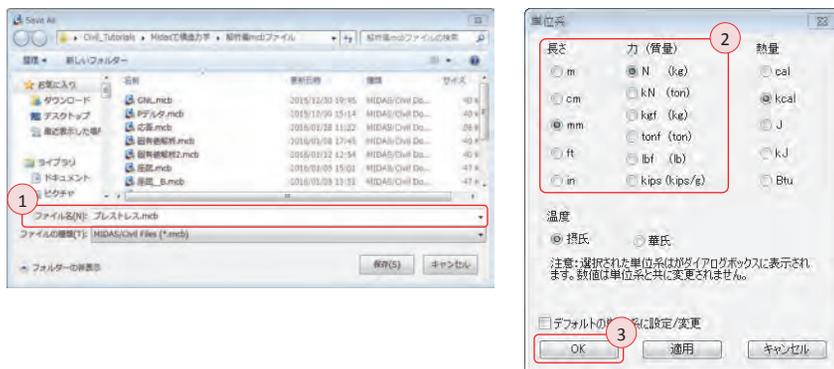
2. 長さ > 「mm」、力 > 「N(kg)」を選択

3. [OK]をクリック

▶ 図 8.5

(a) ファイルの保存

(b) 単位系の設定



Tip

単位系の設定は画面下のステータスバーでも簡単に操作できる。

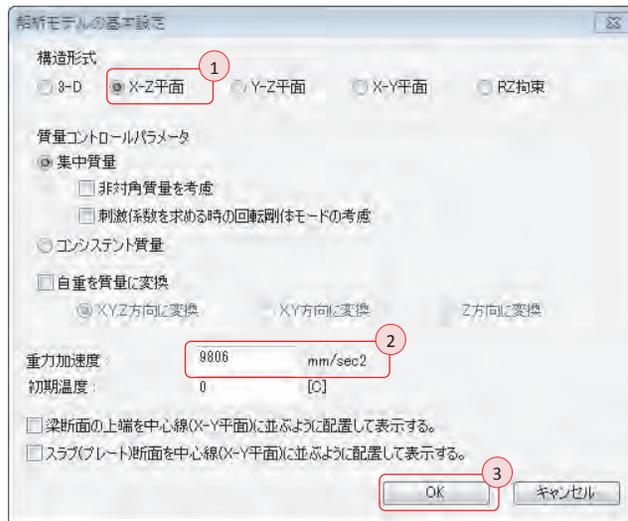
### 02.2.2 作業平面の 設定

本チュートリアルでは全体座標系（Global Coordinate System, GCS）を基準に X-Z 平面の挙動のみを許容するため、構造形式を 2-D 挙動の構造物（XZ 平面）と指定する。

メインメニュー [ウィザード] > [基本設定] > **[基本設定]**

1. 構造形式 > 「X-Z 平面」を選択
2. 重力加速度：「9806」確認
3. [OK]をクリック

▶ 図 8.6  
作業平面の設定



## 02.3 材料及び断面の定義

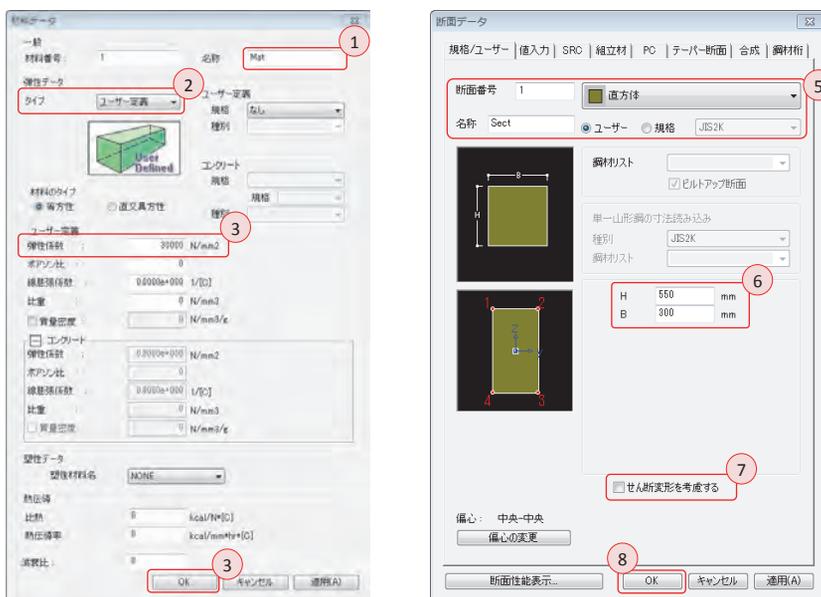
モデルに使用する材料及び断面を入力する。材料データはユーザーが直接数値を入力する「ユーザー定義」を、断面データは「規格/ユーザー」機能を利用する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > **[材料特性]**

1. [追加...] クリック、名称：“Mat” 入力
2. 弾性データ > タイプ > 「ユーザー定義」 選択
3. ユーザー定義 > 弾性係数：“30000” 入力、[OK] クリック
4. 断面タブをクリック、[追加] クリック
5. 断面形状 > 「直方体」 選択、名称：“Sect” 入力、「ユーザー」 選択
6. H：“550”、B：“300” 入力
7. せん断変形を考慮する (チェックオフ)
8. [OK]、[閉じる] クリック

▶ 図 8.7

(a) 材料の定義  
(b) 断面の定義



## 02.4 節点及び要素の生成

### 02.4.1 節点の生成

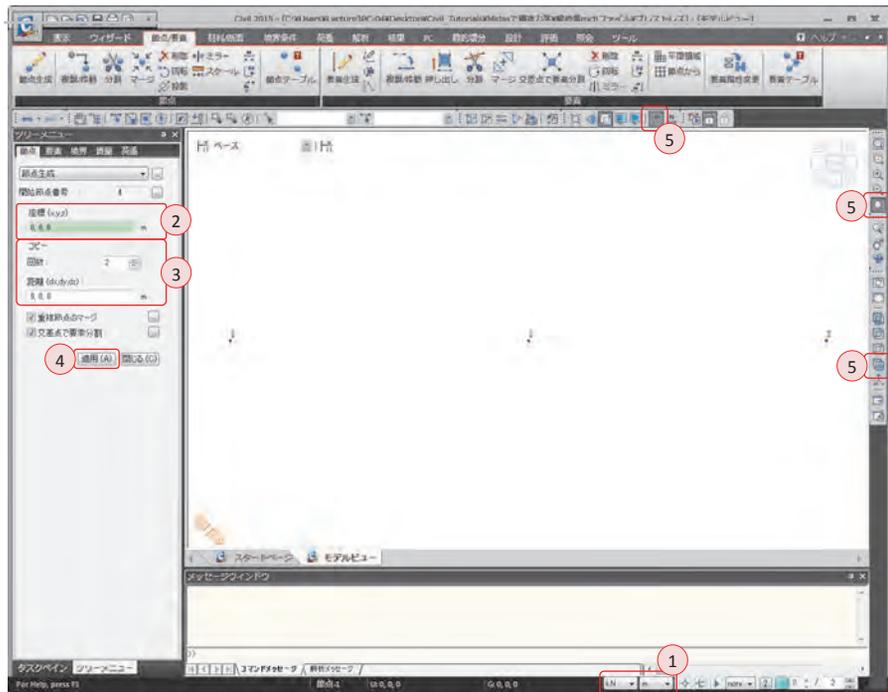
梁の支点の位置に節点を生成する。

1. ステータスバーで、力：「kN」、長さ：「m」修正

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [節点生成]

2. 座標 (x, y, z) : “0, 0, 0” 入力
3. コピーの回数 : “2” 入力、距離(dx, dy, dz) : “9, 0, 0” 入力
4. [適用]クリック
5. 節点番号、自動フィット、正面 (トグルオン)

▶ 図 8.8  
節点の生成



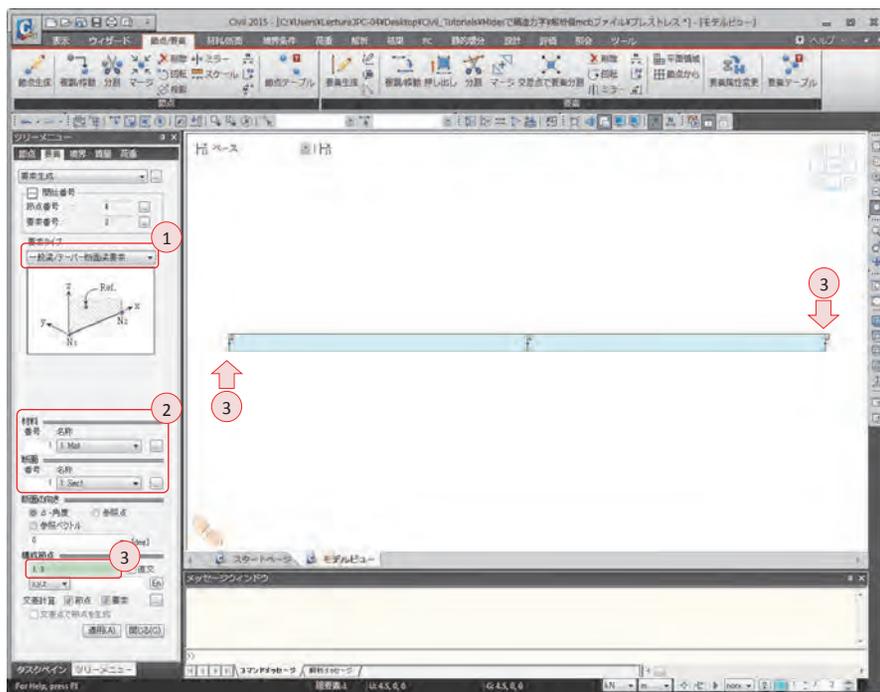
02.4.2 要素の生成

節点をつなげて要素を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [要素生成]

1. 要素タイプ>「一般梁/テーパ断面梁要素」を選択
2. 材料>「1:Mat」を選択、断面>「1:Sect」を選択
3. 構成節点の入力ボックス内をクリックし、節点1と節点3を順番にクリック

▶ 図 8.9  
要素の生成



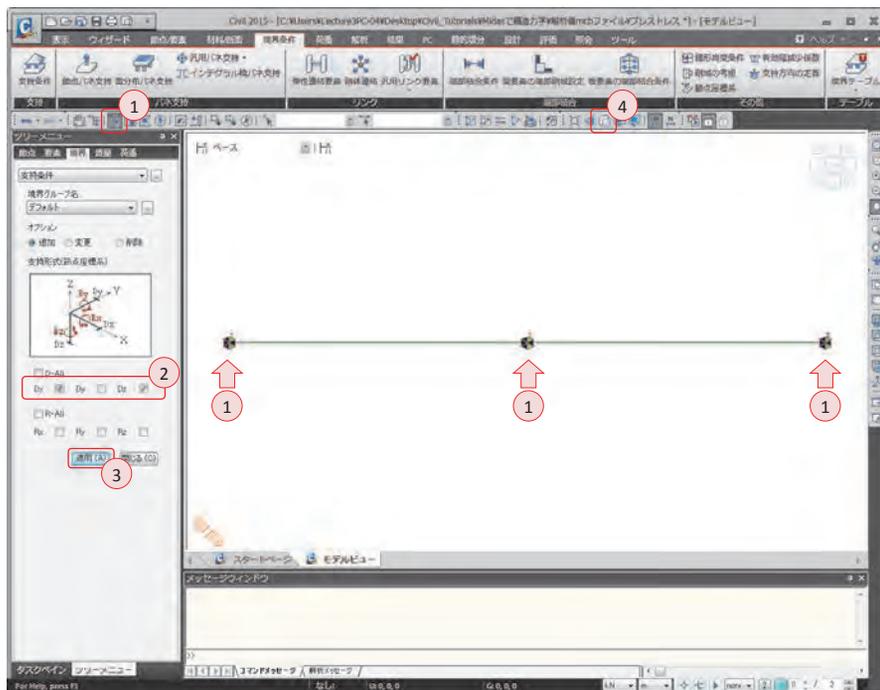
## 02.5 境界条件の入力

2 スパン連続梁の支点到ピン支持条件を入力する。

メインメニュー [境界条件] > [支持] > **[支持条件]**

1.  単一選択で節点1、節点2、節点3を選択
2. 支持形式 >  $D_x$ 、 $D_z$  (チェックオン)
3. [適用]
4. 隠線除去表示 (トグルオフ)

▶ 図 8.10  
支持条件の入力



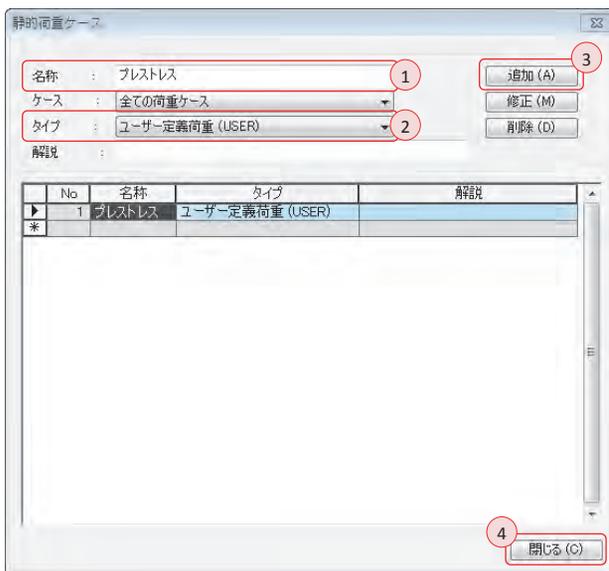
## 02.6 荷重の入力

02.6.1 荷重条件の定義 緊張材に与えられるプレストレスを入力するため、まず荷重条件を定義する。

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重ケース生成] > [静的荷重ケース]

1. 名称：“プレストレス” 入力
2. タイプ：「ユーザー定義 (USER)」 選択
3. [追加] クリック
4. [閉じる] クリック

▶ 図 8.11  
荷重条件の定義



- 02.6.2 プレストレス荷重の入力
- 2 スパン連続梁に緊張材を配置する際のプレストレス荷重及び偏心距離を入力する。緊張材は支間の中央と中央支点から偏心距離を持つ放物線で配置される。ここでは有効プレストレス荷重を 900kN とする。

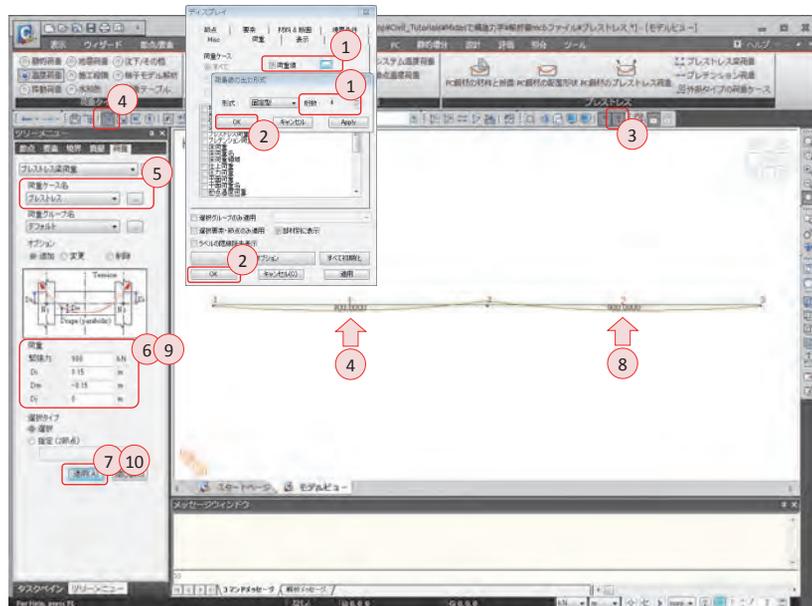
メインメニュー [表示] > [ディスプレイ] > [ディスプレイ]

1. 荷重タブ > 荷重値 (チェックオン)、 クリック > 桁数: “4” 入力
2. [OK] クリック、[OK] クリック
3. 要素番号 (トグルオン)

メインメニュー [荷重/温度御荷重] > [プレストレス] > [プレストレス梁荷重]

4.  単一選択で要素 1 選択
5. 荷重ケース名 > 「プレストレス」 選択
6. 荷重 > 緊張力: “900”、Di: “0”、Dm: “-0.15”、Dj: “0.15”
7. [適用] クリック
8.  単一選択で要素 2 選択
9. 荷重 > 緊張力: “900”、Di: “0.15”、Dm: “-0.15”、Dj: “0”
10. [適用] クリック

▶ 図 8.12  
プレストレス荷重の入力



## 02.7 構造解析の実行

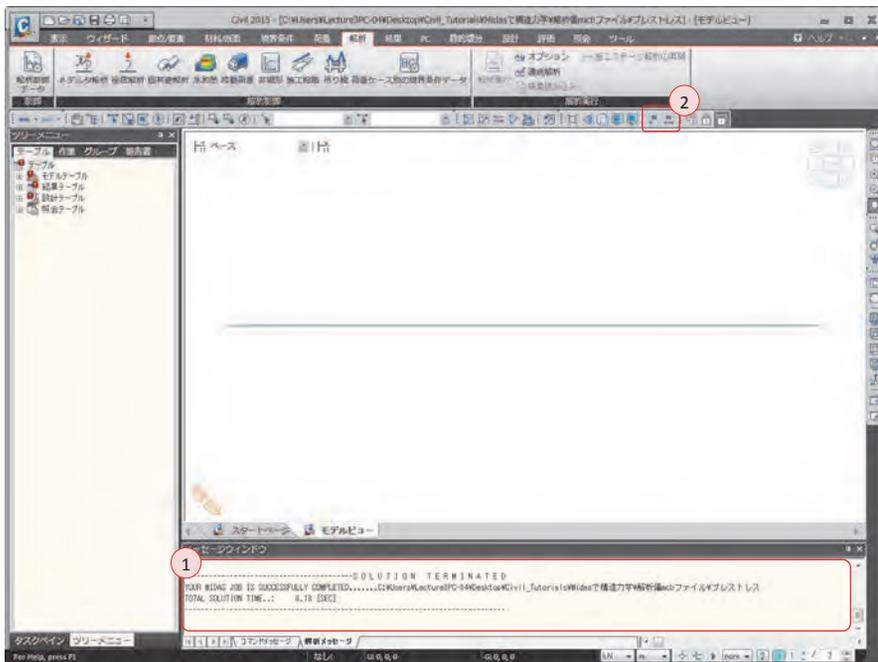
モデルの生成及び荷重の入力が終わったら構造解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

2. 節点番号、要素番号 (トグルオフ)

▶ 図 8.13  
解析の正常終了メッセージ



## 02.8 解析結果の確認

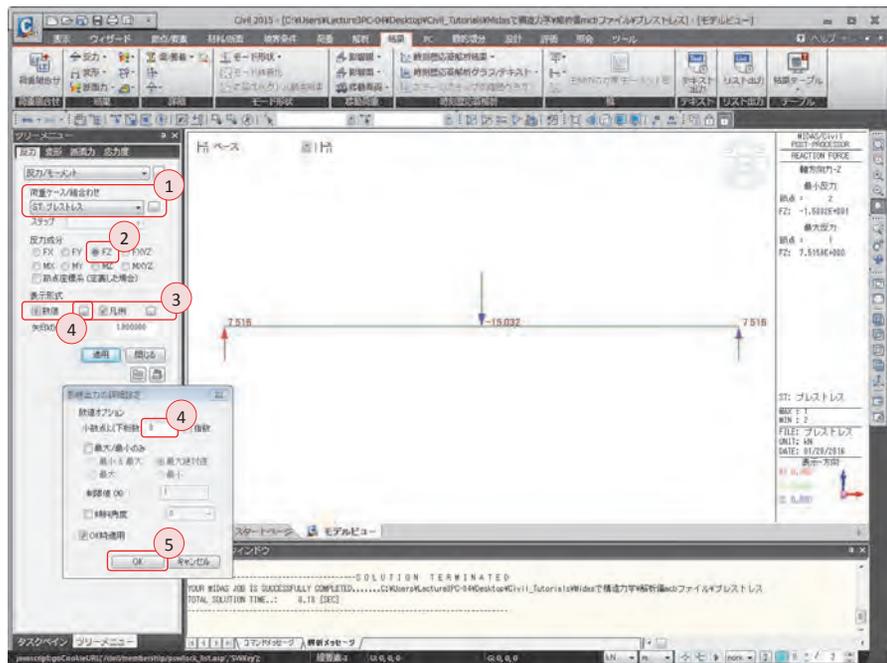
### 02.8.1 反力

支点で発生する反力を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [反力▼] > [反力/モーメント]

1. 荷重ケース/組み合わせ > 「ST:プレストレス」 選択
2. 反力成分 > 「FZ」 選択
3. 表示形式 > 数値、凡例 (チェックオン)
4. 数値の  クリック、小数点以下桁数: “3” 入力
5. [OK] クリック

▶ 図 8.14  
プレストレス荷重による反力



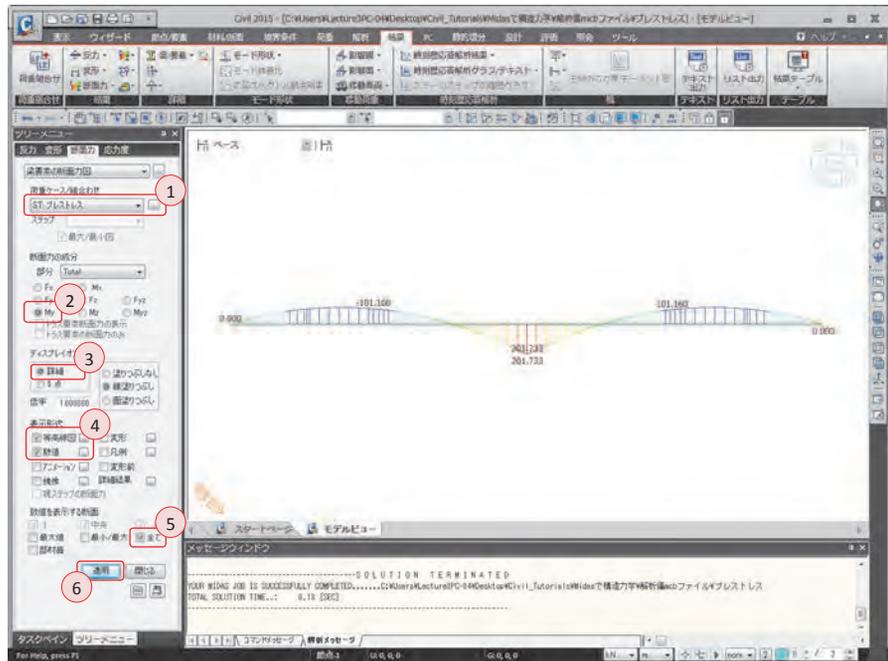
02.8.2 断面力

プレストレス荷重による曲げモーメントを確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [断面力] > [梁要素の断面力図]

1. 荷重ケース/組み合わせ > 「ST:プレストレス」 選択
2. 断面力成分 > 「My」 選択
3. ディスプレイオプション > 「詳細」 選択
4. 表示形式 > 等高線図、数値 (チェックオン)
5. 数値を表示する断面 > 「全て」 選択
6. [適用] クリック

▶ 図 8.15  
プレストレス荷重による  
曲げモーメント

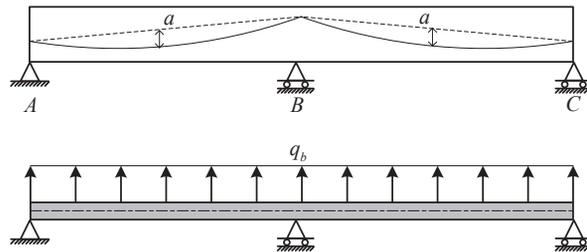


## 03. 構造計算の解説

### 03.1 力学的概念の理解及び数値計算

チュートリアルモデルは 2 スパン構造であるため、プレストレスによる効果は次のように表すことができる。

▶ 図 8.16  
解析モデル



このモデルでプレストレスによる上向きの分布荷重は以下のように求められる。

$$a = 150 + 0.5 \times 150 = 225 \text{ mm} = 0.225 \text{ m}$$

$$q_b = \frac{8 \times 900 \text{ kN} \times 0.225 \text{ m}}{(9 \text{ m})^2} = 20 \text{ kN/m}$$

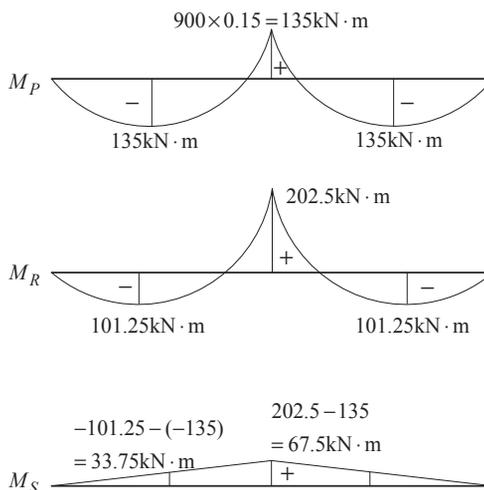
従って、B 点のモーメントは次のように算定できる。

$$M_B = \frac{q_b \ell^2}{8} = \left( \frac{8Fa}{\ell^2} \right) \frac{\ell^2}{8} = Fa = 202.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Civil による解析結果は  $M_B = 201.733 \text{ kN} \cdot \text{m}$  であり、多少の違いが発生したが、その理由としては、Civil による解析と数値計算におけるプレストレス効果に対する考え方の違いが挙げられる。Civil では曲線の PC 鋼材を分割された複数の直線と想定して計算する。なお、数値計算による 2 次モーメントを次に示す。

$$M_s = M_R - M_p = 202.5 - 135 = 67.5 \text{ kN}$$

▶ 図 8.17  
部材力図



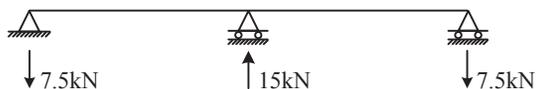
支点反力は実際の荷重  $q_b$  が上向きで作用すると仮定して計算してはならない。もし、荷重の実際の値が  $q_b$  とすると、両端では  $3q_b \ell^2 / 8$ 、中央では  $10q_b \ell^2 / 8$  の反力が下向きに発生するはずである。しかし、プレストレスのみ存在する場合は力の釣り合い条件により鉛直方向の力の合力はゼロ (0) とならなければならない。

プレストレスによる反力は 2 次モーメントと関連するため、2 次モーメントから反力が計算できる。本チュートリアルでは中央での 2 次モーメントが  $67.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$  であるため、B 点の反力は次のように計算できる。

$$67.5 = \frac{R_B \times (2 \times 9)}{4}, \quad R_B = 15 \text{ kN}$$

従って、全体的な反力を図で表すと以下ようになる。

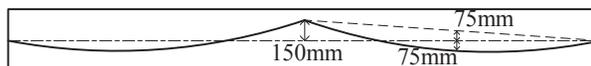
▶ 図 8.18  
反力図



前述した結果モーメントの解析過程をみると、結果モーメントは $a$ と $F$ により決まることが分かる。この時、 $F$ は与えられる条件であるため、 $a$ の値を固定した状態で PC 鋼材を移動させても（剛体移動）、結果モーメントは変わらない。例えば、中央の B 点で PC 鋼材を上または、下に移動させたとしても、 $a$ の値が同じであれば結果モーメントは変わらない。しかし、結果モーメントが変わらないとしても、1 次モーメントは変化し、その結果、2 次モーメントや反力も一緒に変化する。

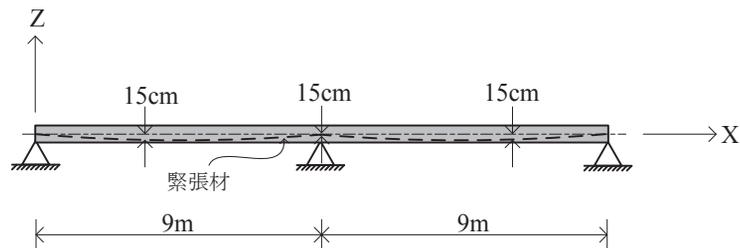
本チュートリアルで、2 次モーメントがゼロになる PC 鋼材の配置形状を求めるとするなら、中央で結果モーメントが 135kN になる状態を作らなければならない。その場合、 $a$ は 0.15m にならなければならないため、PC 鋼材の配置は以下ようになる。

▶図 8.19  
PC 鋼材の配置形状



## 04.練習問題

1. 下図のように緊張材が配置された 2 スパン連続梁に対し、プレストレス荷重による曲げモーメントを確認しなさい。



- **材料**  
弾性係数 :  $30,000 \text{ N/mm}^2$
- **断面**  
長方形 :  $300 \times 550$
- **荷重**  
放物線状に配置された緊張材にプレストレスによる荷重  $900 \text{ kN}$  作用  
梁全体において等分布荷重  $20 \text{ kN/m}$  作用



# 9.

# 熱応力 解析

## TABLE OF CONTENTS

### 01 概念の理解

---

01.1 熱応力解析の概念	9-1
---------------	-----

### 02 チュートリアル

---

02.1 モデルの概要	9-4
02.2 作業環境の設定	9-6
02.3 材料及び断面の定義	9-8
02.4 節点及び要素の生成	9-10
02.5 境界条件の入力	9-14
02.6 荷重の入力	9-15
02.7 構造解析の実行	9-18
02.8 解析結果の確認	9-19

### 03 構造計算の解説

---

03.1 力学的概念の理解 及び数値計算	9-32
-------------------------	------



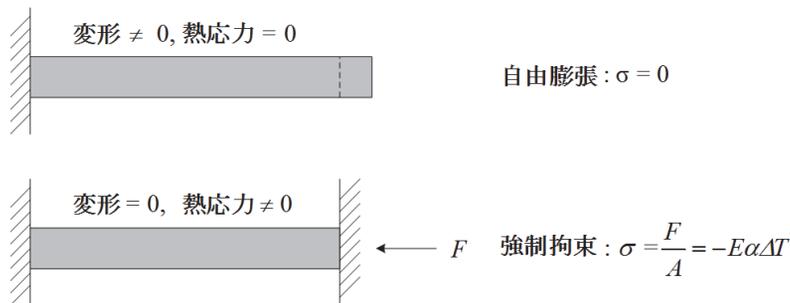
## 01.概念の理解

### 01.1 熱応力解析の概念

#### 01.1.1 一般事項

物体の体積は一般的に加熱すると膨張し、冷却すると縮小する。しかし、物体の変形に対し拘束が働くと、物体の内部では拘束に抵抗する力が発生し、支点では反力が発生する。例えば、図 9.1 のように、円形の断面を持つ棒に拘束がないと加熱することで自由に伸びる。しかし、両端を拘束した状態で加熱すると、棒が伸びないよう作用する反力により棒には内力が発生する。この時、棒の単位面積当たりの内力を熱応力と呼ぶ。一方、物体が拘束されていない状態であっても物体の全体において温度分布が一定ではない場合にもこのような温度勾配により内部では熱応力が発生する。代表的な例として、溶接後、物体の内部に残る残留熱応力 (residual thermal stress) が挙げられる。熱応力の大きさは加熱される物体が持つ固有の物性値である熱膨張係数 (thermal expansion coefficient) と温度の変化に比例する。

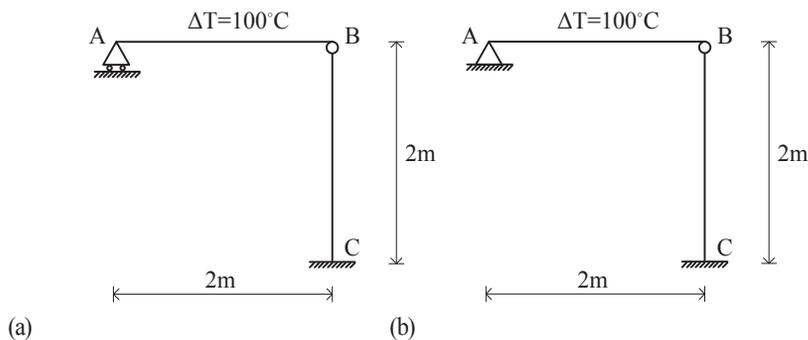
▶図 9.1  
熱応力



01.1.2 解析の概念 下図に表した2種類の構造はA点の支持条件に違いがあり、その他の条件は同じである。節点Bにヒンジを追加することで、解析結果をできる限り簡単に表した。部材ABに100°Cの温度増加が発生した場合を対象に、各構造物における違いを比較する。なお、解析条件は以下の通りである。

$$E = 2 \times 10^4 \text{ N/mm}^2, \quad I = 1 \times 10^{10} \text{ mm}^4, \quad \alpha = \text{熱膨張係数} = 1 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

▶図 9.2  
温度変化の例題



部材 AB で温度変化が発生したため、部材 AB は以下の計算で得られるような長さの変化が発生する。

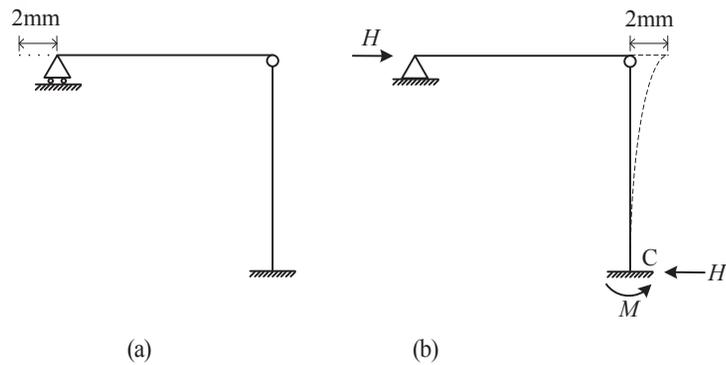
▶式 9.1 
$$\Delta = 1 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C} \times 100^\circ\text{C} \times 2,000\text{mm} = 2\text{mm}$$

図 9.2 の(a)の構造は A 点で横変位が拘束されていないため、A 点が左側に 2mm 移動する。一方、(b)の構造では A 点で横変位が拘束されているため、梁における温度変化により柱の上端、すなわち、B 点が右側に 2mm 移動することになる。従って、柱の下端において以下のような反力が発生する。

▶式 9.2 
$$M = \frac{3EI}{\ell^2} \Delta = \frac{3 \times 2 \times 10^4 \times 1 \times 10^{10}}{2000^2} \times 2 \times 10^{-6} = 300\text{kN} \cdot \text{m}$$
  

$$H = \frac{300}{2} = 150\text{kN}$$

▶ 図 9.3  
温度変化による結果



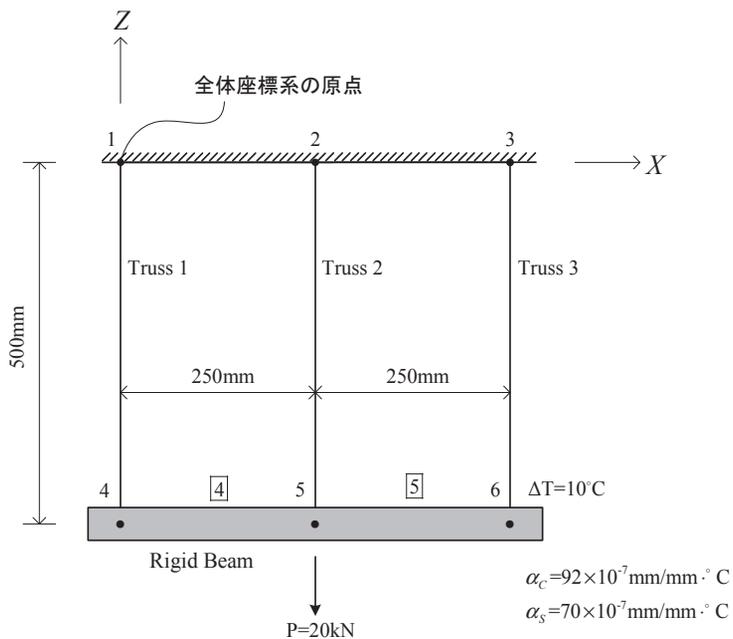
このように、温度変化による解析結果は構造物の拘束条件により左右される。

## 02.チュートリアル

## 02.1 モデルの概要

下図のようにトラスで構成された構造物に対し、10°Cの温度変化による熱応力解析を行う。

▶図 9.4  
解析モデル



- **モデル1**  
トラスに剛体梁要素が吊り下げられたモデル
- **モデル2**  
剛体連結条件で梁の自由度を代表節点に従属させたモデル

➤ **材料**

**トラス 1、トラス 3**

弾性係数( $E_s$ ) :  $1.1 \times 10^5$  N/mm

熱膨張係数( $\alpha_s$ ) :  $9.2 \times 10^{-6}$  mm/mm $\cdot$ °C

**トラス 2**

弾性係数( $E_s$ ) :  $2.05 \times 10^5$  N/mm<sup>2</sup>

熱膨張係数( $\alpha_s$ ) :  $7.0 \times 10^{-6}$  mm/mm $\cdot$ °C

**剛体梁**

弾性係数( $E_p$ ) :  $7.0 \times 10^{12}$  N/mm<sup>2</sup>

➤ **断面**

トラス要素 (垂直) の断面積 : 65mm<sup>2</sup>

梁要素 (剛体) の断面 2 次モーメント ( $I_{yy}$ ) : 400,000mm<sup>4</sup>

➤ **荷重**

1. 節点 5 に集中荷重 20 kN 載荷
2. 温度荷重  
初期温度 : 15°C  
最終温度 : 25°C

## 02.2 作業環境の設定

### 02.2.1 単位系の設定

新しいプロジェクトを開き、ファイルを保存する。

メインメニュー  > **新規プロジェクト...**

メインメニュー  > **保存**

1. ファイル名：“熱応力”と入力し、[保存]をクリック

単位系を設定する。

メインメニュー [ツール] > [セッティング] > **[単位系]**

2. 長さ > 「mm」、力 > 「N(kg)」を選択

3. [OK]をクリック

▶ 図 9.5

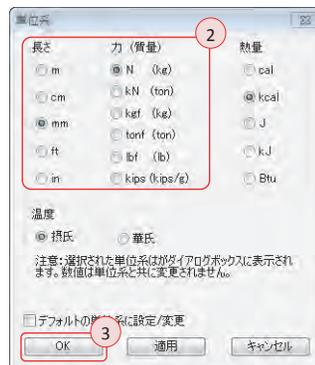
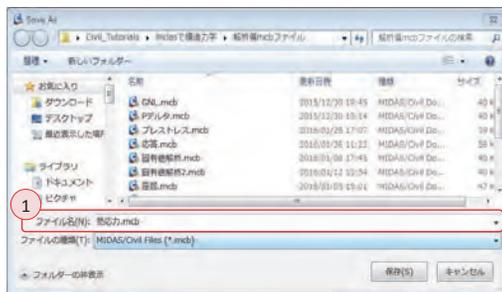
(a) ファイルの保存

(b) 単位系の設定



Tip

単位系の設定は画面下のステータスバーでも簡単に操作できる。



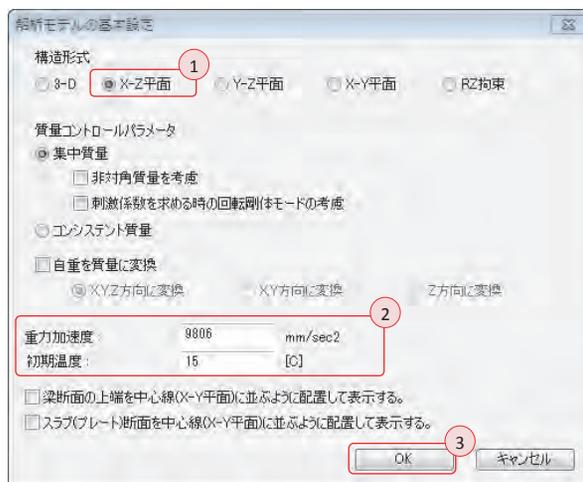
### 02.2.2 作業平面の 設定

本チュートリアルでは全体座標系（Global Coordinate System, GCS）を基準に X-Z 平面の挙動のみを許容するため、構造形式を 2-D 挙動の構造物（XZ 平面）と指定する。また、温度荷重を考慮するため、初期温度を入力する。ここで、初期温度とは荷重を載荷する前の構造物全体の温度を意味する。

メインメニュー [ウィザード] > [基本設定] > **[基本設定]**

1. 構造形式 > 「X-Z 平面」を選択
2. 重力加速度：“9806” 確認  
初期温度：“15” 入力
4. [OK] クリック

▶ 図 9.6  
作業平面及び初期温度の設定



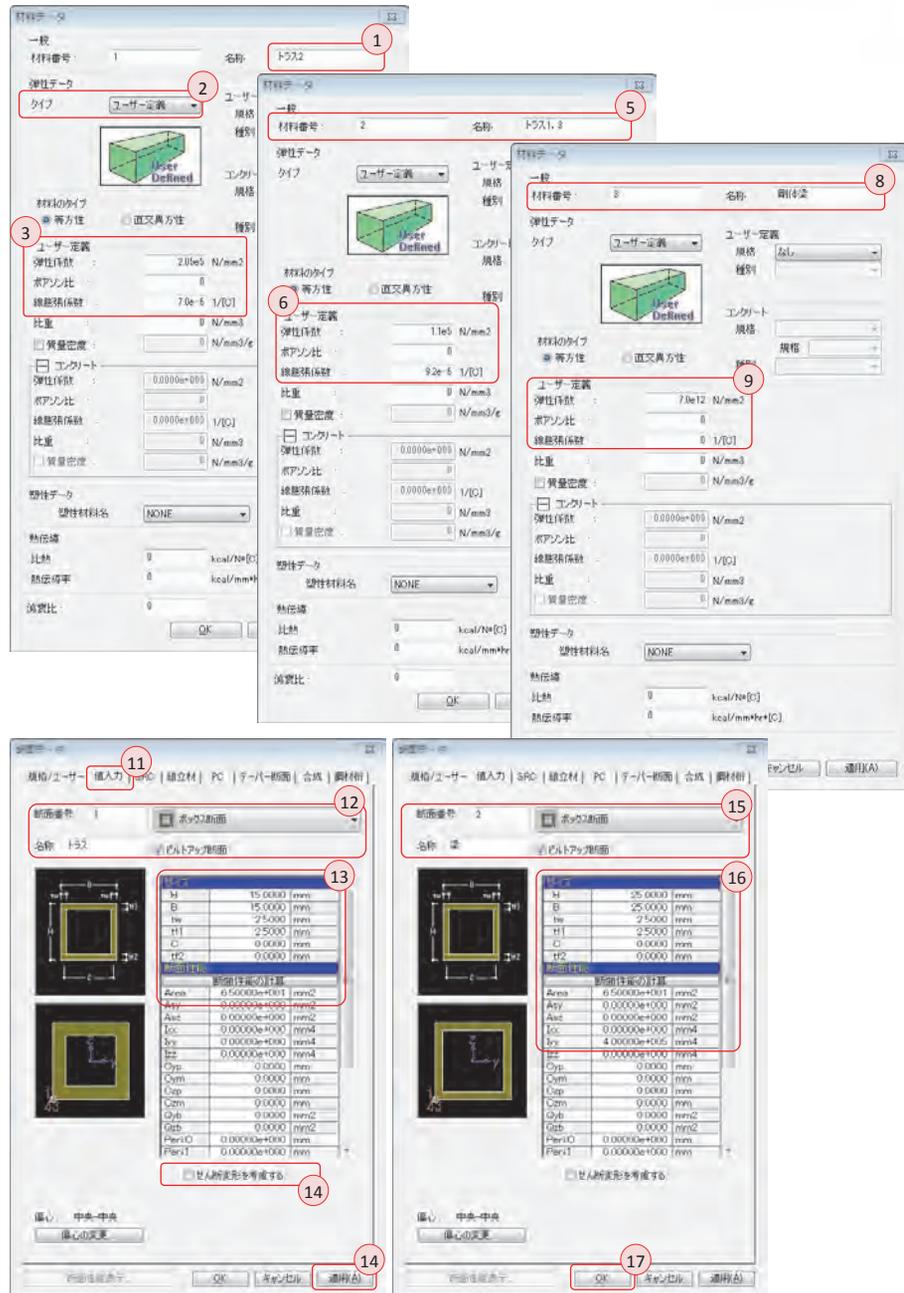
## 02.3 材料及び断面の定義

モデルに使用する材料及び断面は解析の便宜上、ユーザーが直接数値を入力する「ユーザー定義」及び「値入力」機能を利用する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > *[材料特性]*

1. *[追加...]* クリック、名称：“トラス2” 入力
2. 弾性データ > タイプ > 「ユーザー定義」 選択
3. ユーザー定義 > 弾性係数：“2.05e5” 入力、線膨張係数：“7.0e-6” 入力
4. *[適用]* クリック
5. 材料番号：“2” 確認、名称：“トラス1, 3” 入力
6. ユーザー定義 > 弾性係数：“1.1e5” 入力、線膨張係数：“9.2e-6” 入力
7. *[適用]* クリック
8. 材料番号：“3” 確認、名称：“剛体梁” 入力
9. ユーザー定義 > 弾性係数：“7.0e12” 入力、線膨張係数：“0” 入力
10. *[OK]* クリック
  
11. 断面タブをクリック、*[追加]* クリック、値入力タブをクリック
12. 断面形状 > 「ボックス断面」 選択、名称：“トラス” 入力
13. サイズ > H：“15”、B：“15”、tw：“2.5”、tf1：“2.5”  
断面性能 > Area：65 入力
14. *せん断変形を考慮する* (チェックオフ)、*[適用]* クリック
15. 断面番号：“2” 確認、名称：“梁” 入力
16. サイズ > H：“25”、B：“25”、tw：“2.5”、tf1：“2.5”  
断面性能 > Iyy：400,000 入力
17. *[OK]* クリック、*[閉じる]* クリック

▶ 図 9.7  
材料及び断面の定義



## 02.4 節点及び要素の生成

### 02.4.1 節点の生成

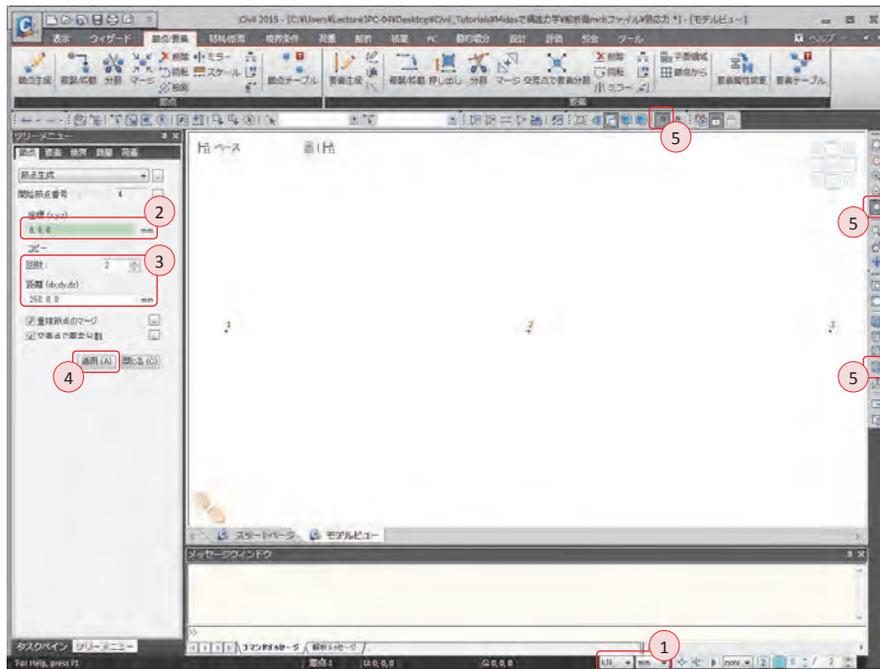
支点の節点を生成する。

1. ステータスバーで、力：「kN」、長さ：「mm」修正

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [節点生成]

2. 座標 (x, y, z) : “0, 0, 0” 入力
3. コピーの回数 : “2” 入力、距離(dx, dy, dz) : “250, 0, 0” 入力
4. [適用] クリック
5. 節点番号、自動フィット、正面 (トグルオン)

▶ 図 9.8  
節点の生成



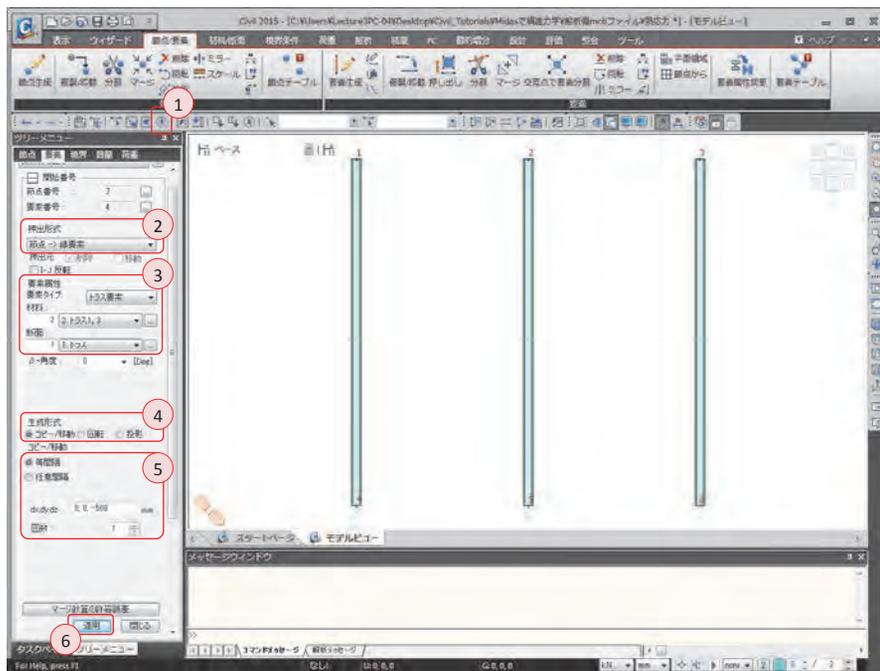
### 02.4.2 要素の生成

押し出し機能で、生成した節点からトラス要素を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [押し出し]

1.  全て選択クリック
2. 押出形式 > 「節点→線要素」選択
3. 要素属性 > 要素タイプ > 「トラス要素」選択  
材料 > 「トラス 1、3」  
断面 > 「トラス」選択
4. 生成形式 > 「コピー/移動」選択
5. コピー/移動 > 「等間隔」選択 > dx, dy, dz : “0, 0, -500”  
回数 : “1” 入力
6. [適用] クリック

▶ 図 9.9  
トラス要素の生成

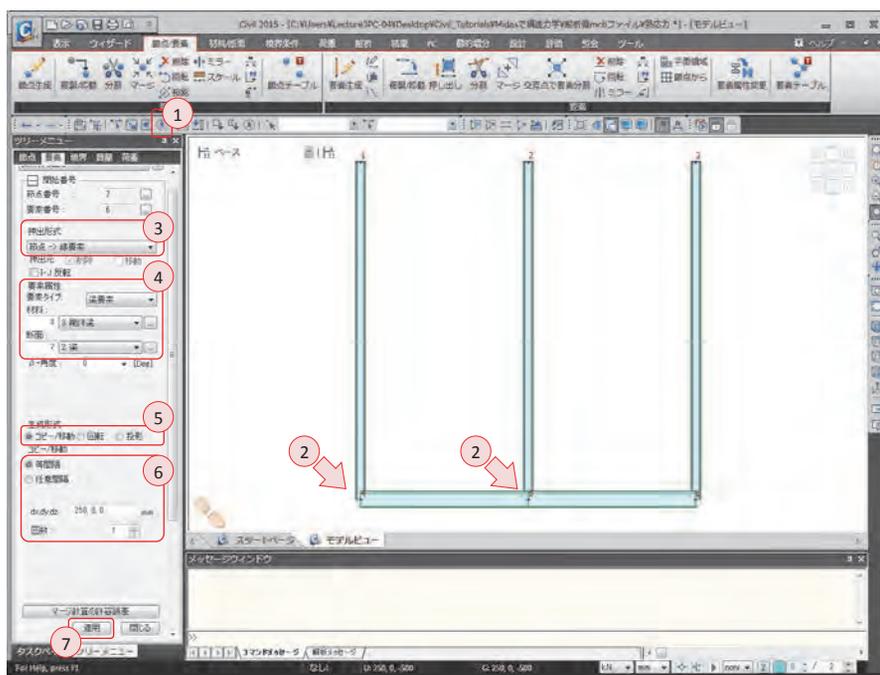


押し出し機能を利用し、梁要素を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [押し出し]

1.  単一選択クリック
2. 節点 4 と節点 5 を選択
3. 押し出し形式 > 「節点→線要素」選択
4. 要素属性 > 要素タイプ > 「梁要素」選択  
材料 > 「剛体梁」  
断面 > 「梁」選択
5. 生成形式 > 「コピー/移動」選択
6. コピー/移動 > 「等間隔」選択 > dx, dy, dz : “250, 0, 0”  
回数 : “1” 入力
7. [適用] クリック

▶ 図 9.10  
梁要素の生成



02.4.3 要素の材料の  
修正

作業ツリーを利用し、中央の要素の材料を修正する。

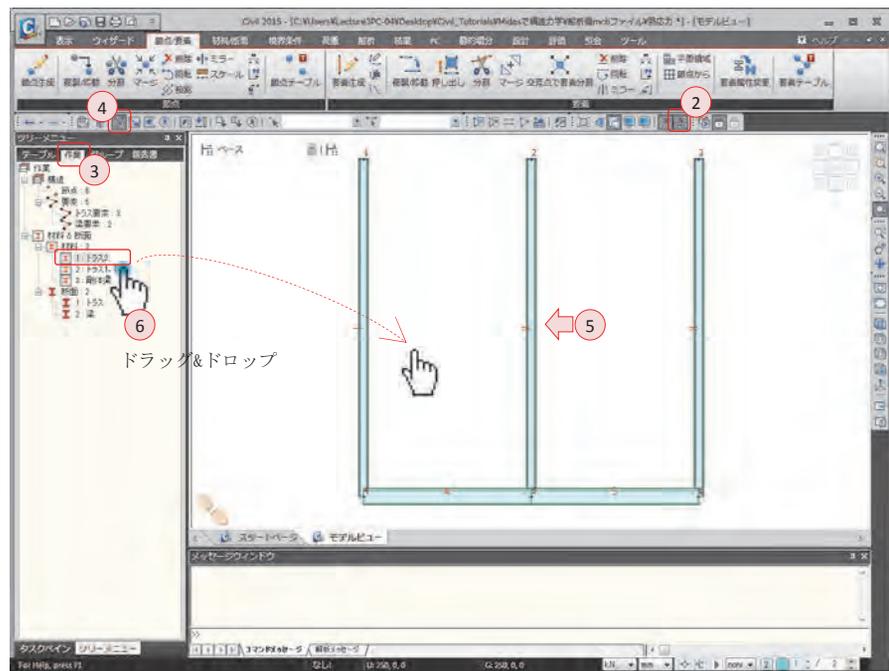
1. 押し出しダイアログで、[閉じる]クリック
2. 要素番号 (トグルオン)
3. ツリーメニューの作業タブクリック
4.  単一選択クリック
5. 要素 2 選択
6. ツリーメニュー[作業]>材料&断面>材料>1:トラス 2 (ドラッグ&ドロップ)

▶ 図 9.11  
モデルの材料の変更



Tip

ドラッグ&ドロップ：  
マウスの左ボタンで当該項目を  
クリックしたまま、モデルビュー  
までドラッグしてドロップする。



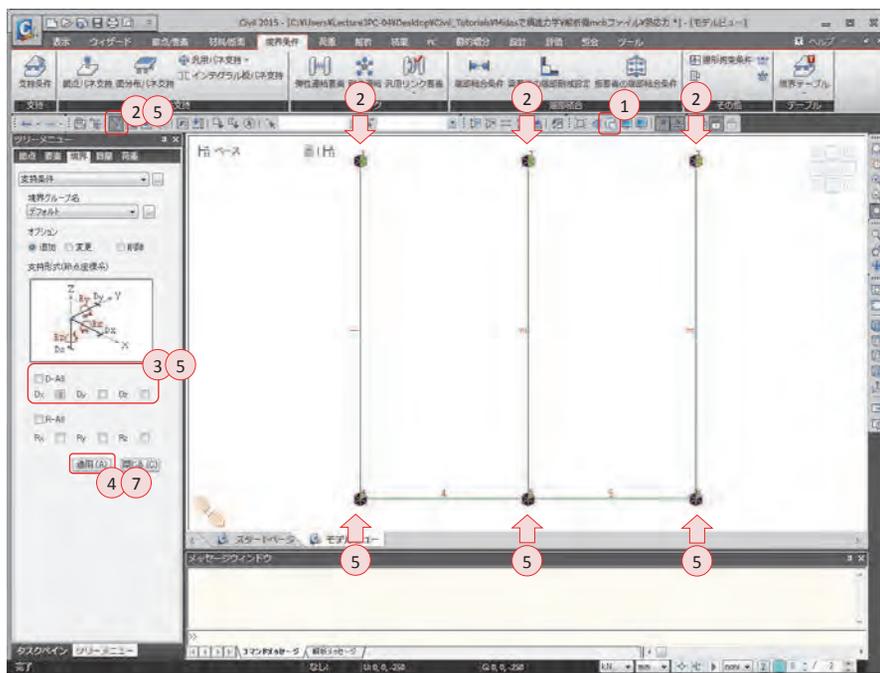
## 02.5 境界条件の入力

トラス要素の上端を固定し、下部の節点はX方向の変位を制御する。

メインメニュー [境界条件] > [支持] > [支持条件]

1. 隠線除去表示 (トグルオフ)
2.  単一選択で節点1、節点2、節点3を選択
3. 支持形式 > D-ALL (チェックオン)
4. [適用] クリック
5.  単一選択で節点4、節点5、節点6を選択
6. 支持形式 > Dx (チェックオン)、Dy、Dz (チェックオフ)
7. [適用] クリック

▶ 図 9.12  
支持条件



## 02.6 荷重の入力

### 02.6.1 荷重条件の定義 節点荷重と温度荷重の入力のため、荷重条件を定義する。

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重ケース生成] > [静的荷重ケース]

1. 名称 : “節点” 入力
2. タイプ > 「ユーザー定義荷重 (USER)」 選択
3. [追加] クリック
4. 名称 : “温度” 入力
5. タイプ > 「ユーザー定義荷重 (USER)」 選択
6. [追加] クリック
7. [閉じる] クリック

▶ 図 9.13  
荷重条件の定義

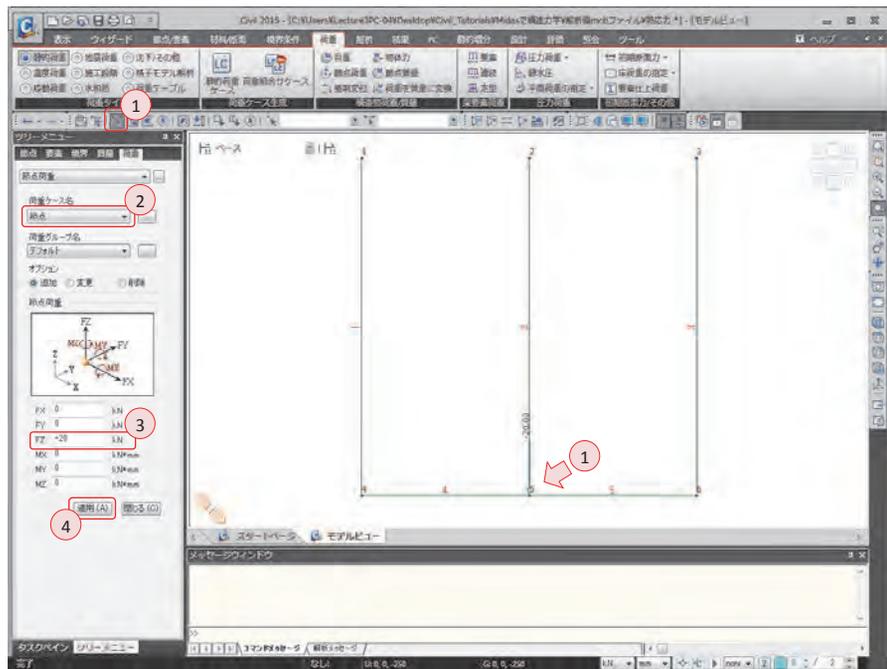


02.6.2 節点荷重の入力 節点 5 に重力方向の集中荷重 20kN を入力する。

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重タイプ/質量] > [節点荷重]

1. 単一選択で節点 5 選択
2. 荷重ケース > 「節点」 選択
3. 節点荷重 > FZ: “-20” 入力
4. [適用] クリック

▶ 図 9.14  
節点荷重の入力

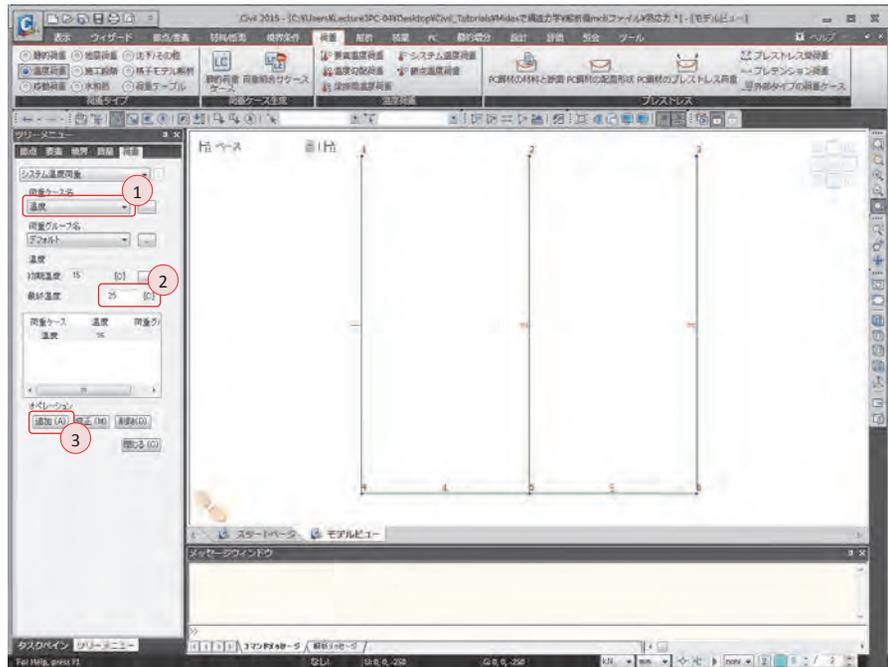


02.6.3 温度荷重の入力 10度の温度差による荷重の発生を反映するため、構造物の全体の温度を 25°C (25-15=10) と入力する。

メインメニュー [荷重/温度荷重] > [温度荷重] > [システム温度荷重]

1. 荷重ケース名 > 「温度」 選択
2. 温度 > 最終温度: “25” 入力
3. [追加] クリック

▶ 図 9.15  
温度荷重の入力



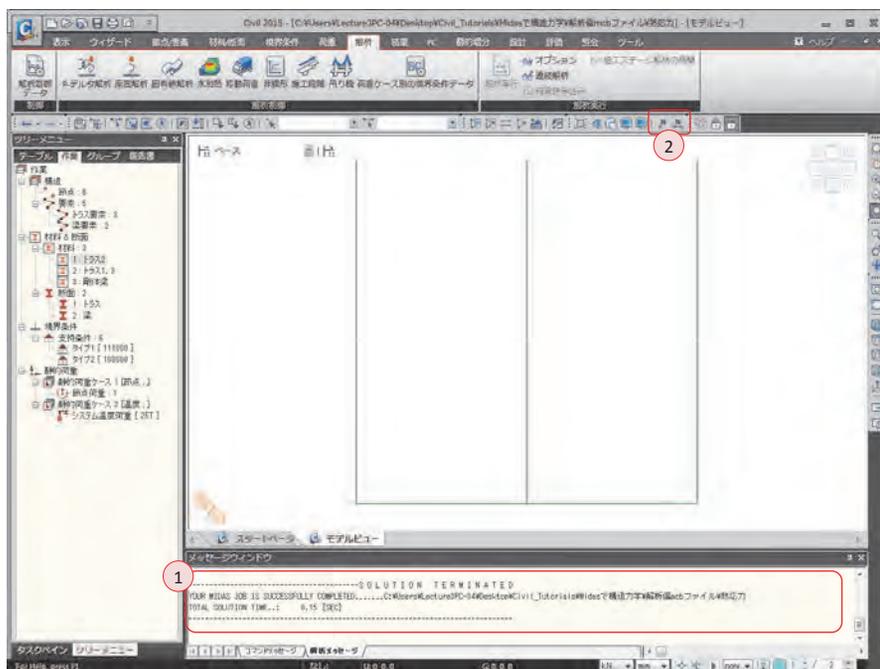
## 02.7 構造解析の実行

モデルの生成及び荷重の入力が終わったら解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認
2. 節点番号、要素番号 (トグルオフ)

▶ 図 9.16  
解析の正常終了メッセージ



## 02.8 解析結果の確認

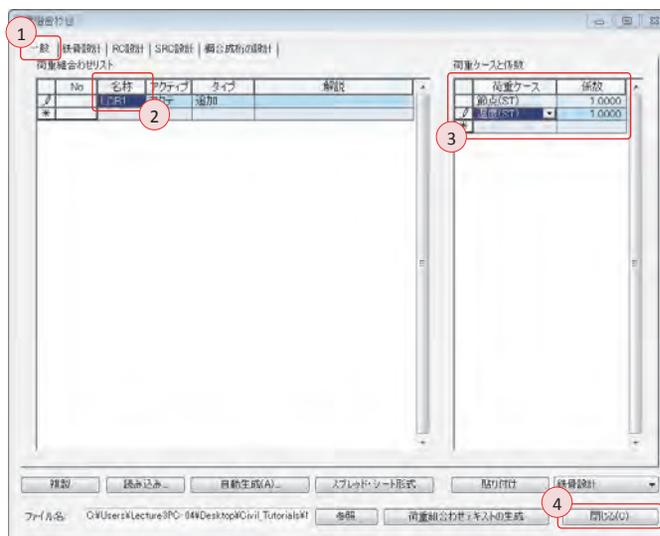
02.8.1 荷重組合わせ 節点荷重と温度荷重の組み合わせによる結果を確認するため荷重組合わせを生成する。

荷重組合わせ条件 1 (LCB 1) : 1.0 節点荷重 + 1.0 温度荷重

メインメニュー [結果] > [荷重組合わせ] > [荷重組合わせ]

1. 一般タブ確認
2. 荷重組合わせリスト > 名称: “LCB1” 入力
3. 荷重ケースと係数 > 荷重ケース> 「節点 (ST)」 選択、係数: “1” 入力  
荷重ケース> 「温度 (ST)」 選択、係数: “1” 入力
4. [閉じる]クリック

▶図 9.17  
荷重組合わせの生成



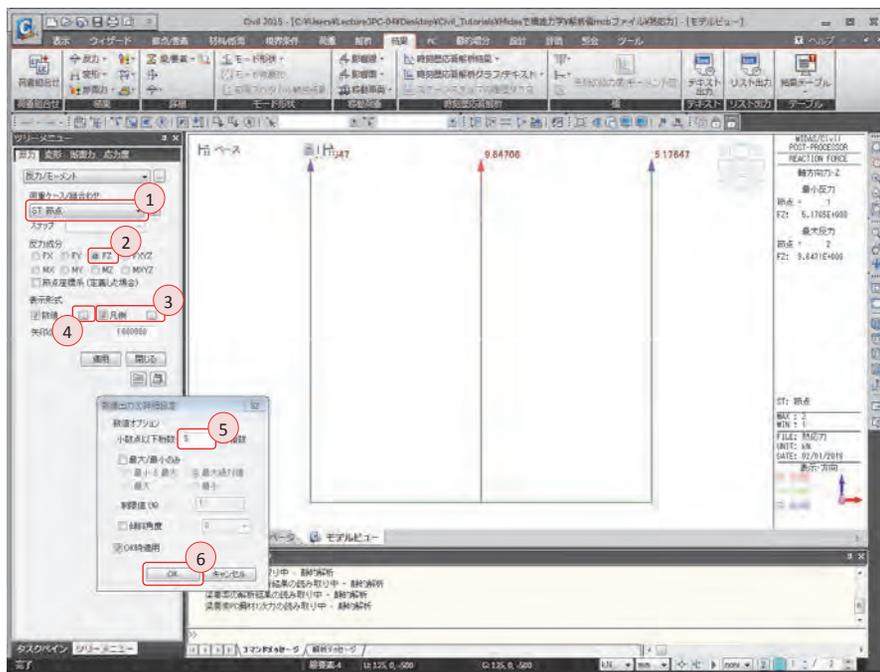
02.8.2 反力

節点荷重によるトラス上端の支点における反力を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [反力▼] > [反力/モーメント]

1. 荷重ケース/組合せ > 「ST: 節点」選択
2. 反力成分 > 「FZ」選択
3. 表示形式 > 凡例 (チェックオン)
4. 数値の  クリック
5. 小数点以下桁数: “5” 入力
6. [OK] クリック

▶ 図 9.18  
節点荷重による反力



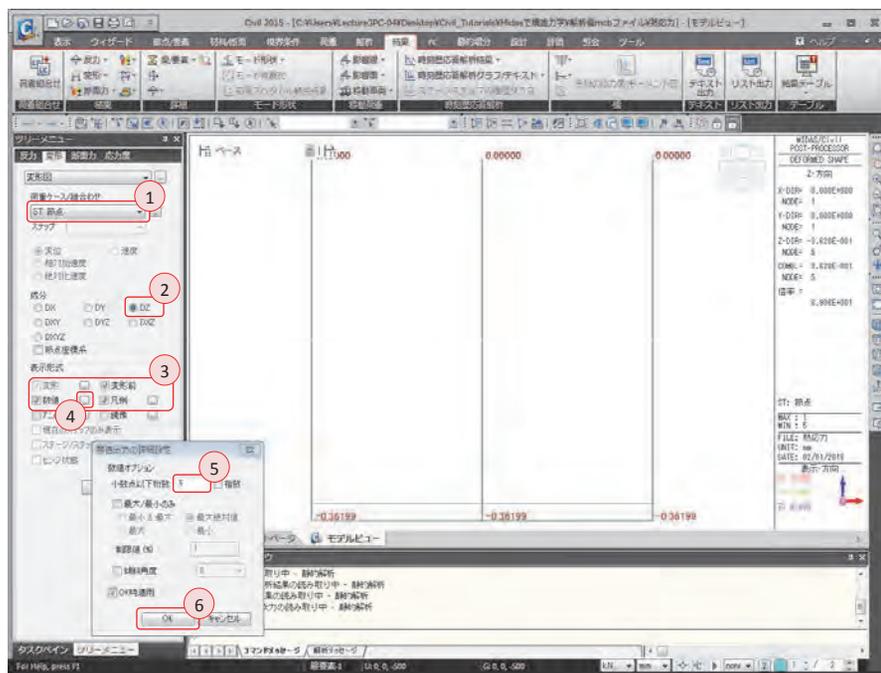
節点荷重による反力はトラス 2 の支点で 9.64706 kN、トラス 1、3 の支点で 5.17647 kN 発生していることが確認できる。

02.8.3 変位及び変形 節点荷重によるトラス下端で発生する変位を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変形図]

1. 荷重ケース/組合せ > 「ST: 節点」
2. 成分 > 「DZ」 選択
3. 表示形式 > 変形前、凡例 (チェックオン)
4. 数値の  クリック
5. 小数点以下桁数: “5” 入力
6. [OK] クリック

▶ 図 9.19  
温度荷重による変位



トラスの下端で剛体梁と連結されている全ての節点において、下向きに 0.36199mm の変位の発生が確認できる。

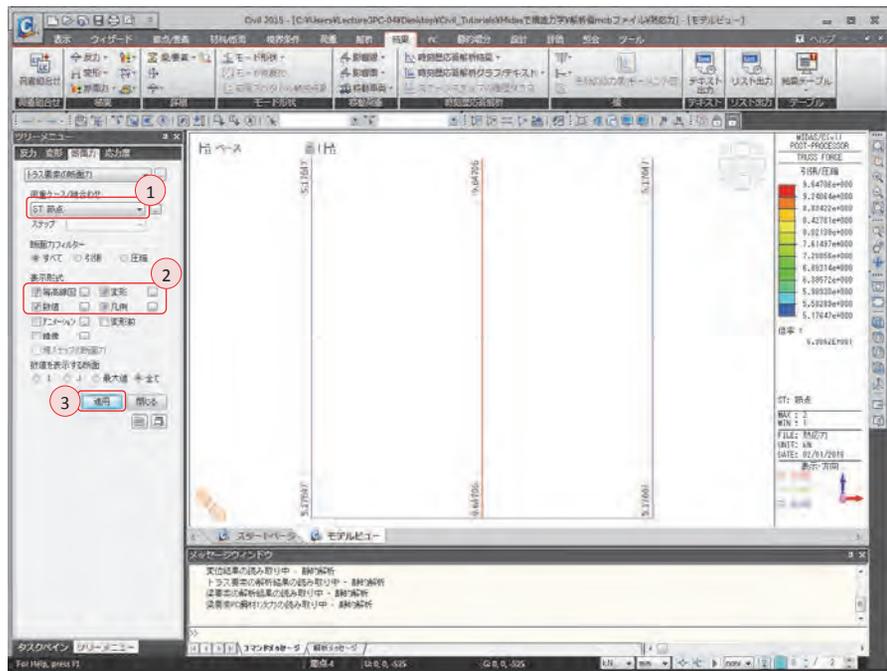
02.8.4 断面力

節点荷重によりトラスに作用する軸力を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [断面力▼] > [トラス要素の断面力]

1. 荷重ケース/組合せ > 「ST:節点」 選択
2. 表示形式 > 等高線図、変形、数値、凡例 (チェックオン)
3. [適用] クリック

▶ 図 9.20  
節点荷重による変位



トラス 2 の部材で 9.64706 kN、トラス 1、3 の部材で 5.17647 kN の引張力が発生することが確認できる。

02.8.5 応力

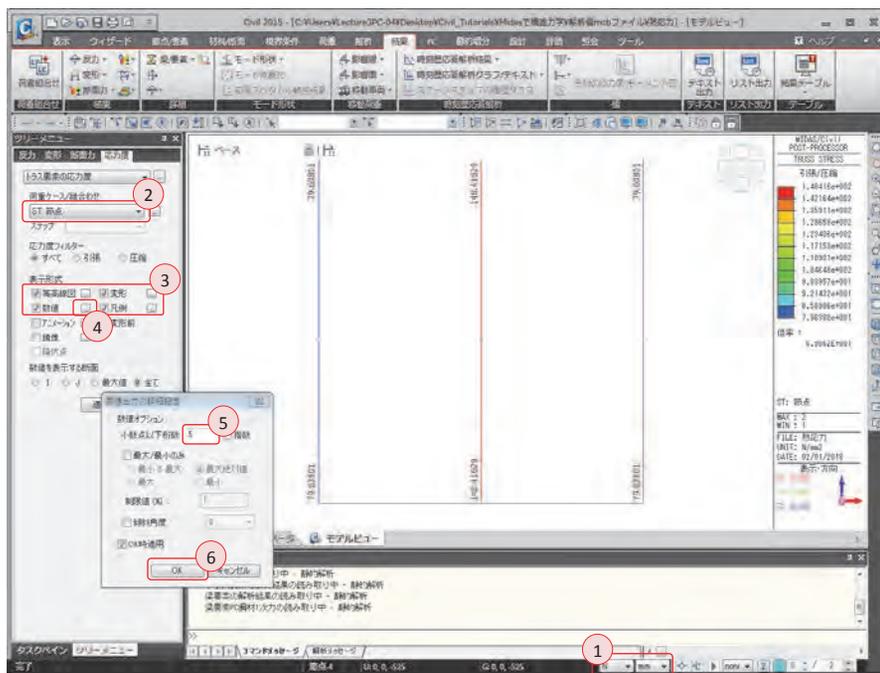
節点荷重によりトラス要素で発生する応力を確認する。  
節点荷重が作用するトラス要素は剛体梁要素により同じたわみ (0.36199 mm) が発生し、従って剛性に比例して応力を分配する。

1. ステータスバー：力>「N」、長さ>「mm」に修正

メインメニュー [結果] > [結果] > [応力] > [トラス要素の応力]

2. 荷重ケース/組合せ > 「ST:節点」
3. 表示形式 > 等高線図、変形、数値、凡例 (チェックオン)
4. 数値の  をクリック
5. 小数点以下桁数：“5” 入力
6. [OK] クリック

▶ 図 9.21  
節点荷重によるトラス応力



トラス 2 の部材で 148.41629 N/mm<sup>2</sup>、トラス 1、3 の部材で 79.63801 N/mm<sup>2</sup> の応力が発生することが確認できる。

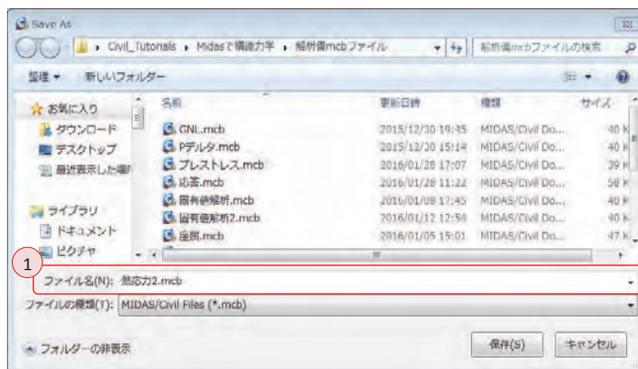
### 02.8.6 モデル 2 の 生成

解析モデルに新しい名前を付けて保存し、下部の剛体梁の代わりに剛体連結条件  
を利用し、剛体の挙動を解析する。

メインメニュー  / **名前を付けて保存**

1. ファイル名：“熱応力2”と入力し、[保存]をクリック

▶ 図 9.22  
モデル 2 の名前付けて保存



### 02.8.7 材料の変更

既存の入力されている剛体梁の弾性係数を変更する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > [材料特性]

1. 剛体梁をダブルクリック
2. 弾性係数：“7.0e-3” 入力
3. [OK] クリック
4. [閉じる] クリック

▶ 図 9.23  
材料の変更



02.8.8 剛体連結条件  
の入力

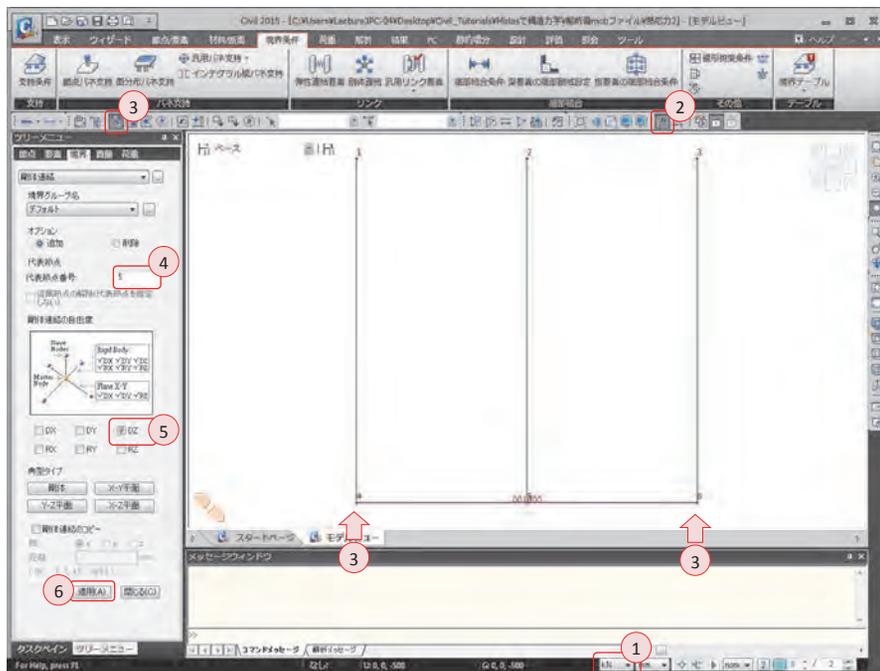
剛体連結を利用し節点 4、6 の Dz の自由度を代表節点 5 に従属させる。

1. ステータスバー：力 > 「kN」、長さ > 「mm」 に修正
2. 節点番号 (トグルオン)

メインメニュー [境界条件] > [リンク] > **[剛体連結]**

3.  単一選択で節点 4、節点 6 を選択
4. 代表節点番号：“5” 入力
5. 剛体連結の自由度 > DZ (チェックオン)
6. [適用] クリック

▶ 図 9.24  
剛体連結



### 02.8.9 モデル2の 構造解析の実行

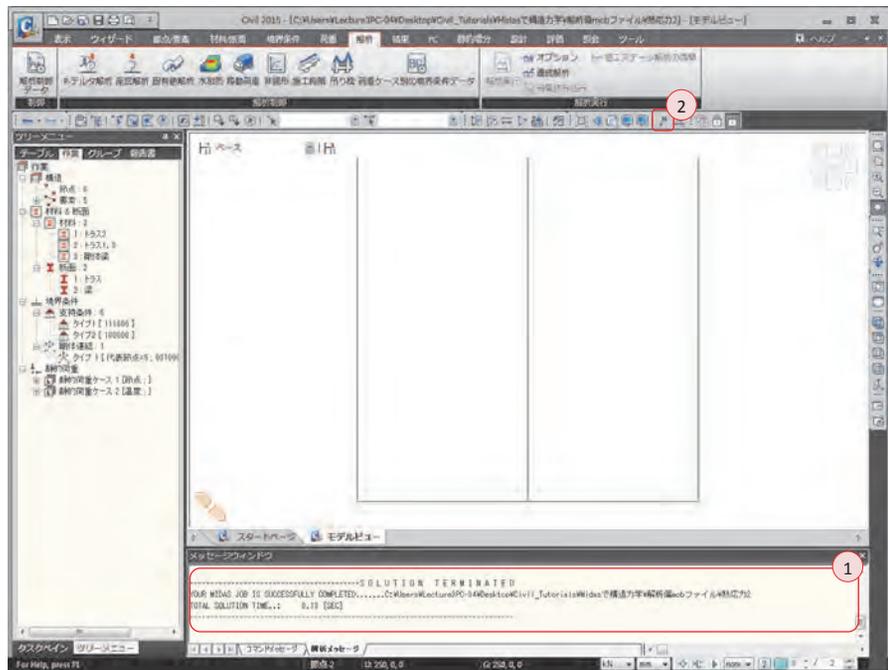
モデルの修正が終わったら構造解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認
2. 節点番号 (トグルオフ)

▶ 図 9.25

解析の正常終了のメッセージ



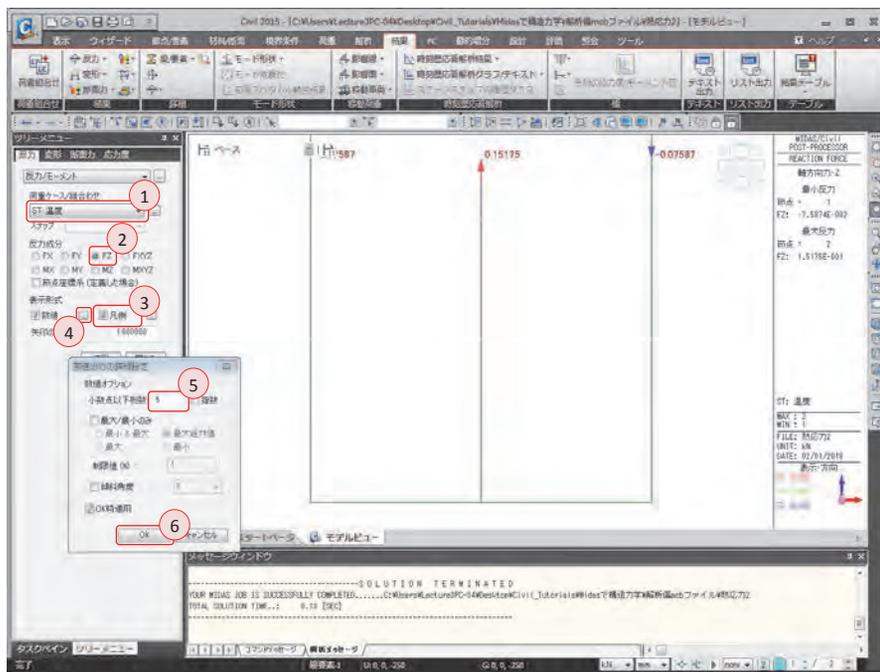
02.8.10 反力

温度荷重によるトラス上端の支点における反力を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [反力▼] > [反力/モーメント]

1. 荷重ケース/組合せ > 「ST: 温度」選択
2. 反力成分 > 「FZ」選択
3. 表示形式 > 凡例 (チェックオン)
4. 数値の  クリック
5. 小数点以下桁数: “5” 入力
6. [OK] クリック

▶ 図 9.26  
温度荷重による反力



温度荷重による反力はトラス 2 支点で 0.15175kN、トラス 1、3 の支点で -0.07587kN が発生することが確認できる。トラス 1、2、3 の部材は鉛直方向の自由度に対し剛体で連結されているため、熱膨張係数が小さいトラス 2 には引張応力による +Z 軸方向の反力が発生し、熱膨張係数が大きいトラス 1、3 には圧縮応力による -Z 軸方向の反力が発生する。

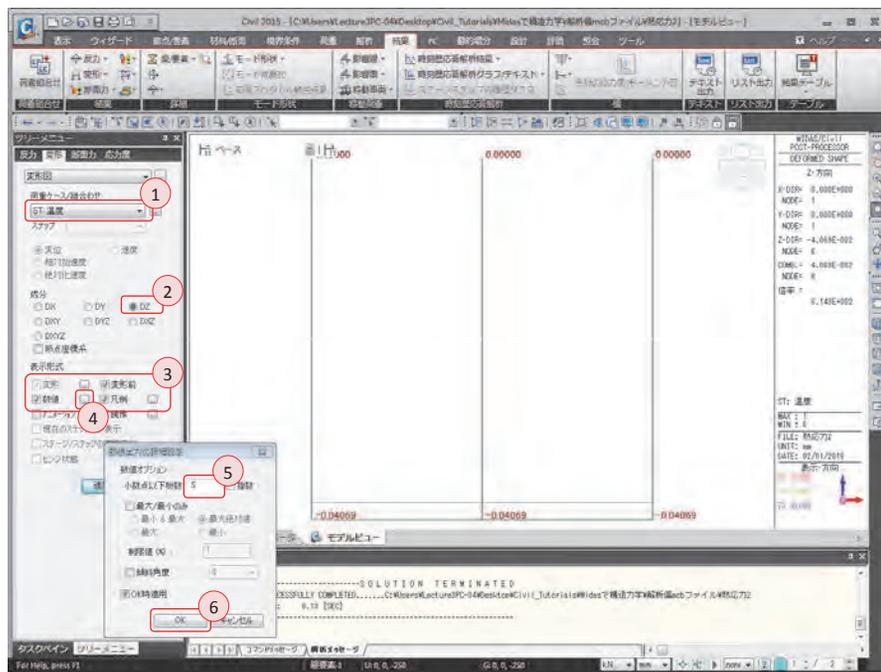
02.8.11 変位及び変形

温度荷重によりトラス下端で発生する変位を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変形図]

1. 荷重ケース/組合せ > 「ST: 温度」
2. 成分 > 「DZ」 選択
3. 表示形式 > 変形前、凡例 (チェックオン)
4. 数値の  クリック
5. 小数点以下桁数: “5” 入力
6. [OK] クリック

▶ 図 9.27  
温度荷重による変位



剛体連結されている節点 4、5、6 で全て下向き  $0.04069\text{mm}$  の変位が発生していることが確認できる。

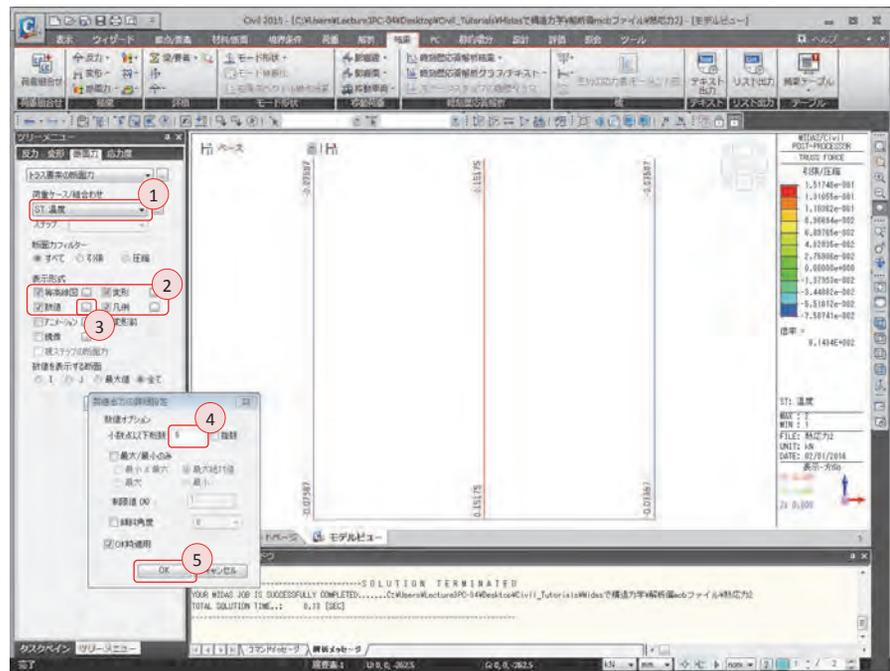
02.8.12 断面力

温度荷重によりトラスに作用する軸力を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [断面力▼] > [トラス要素の断面力]

1. 荷重ケース/組合せ > 「ST : 温度」
2. 表示形式 > 等高線図、変形、数値、凡例 (チェックオン)
3. 数値の  クリック
4. 小数点以下桁数 : “5” 入力
5. [OK] クリック

▶ 図 9.28  
温度荷重による断面力



トラス 2 で 0.15175 kN の引張力が発生し、トラス 1、3 で 0.07587 kN の圧縮力が発生していることが確認できる。

02.8.13 応力

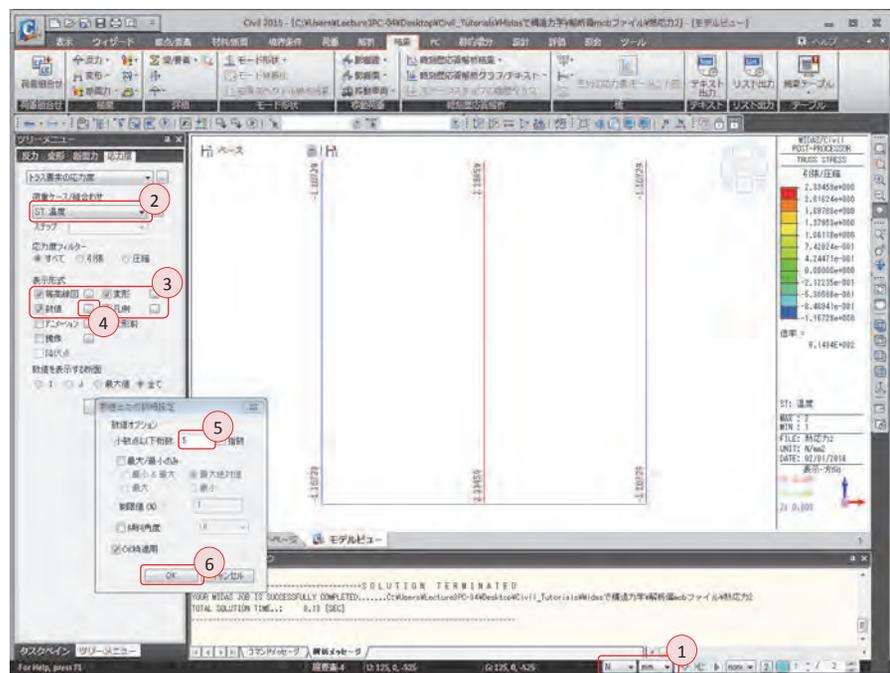
温度荷重によりトラス要素に発生する応力を確認する。

1. ステータスバー：力 > 「N」、長さ > 「mm」 に修正

メインメニュー [結果] > [結果] > [応力▼] > [トラス要素の応力度]

2. 荷重ケース/組み合わせ > 「ST:温度」
3. 表示形式 > 等高線図、変形、数値、凡例 (チェックオン)
4. 数値の  をクリック
5. 小数点以下桁数：“5” 入力
6. [OK] クリック

▶ 図 9.29  
節点荷重によるトラス応力



トラス 2 では  $2.33459 \text{ N/mm}^2$ 、トラス 1、3 では  $-1.16729 \text{ N/mm}^2$  の応力が発生することが確認できる。

荷重組み合わせ (LCB1) による応力はトラス 2 では  $150.75 \text{ N/mm}^2$ 、トラス 1、3 では  $78.47 \text{ N/mm}^2$  発生することが確認できる。

## 03. 構造計算の解説

### 03.1 力学的概念の理解及び数値計算

#### 03.1.1 モデル1

**P=20kN が作用する  
際の応力の解析**

モデル1でトラス部材の変位が全て同じになるよう、剛体梁で連結されているため、荷重による鉛直変位 $\Delta$ は全て同じであることの適合条件と力の釣り合い条件を式で表すと次のようになる。

$$\Delta = \frac{N_c \ell}{E_c A} = \frac{N_s \ell}{E_s A}$$

$$2N_c + N_s = 20$$

ここで、 $N_c$ はトラス1、トラス3の軸力、 $N_s$ はトラス2の軸力である。

従って、次のような結果が得られることから、Civilによる解析結果と一致することが確認できる。

$$\Delta = 0.362\text{mm}$$

$$N_c = 5.176\text{kN}, \quad \sigma_c = 79.638\text{N/mm}^2$$

$$N_s = 9.647\text{kN}, \quad \sigma_s = 148.416\text{N/mm}^2$$

#### 03.1.2 モデル2

**10°Cの温度変化  
による応力の解析**

モデル2は温度変化により軸力が発生するが、鉛直方向の変位 $\Delta$ は同じであること条件を満たさなければならない。従って、適合条件と力の釣り合いを式で表すと次のようになる。

$$\Delta = \alpha_c \Delta T \ell - \frac{N_c \ell}{E_c A} = \alpha_s \Delta T \ell - \frac{N_s \ell}{E_s A}$$

$$2N_c + N_s = 0$$

従って、次のような結果が得られることから、Civilによる解析結果と一致することが確認できる。

$$\Delta = 0.041\text{mm}$$

$$N_c = -0.076\text{kN}, \quad \sigma_c = 1.167\text{N/mm}^2$$

$$N_s = 0.152\text{kN}, \quad \sigma_s = 2.335\text{N/mm}^2$$



# 10.

## 面外荷重を受ける平板の解析

### TABLE OF CONTENTS

#### 01 概念の理解

---

- 01.1 面外荷重を受ける平板の解析の概念 10-1

#### 02 チュートリアル

---

- 02.1 モデルの概要 10-7
- 02.2 作業環境の設定 10-9
- 02.3 材料及び断面の定義 10-11
- 02.4 節点及び要素の生成 10-13
- 02.5 境界条件の入力 10-16
- 02.6 荷重の入力 10-17
- 02.7 構造解析の実行 10-27
- 02.8 解析結果の確認 10-28

#### 03 構造計算の解説

---

- 03.1 力学的概念の理解及び数値計算 10-37

#### 04 練習問題

---



## 01.概念の理解 01.1 面外荷重を受ける平板の解析概念

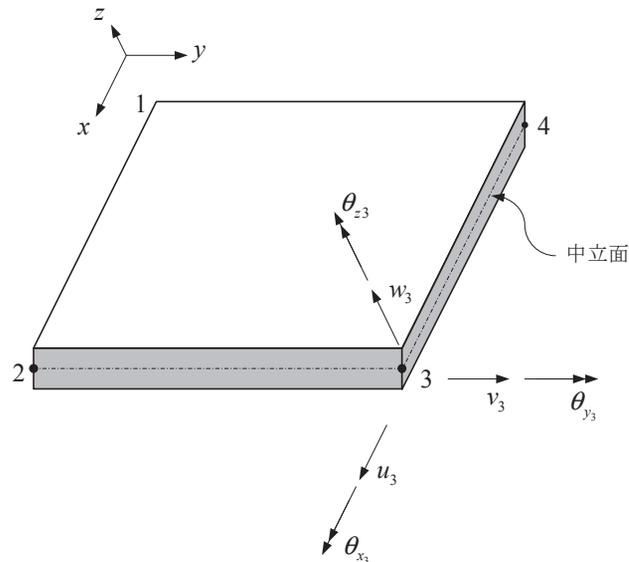
### 01.1.1 一般事項

構造物の中で面外方向の荷重を受ける代表的な平板要素には橋梁、スラブ、基礎板、擁壁（地下外壁）などがある。主に、床荷重、土圧、水圧などの荷重を 1 次的に負担し、隣接する梁、柱、壁を通して基礎及び地盤に伝達する。

### 01.1.2 解析の概念

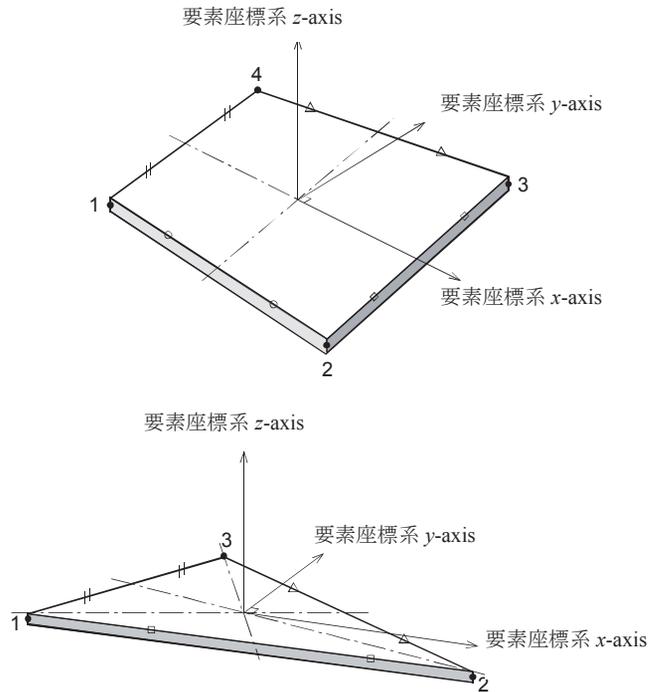
平板は各接点が 6 つの自由度を持っているが、 $\theta_z$  にあたる面内ねじり剛性はある程度の大きさを持っている。したがって、梁要素のような構造部材と連結する場合、プログラムによっては、適切な仮定を設定した要素を使用することはできるが、他のモデリング方法を活用するのが望ましい。また、平板要素は近似解を基準に構成されているため、要素の分割が必須である。正確な解析のための要素分割の程度は解析結果の収斂有無を基準に判断しなければならない。

▶ 図 10.1  
平板要素の節点の自由度



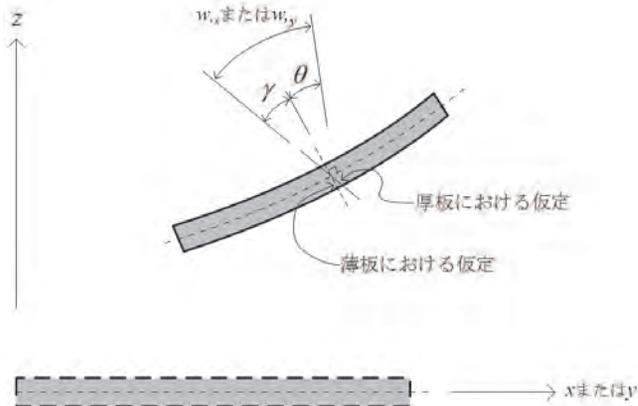
平板要素には三角形と四角形の要素がある。四角形平板要素は節点 1 と節点 4 の中点から節点 2 と節点 3 の中点に向かう方向を  $x$  軸方向とし、三角形要素は節点 1 から節点 2 に向かう方向を  $x$  軸方向と設定する。

▶図 10.2  
平板要素の要素座標系



面外荷重を受ける平板では曲げ変形が発生するため、線要素である梁要素を 2 次元に拡張した板要素を想定して解析する。薄板ではなく、厚さがある板の場合は、せん断変形による影響が無視できないため、幅を無視した長い梁（ベルヌーイ・オイラー梁）と一定の幅を持ちせん断変形を考慮する梁（チモシェンコ梁）と区分したように、厚さを無視した平板（キルヒホッフ平板）と厚さを持つ平板（ミンドリン平板）と区分する必要がある。しかし、ここで適用される幾何学的概念は梁の場合と同様である。曲げモーメント及びせん断力が作用する場合、梁及び平板で発生する変形は次のように定義される。

▶ 図 10.3  
薄板と厚板



図で分かるように、厚板における仮定ではせん断変形の影響を考慮している。しかし、 $\theta_x$ 、 $\theta_y$ 、 $w_{,x}$ 、 $w_{,y}$  は下図で示すような理由により+方向の定義が異なる。 $\theta_x$  と  $\theta_y$  は右手の法則により符号が決まり、 $w_{,x}$  と  $w_{,y}$  は微分を意味するため、勾配の角度により符号が決まる。その結果、 $\theta_y$  と  $w_{,x}$  の+方向は互いに反対で、 $\theta_x$  と  $w_{,y}$  の+方向は同じになる。

▶ 図 10.4  
 $\theta_x$ 、 $\theta_y$ 、 $w_{,x}$ 、 $w_{,y}$  の方向

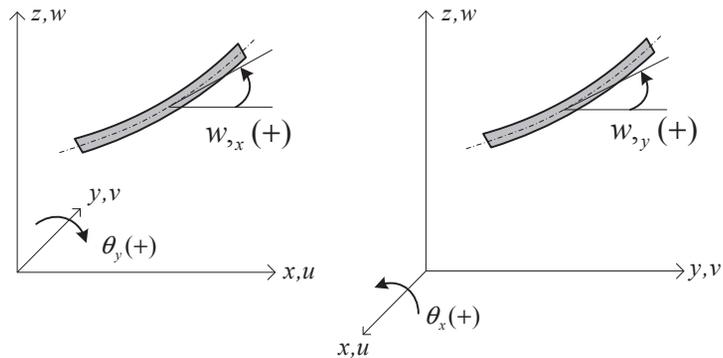


図 10.4 から、たわみ曲線の勾配と回転角の関係を式 10.1 にまとめる。

▶式 10.1

$$w_{,x} = -\theta_y + \gamma_{zx} \quad \text{または、} \quad \theta_y = -w_{,x} + \gamma_{zx}$$

$$w_{,y} = \theta_x + \gamma_{yz} \quad \text{または、} \quad \theta_x = w_{,y} - \gamma_{yz}$$

細い梁（または、薄板）と太い梁（または、厚板）のそれぞれの仮定により変形角は次のように表せる。

▶式 10.2

$$\text{細い梁：} \quad \theta_y = -w_{,x} \quad \text{薄板：} \quad \theta_y = -w_{,x}, \quad \theta_x = w_{,y}$$

▶式 10.3

$$\text{太い梁：} \quad \theta_y = -w_{,x} + \gamma_{zx} \quad \text{厚板：} \quad \theta_y = -w_{,x} + \gamma_{zx}, \quad \theta_x = w_{,y} - \gamma_{yz}$$

変形角による  $x$  方向の変位  $u$  と  $y$  方向の変位  $v$  は次のようになる。（図 10.4 参照）

▶式 10.4

$$u = z\theta_y, \quad v = -z\theta_x$$

薄板の仮定を用いる場合には  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  があり、厚板の仮定を用いる場合には  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  がある。従って、平板要素の断面は変形後も平面を保つという仮定の下で薄板と厚板のそれぞれに対するひずみは次のように表せる。

<薄板>

▶式 10.5

$$\varepsilon_x = u_{,x} = z\theta_{y,x} = -zw_{,xx}$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} = -z\theta_{x,y} = -zw_{,yy}$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = z\theta_{y,y} - z\theta_{x,x} = -2zw_{,xy}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

<厚板>

▶式 10.6

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} = z\theta_{y,z} = z(-w_{,xx} + \gamma_{xz,z}) \\ \varepsilon_y &= v_{,y} = -z\theta_{x,z} = z(-w_{,yy} + \gamma_{yz,z}) \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = z\theta_{y,z} - z\theta_{x,z} = z(-2w_{,xy} + \gamma_{xz,z} + \gamma_{yz,z}) \\ \gamma_{yz} &= w_{,y} - \theta_x \\ \gamma_{zx} &= w_{,x} + \theta_y\end{aligned}$$

上の式から  $y$ - $z$  平面に関する項目を除くと、梁要素と同様の結果になる。薄板の仮定で平面応力に対する応力-ひずみの関係は次の通りである。

▶式 10.7

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

平板要素で曲げモーメントとせん断力は応力を積分して次のように求める。

▶式 10.8

$$M_{xx} = \int_I \sigma_x z dz, \quad M_{yy} = \int_I \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_I \tau_{xy} z dz, \quad V_{xx} = \int_I \tau_{zx} dz = 0, \quad V_{yy} = \int_I \tau_{yz} dz = 0$$

ここで、薄板に関する式 10.5 を適用すると次のような関係が得られる。

▶式 10.9

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix}$$

厚板の場合にも同様にして、力と変形の関係が得られる。

▶式 10.10

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_{xx} \\ V_{yy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & kGt/D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kGt/D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{,xx} + \gamma_{xz,z} \\ -w_{,yy} + \gamma_{yz,z} \\ -2w_{,xy} + \gamma_{xz,z} + \gamma_{yz,z} \\ w_{,y} - \theta_x \\ w_{,x} + \theta_y \end{Bmatrix}$$

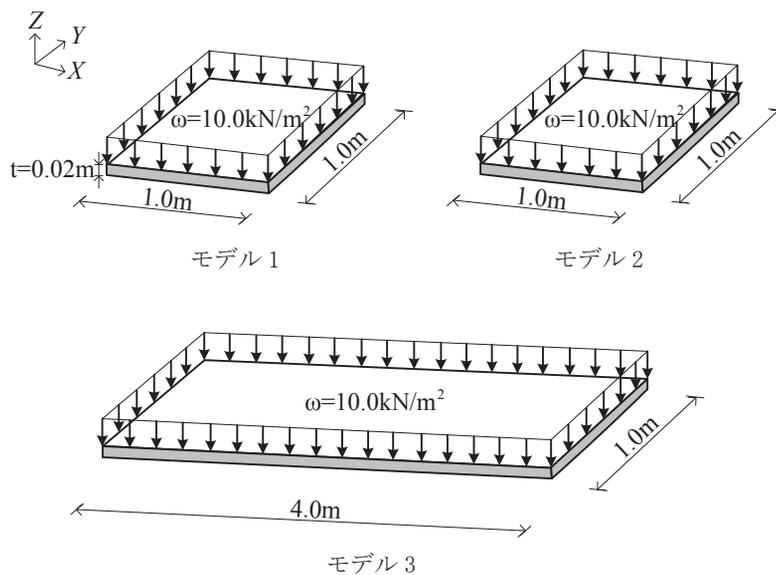
ここで、 $k$  はせん断応力を断面に対して積分する過程で発生する定数であり、均一な厚さを持つ板である場合には  $5/6$  となる。有限要素解析のための数式化のためには 1 章「はじめに」で説明したように変形  $w, \gamma, \theta$  などを適切な関数に仮定することで、力と変形の関係が誘導できる。

## 02.チュートリアル

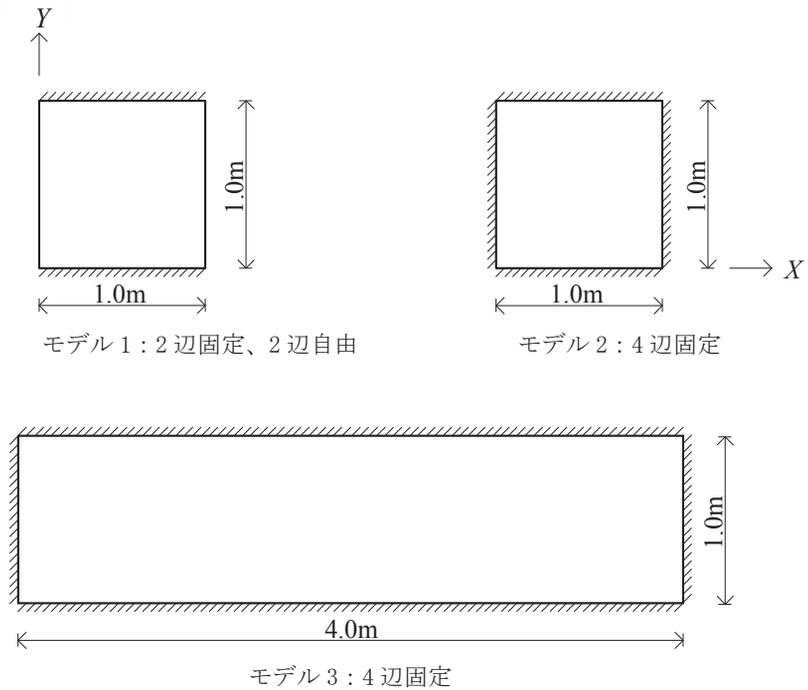
## 02.1 モデルの概要

境界条件と形状が互いに異なる平板に面外荷重が作用する場合、それぞれの主応力の方向を確認し、1/4のモデリングにおける境界条件を入力する方法を学ぶ。

▶図 10.5  
解析モデル (荷重)



▶ 図 10.6  
解析モデル (境界条件)



➤ **材料**

弾性係数 (Steel SM490) :  $2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

ポアソン比 : 0.3

➤ **断面**

厚さ : 20mm

➤ **荷重**

等分布圧力荷重 :  $10 \text{ kN/m}^2$

## 02.2 作業環境の設定

### 02.2.1 単位系の設定

新しいプロジェクトを開き、ファイルを保存する。

メインメニュー  >  新規プロジェクト...

メインメニュー  >  保存

1. ファイル名：“厚板”と入力し、[保存]をクリック

単位系を設定する。

メインメニュー [ツール] > [セッティング] > [単位系]

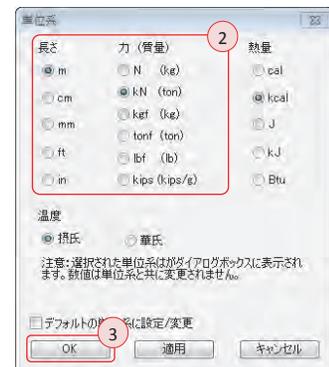
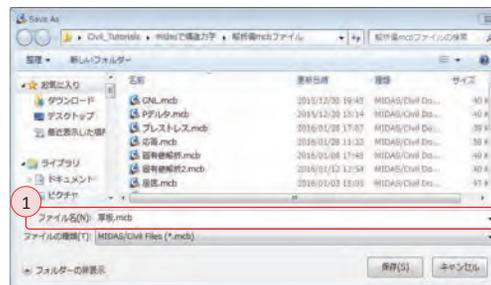
2. 長さ > 「m」、力 > 「kN(ton)」を選択

3. [OK]をクリック

▶ 図 10.7

(a) ファイルの保存

(b) 単位系の設定

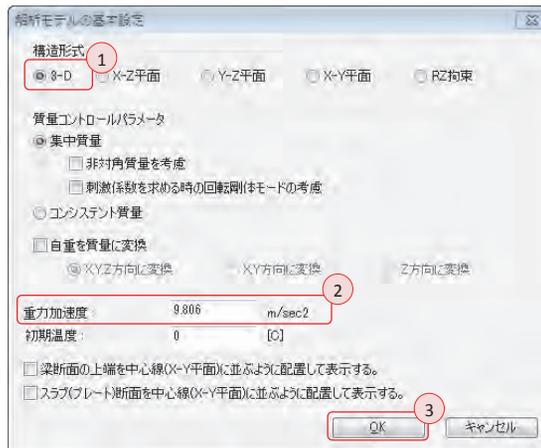


02.2.2 作業平面の設定 本チュートリアルでは X-Y 平面上の平板構造物の Z 方向の挙動を解析するため、構造形式として 3-D タイプを指定する。

メインメニュー [ウィザード] > [基本設定] > **[基本設定]**

1. 構造形式 > 「3-D」を選択
2. 重力加速度： “9.806” 確認
3. [OK] をクリック

▶ 図 10.8  
作業平面の設定



## 02.3 材料及び断面の定義

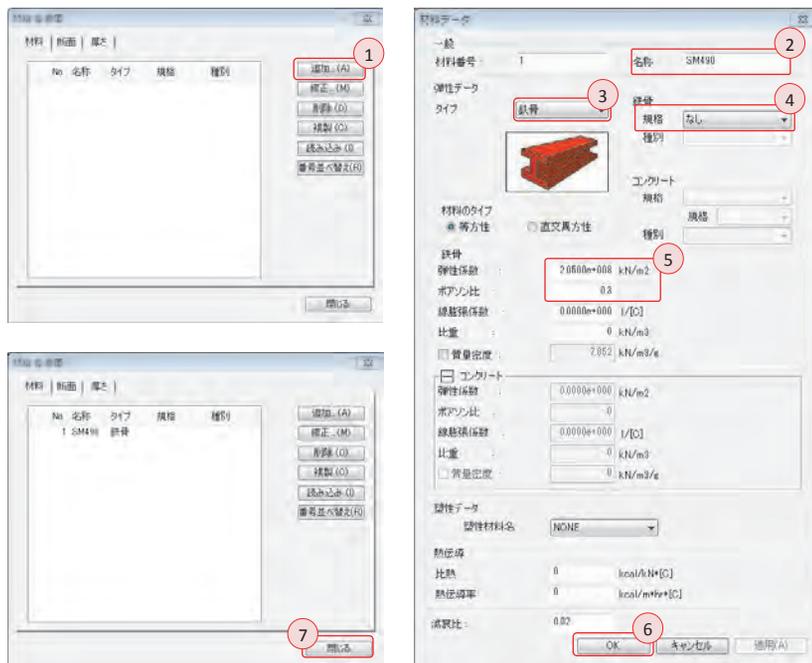
### 02.3.1 材料の定義

解析に使用される材料 (SM490) を定義する。

メインメニュー [材料/断面] > [材料] > **[材料特性]**

1. [追加...]クリック
2. 名称：“SM490”入力
3. 弾性データ > タイプ > 「鉄骨」選択
4. 鉄骨 > 規格 > 「なし」選択
5. 弾性係数 > “2.0500e+008”入力、ポアソン比：“0.3”入力
6. [OK]クリック
7. [閉じる]クリック

▶ 図 10.9  
材料の定義



### 02.3.2 厚さの定義

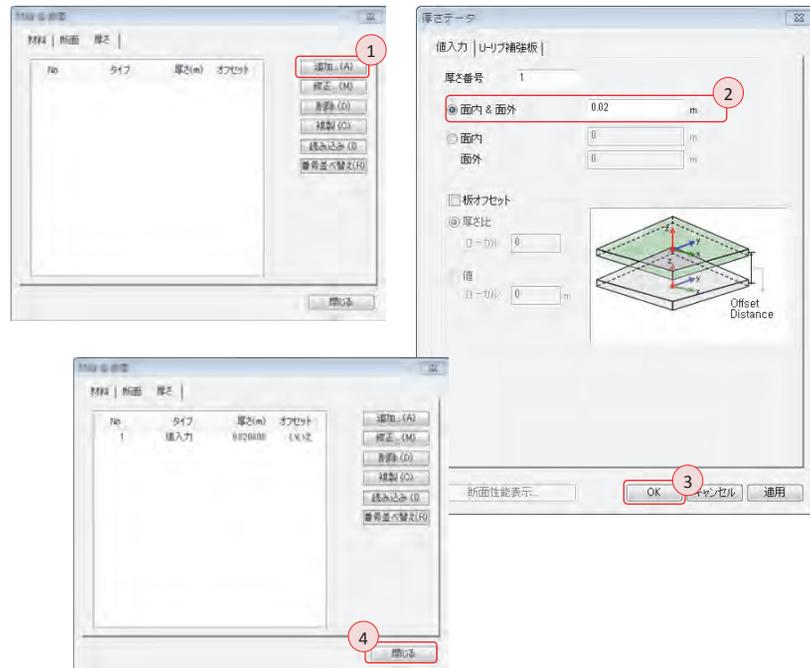
解析する平板の厚さ (20mm) を定義する。

本チュートリアルでは梁要素は使用しないため、断面を定義する必要はなく、平板要素の剛性を計算するため厚さを入力する。

メインメニュー [材料/断面] > [断面] > [厚さ]

1. [追加...]クリック
2. 面内&面外: “0.02” 入力
3. [OK]クリック
4. [閉じる]クリック

▶ 図 10.10  
厚さの定義



## 02.4 節点及び要素の生成

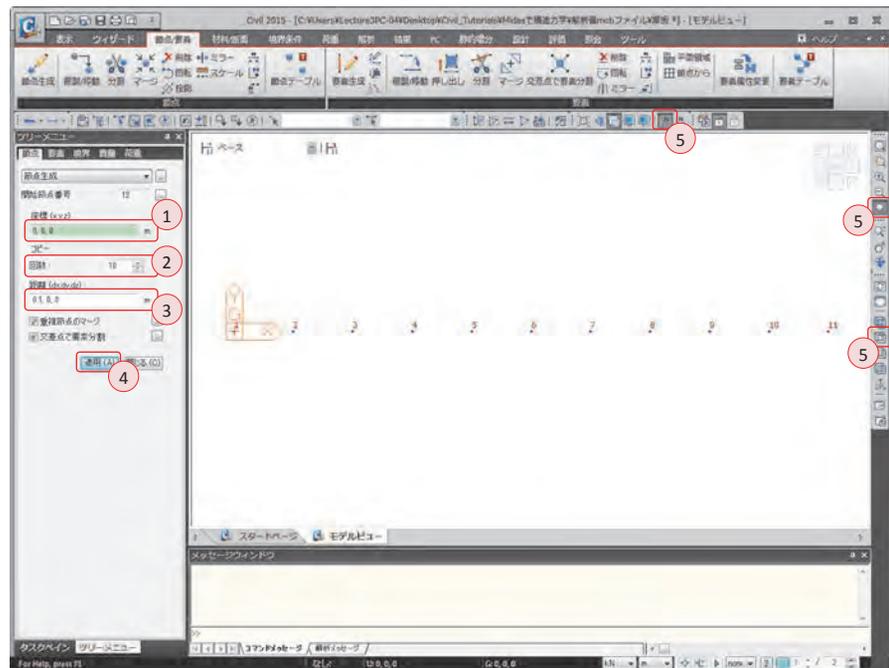
### 02.4.1 節点の生成

平板要素が入力される位置に節点を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > **[節点生成]**

1. 座標 (x, y, z) : “0, 0, 0” 入力
2. コピーの回数 : “10” 入力
3. 距離(dx, dy, dz) : “0.1, 0, 0” 入力
4. [適用]クリック
5. 節点番号、自動フィット、上面 (トグルオン)

▶ 図 10.11  
節点の生成



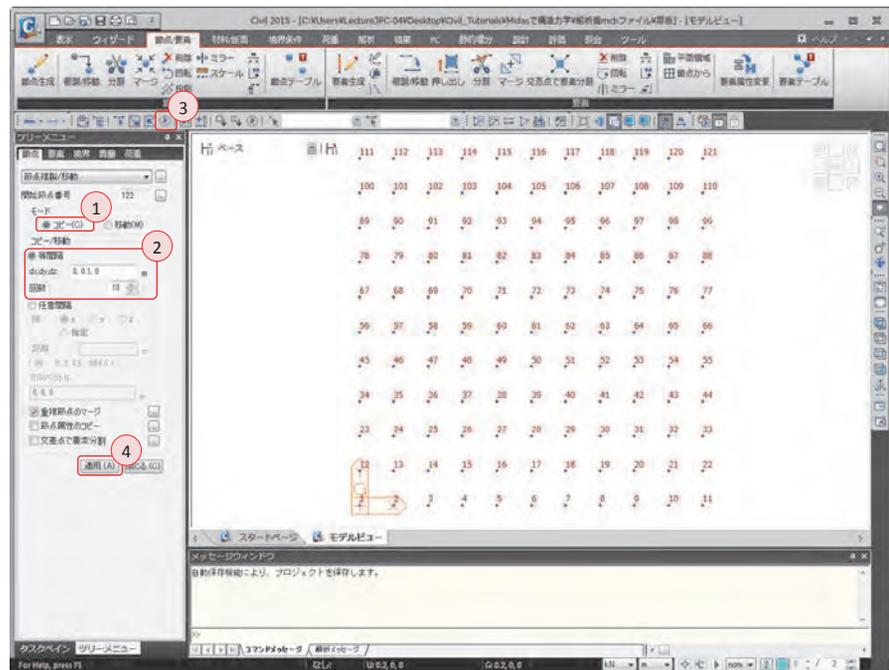
### 02.4.2 節点の複製

節点を複製し、正方形の平板要素を構成する節点を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [複製/移動]

1. モード  「コピー」 選択
2. コピー/移動  「等間隔」 選択 > dx, dy, dz : “0, 0.1, 0” 入力  
回数 : “10” 入力
3.  全て選択 クリック
4. [適用] クリック

▶ 図 10.12  
節点の複製



02.4.3 要素の生成

節点を連結し、平板を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [要素生成]

1. 要素タイプ > 「板要素」を選択  
タイプ > 「厚板」、面内回転自由度を含む (チェックオフ)
2. 材料 > 「1:SM490」を選択、厚さ > 「1:0.0200」を選択
3. 構成節点の入力ボックス内をクリックし緑色に変わったら、モデルビューで正方形を成す節点、節点 11、節点 111、節点 121、節点 111 を順番にクリック



1. 板要素で、「厚板」  
「薄板」の違いは？

厚板>

せん断変形を考慮する。

薄板>

せん断変形を考慮しない。

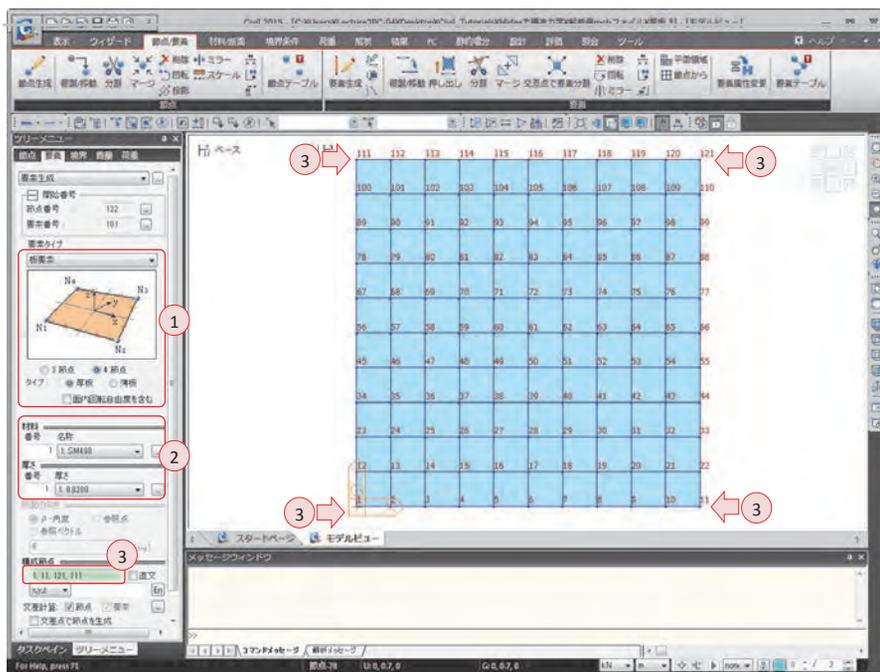
(デフォルト：厚板)

2. 「面内回転自由度を含む」  
とは？

平板要素の要素座標軸の  
z 方向の回転自由度の考慮  
有無を選択するオプション

(デフォルト：チェック (考慮  
しない))

▶ 図 10.13  
板要素の生成



## 02.5 境界条件の入力

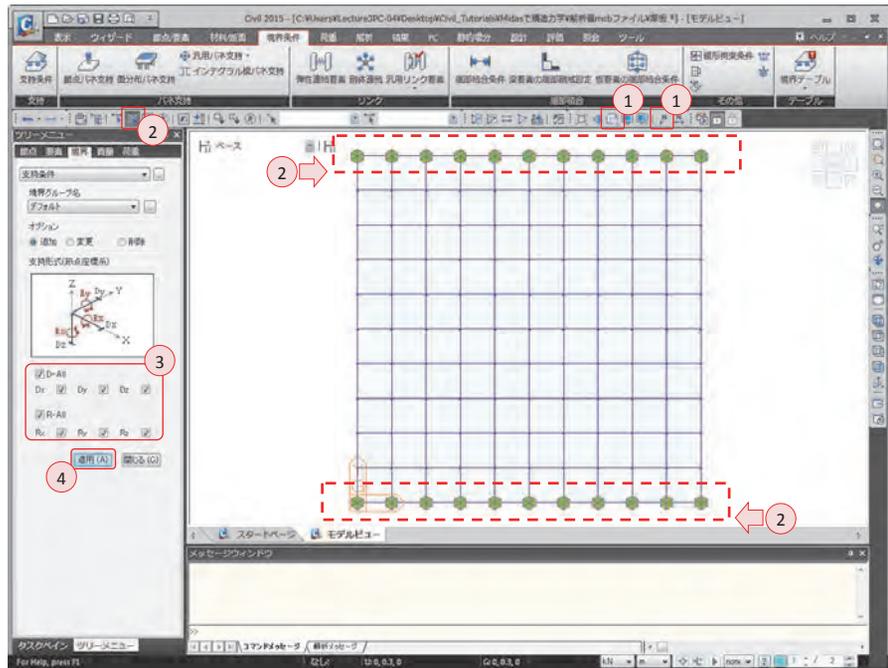
モデル 1 は 2 辺固定・2 辺自由の条件であるため、上下部の 2 辺の全ての自由度 (Dx, Dy, Dz, Rx, Ry, Rz) を拘束し境界条件を入力する。

### 1. 隠線除去表示, 節点番号 (トグルオフ)

メインメニュー [境界条件] > [支持] > **[支持条件]**

2.  **ウィンドウで選択**で上辺と下辺の節点を選択 (下図を参照)
3. 支持形式 > **D-A11**、**R-A11** (チェックオン)
4. **[適用]** クリック

▶ 図 10.14  
境界条件の入力



## 02.6 荷重の入力

02.6.1 荷重条件の定義 節点荷重と温度荷重を入力するために荷重条件を定義する。

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [荷重ケースの生成] > **[静的荷重ケース]**

1. 名称：“圧力” 入力
2. タイプ > 「ユーザー定義荷重 (USER)」 選択
3. [追加] クリック
4. [閉じる] クリック

▶ 図 10.15  
荷重条件の定義



02.6.2 圧力荷重の入力 平板要素に  $10 \text{ kN/m}^2$  の圧力荷重を入力する。

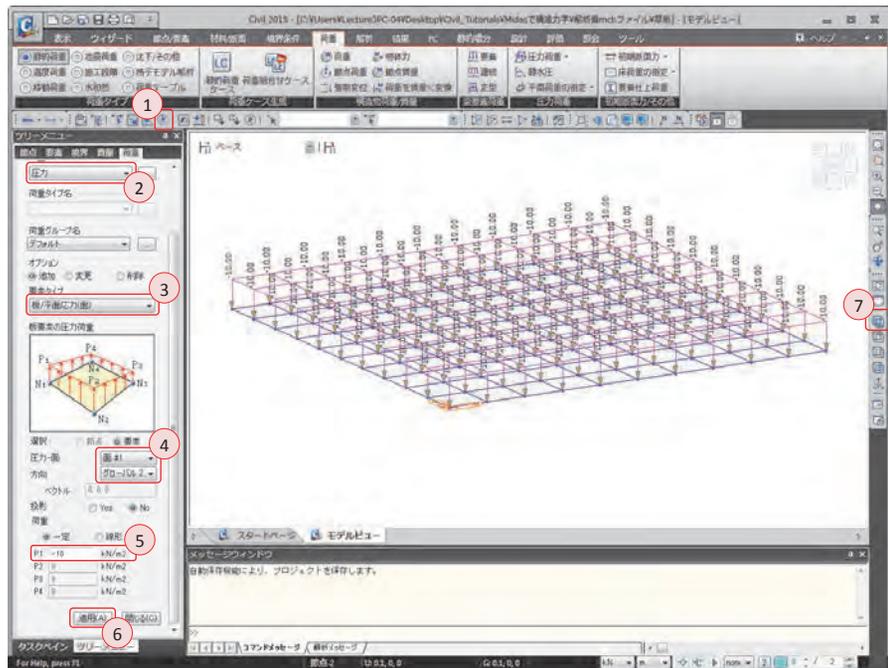
メインメニュー [表示] > [ディスプレイ] > [ディスプレイ]

1. 荷重タブ > 荷重値 (チェックオン) 、[OK] クリック

メインメニュー [荷重/静的荷重] > [圧力荷重] > [圧力荷重] > [圧力荷重の割り当て]

1.  全て選択 クリック
2. 荷重ケース名 > 「圧力」 選択
3. 要素タイプ > 「板/平面応力(面)」 選択
4. 板要素の圧力荷重 > 圧力-面 > 「面 #1」 選択  
方向 > 「グローバル Z」 選択
5. 荷重 > P1 : “-10” 入力
6. [適用] クリック
7. アイソメビュー クリック

▶ 図 10.16  
圧力荷重の入力

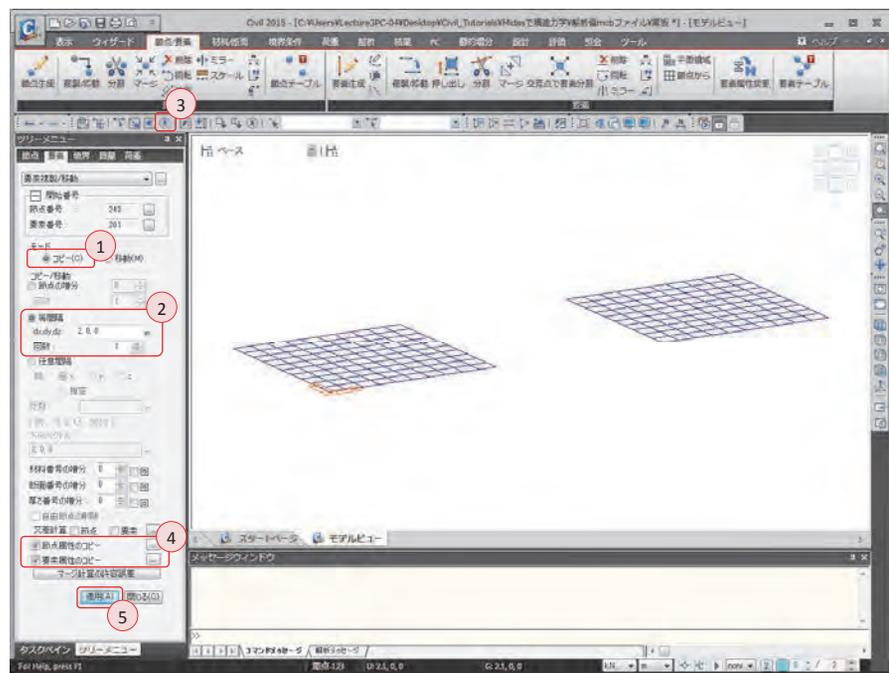


02.6.3 モデル2の生成      モデル1に入力されている圧力荷重と境界条件を複製し、モデル2を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [複製/移動]

1. モード      > 「コピー」 選択
2. コピー/移動 > 「等間隔」 選択 > dx, dy, dz : “2, 0, 0” 入力  
回数      : “1” 入力
3.  全て選択クリック
4. 節点属性のコピー、要素属性のコピー (チェックオン)
5. [適用] クリック

▶ 図 10.17  
モデル2の生成



02.6.4 境界条件の修正 モデル2の境界条件を修正する。

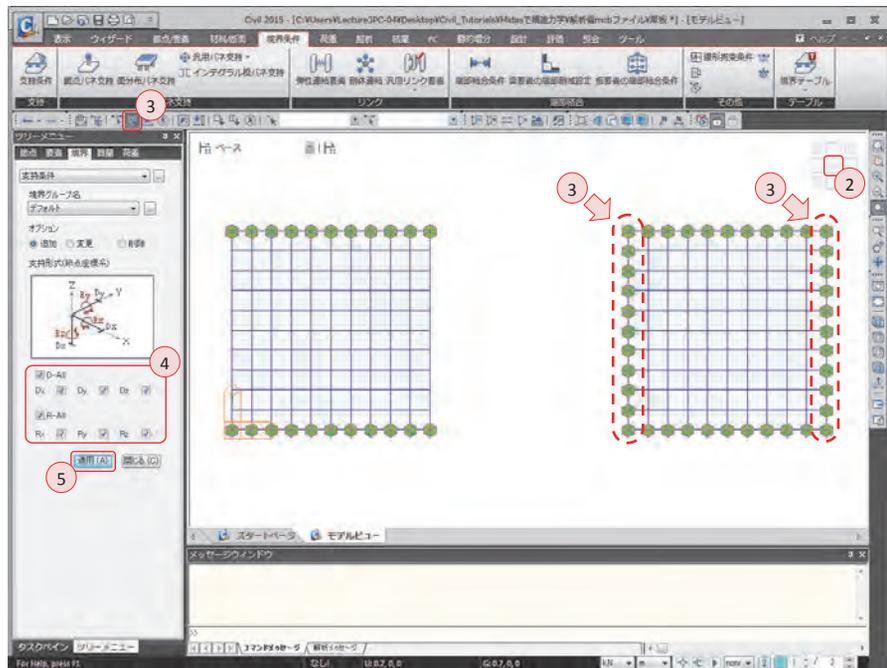
メインメニュー [表示] > [ディスプレイ] > [ディスプレイ]

1. 境界条件タブ > 支持条件 (チェックオン)、[OK]クリック
2. 上面ビューをクリック

メインメニュー [境界条件] > [支持] > [支持条件]

3.  ウィンドウで選択でモデル2の右辺と左辺の節点を選択 (下図を参照)
4. 支持形式 > D-A11、R-A11 (チェックオン)
5. [適用]クリック

▶ 図 10.18  
モデル2の境界条件の修正

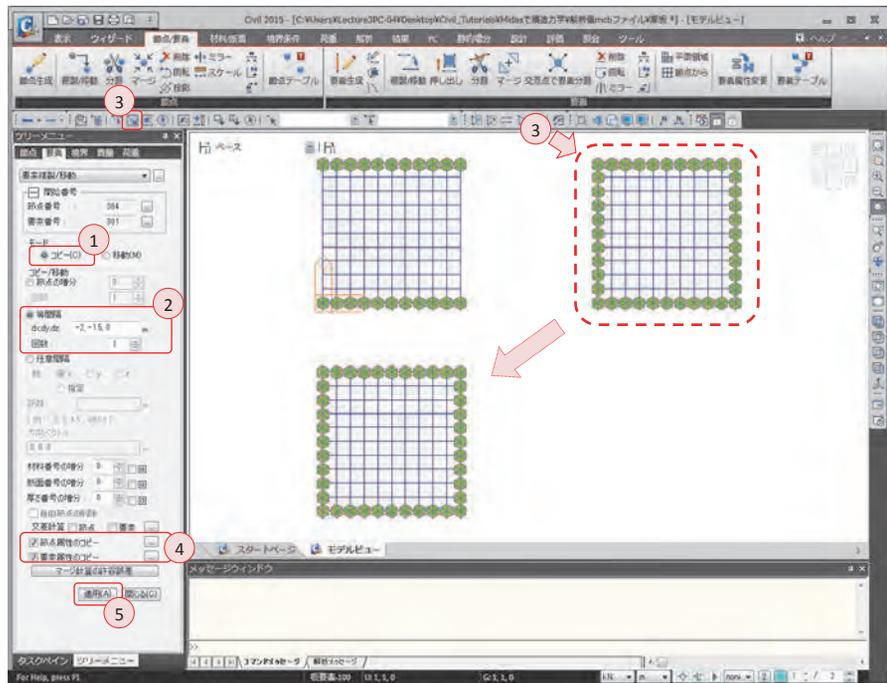


02.6.5 モデル3の生成 モデル2に入力されている圧力荷重と境界条件を複製しモデル3を生成する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [複製/移動]

1. モード > 「コピー」 選択
2. コピー/移動 > 「等間隔」 選択 > dx, dy, dz : “-2, -1.5, 0” 入力  
回数 : “1” 入力
3.  ウィンドウで選択をクリックし、モデル2を選択
4. 節点属性のコピー、要素属性のコピー (チェックオン)
5. [適用] クリック

▶ 図 10.19  
モデル2の生成

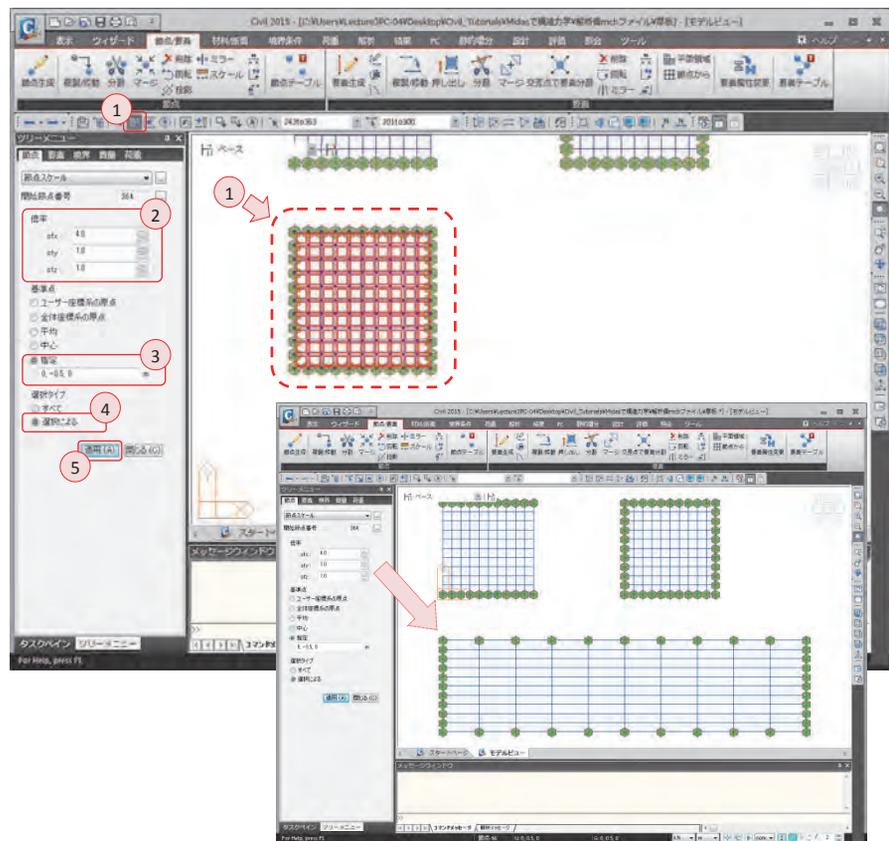


スケール機能を利用し複製された平板要素（モデル3）の節点を X 方向に 4 倍なるように拡大する。

メインメニュー [節点/要素] > [節点] > [スケール]

1.  ウィンドウで選択をクリックし、モデル3を選択
2. 倍率 > sfx: “4.0”、sfy: “1.0”、sfz: “1.0” 入力
3. 基準点 > 「指定」選択 > “0, -0.5, 0” 入力
4. 選択タイプ > 「選択による」選択
5. [適用]クリック

▶図 10.20  
モデル3のスケール修正



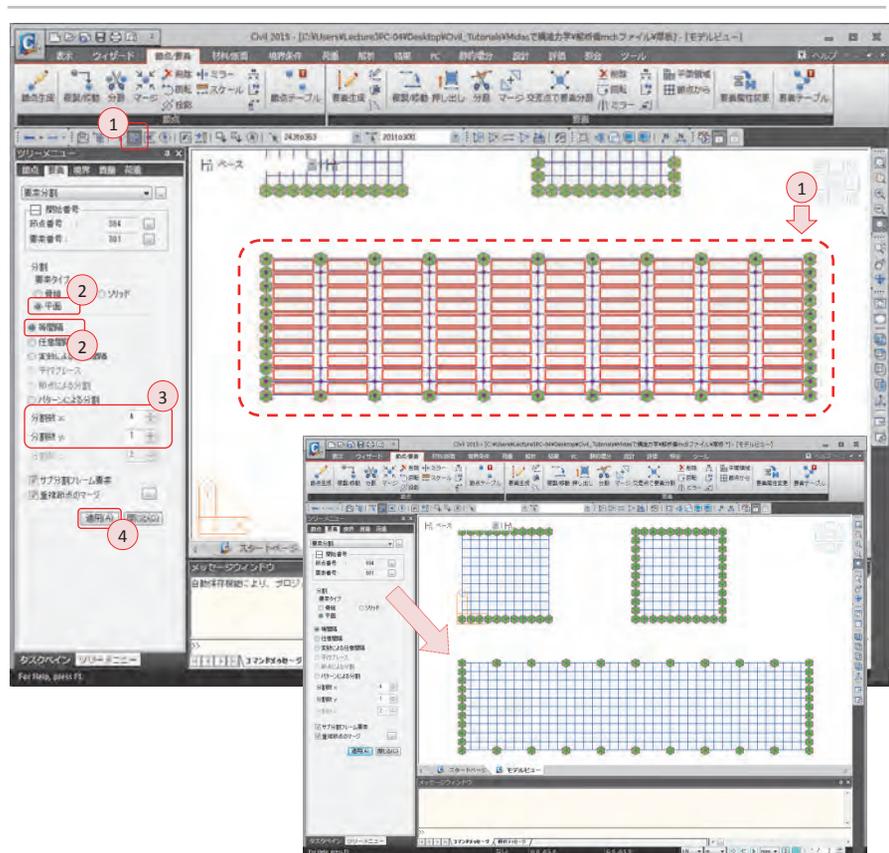
モデル 3 を要素座標系の x 軸方向に 4 等分する。

平板要素を解析する際には、要素の形状や大きさが解析に大きく影響する。正確な構造解析のためには要素の形状比 (aspect ratio) や角度などを調節し、適切にまとまった要素メッシュ (fine mesh) で構成する必要がある。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > [分割]

1.  ウィンドウで選択をクリックし、モデル 3 を選択
2. 分割 > 「平面」選択 > 「等間隔」選択
3. 分割数 x: “4”、分割数 y: “1” 入力
4. [適用] クリック

▶ 図 10.21  
モデル 3 の要素分割

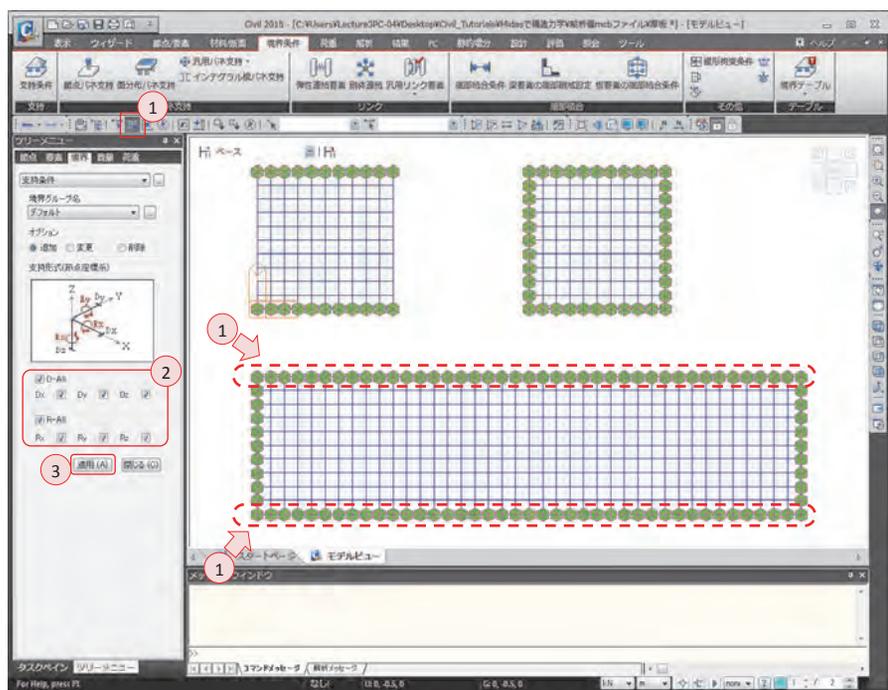


モデル3の要素分割により生成された節点に境界条件を入力する。

メインメニュー [境界条件] > [支持] > **[支持条件]**

1. **ウィンドウで選択**でモデル3の**右辺と左辺**の節点を選択 (下図を参照)
2. 支持形式 > **D-A11、R-A11** (チェックオン)
3. **[適用]**クリック

▶ 図 10.22  
モデル3の境界条件を追加



02.6.6 モデル 3 の対称  
の縮小モデルの生成

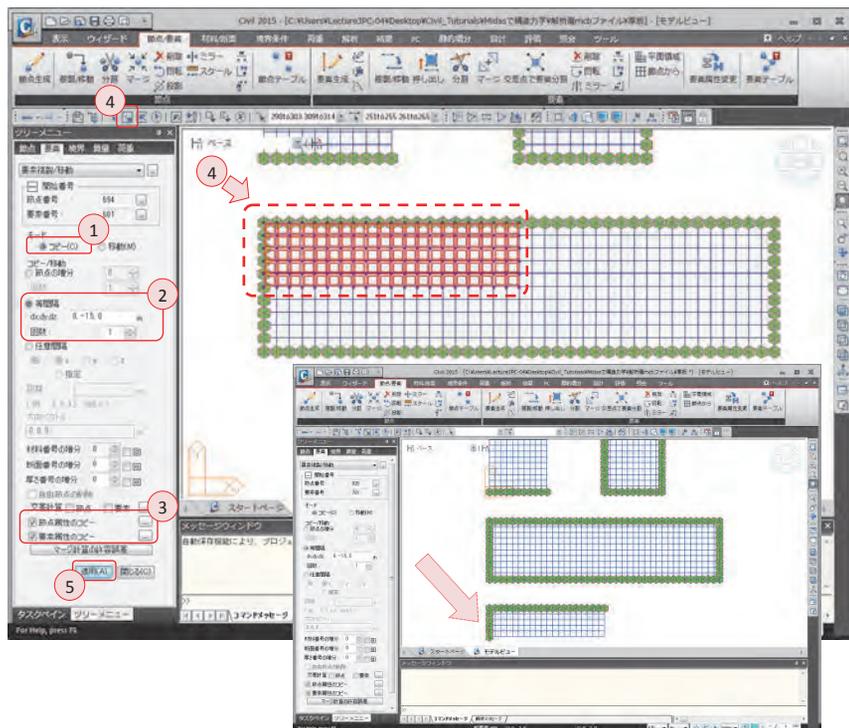
モデル 3 の左上 1/4 を複製し、モデル 4 を生成する。

構造物と載荷される荷重が対称であれば構造物の挙動も対称性を持つ。このような構造物は、全体の 1/2 または、1/4 のみをモデリングし、対称軸に適切な境界条件を与えて解析することで、効率的な作業が可能となる。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > **[複製/移動]**

1. モード > 「コピー」 選択
2. コピー/移動 > 「等間隔」 選択 > dx, dy, dz : “0, -1.5, 0” 入力  
回数 : “1” 入力
3. 節点属性のコピー、要素属性のコピー (チェックオン)
4.  ウィンドウで選択をクリックし、  
モデル 3 の 1/4 (X 方向 20 セル、Y 方向 5 セル) を選択 (下図を参照)
5. [適用] クリック

▶ 図 10.23  
モデル 4 (モデル 3 の 1/4 対象  
モデル) の生成

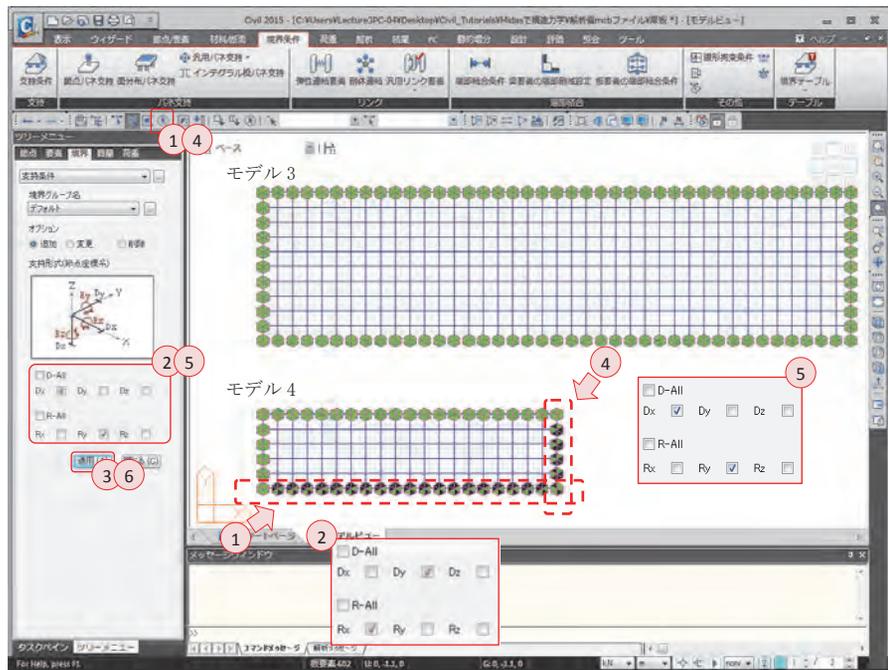


モデル4の対称境界面に拘束条件を入力する。  
鉛直方向の変位自由度と対称軸に対する回転変位の自由度を拘束する。これは、連続する平板の剛性により当該自由度での変形が発生しないと仮定することを意味する。

メインメニュー [境界条件] > [支持] > **[支持条件]**

1.  ウィンドウで選択でモデル4の下辺の節点を選択（下図を参照）
2. 支持形式 > **Dy**、**Rx**（チェックオン）
3. **[適用]** クリック
4.  ウィンドウで選択でモデル4の右辺の節点を選択（下図を参照）
5. 支持形式 > **Dx**、**Ry**（チェックオン）
6. **[適用]** クリック

▶ 図 10.24  
モデル3の境界条件の追加



## 02.7 構造解析の実行

モデルの生成及び荷重の入力が終わったら構造解析を実行する。

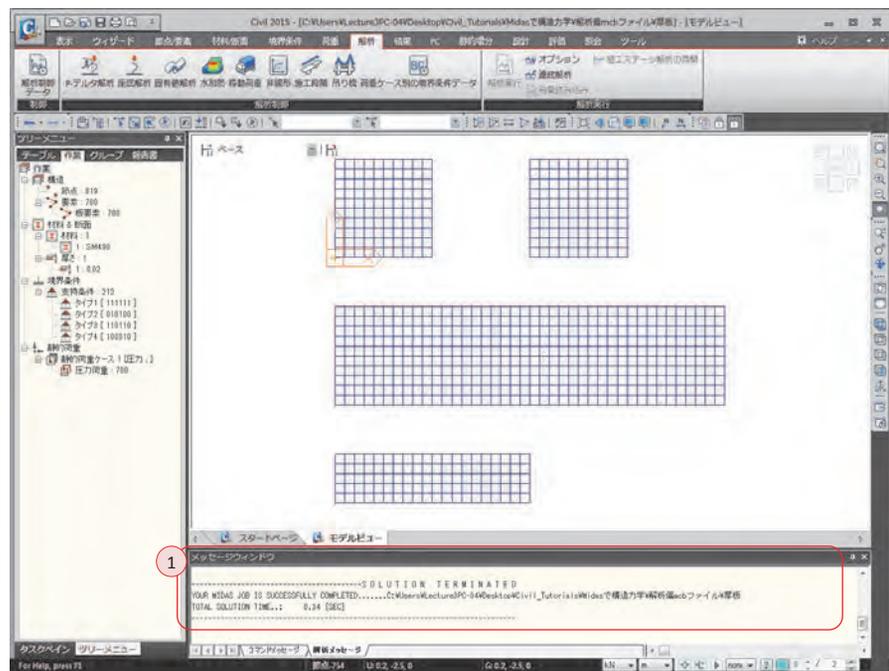
メインメニュー [解析] > [解析実行] > **[解析実行]**

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認

メインメニュー [表示] > [ディスプレイ] > **[ディスプレイ]**

1. **境界条件**タブ > **支持条件** (チェックオフ)、**[OK]**クリック

▶ 図 10.25  
解析の正常終了のメッセージ



## 02.8 解析結果の確認

### 02.8.1 変位及び変形 面荷重による平板要素、モデル1のたわみを確認する。

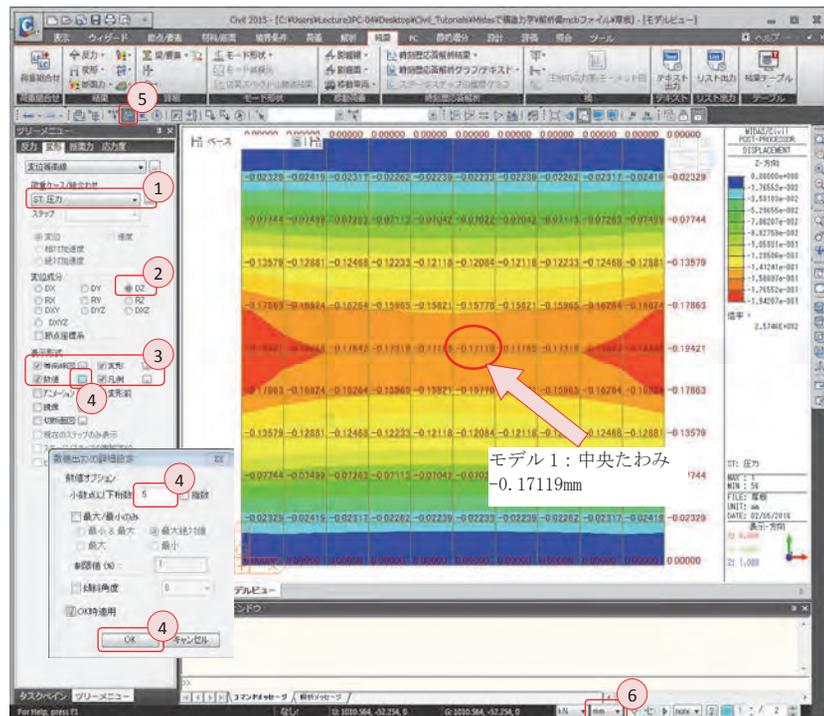
メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変位等高線]

1. 荷重ケース/組合せ > 「ST:圧力」選択
2. 変位成分 > 「DZ」選択
3. 表示形式 > 等高線図、変形、数値、凡例 (チェックオン)
4. 数値の  クリック、小数点以下桁数: “5” 入力、[OK] クリック
5.  ウィンドウで選択でモデル1を選択し、短縮キー-F2
6. ステータスバーで、長さ > 「mm」に変更



F2 は選択した要素のみを表示させる短縮キーである。

▶ 図 10.26  
変位の結果 (モデル1)



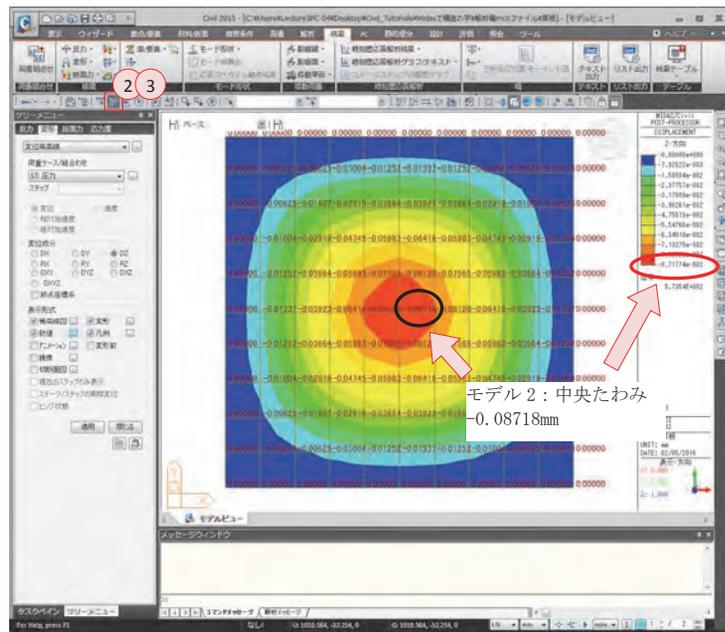
面荷重による平板要素、モデル2、モデル4（モデル3の対称モデル）のたわみを確認する。



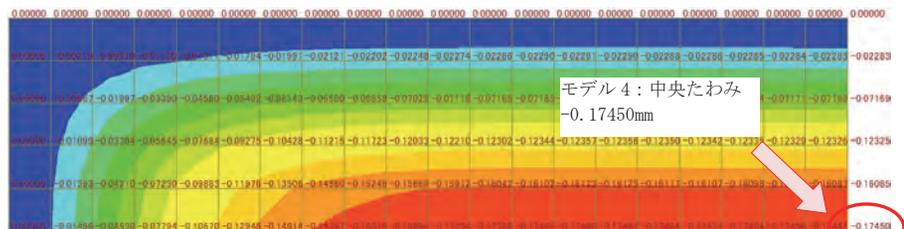
Tip  
全ての要素を表示させる機能は、短縮キー-Ctrl+Aでも実行できる。

1. メインメニュー [表示] > [アクティブ] > [全てアクティブ] ↓
2. ウィンドウで選択でモデル2 選択、短縮キー-F2  
→中央のたわみを確認 (-0.08718mm)
3. 短縮キー「Ctrl+A」、 ウィンドウで選択でモデル4 選択、短縮キー-F2  
→中央のたわみを確認 (-0.17450mm)

▶ 図 10.27  
変位の結果  
(a) モデル 2  
(b) モデル 4



(a)



(b)

02.8.2 部材力

面荷重による平板要素、モデル 1 の端部及び中央のモーメントを確認する。なお、モデル 1 は Y 方向の端部の支点であるため、 $M_{yy}$  成分に設定して確認する。

1. 短縮キー「Ctrl+A」

メインメニュー [結果] > [結果] > [断面力▼] > [板要素の断面力]

2. 荷重ケース/組み合わせ > 「ST:圧力」選択

3. 断面力の成分 > 「 $M_{yy}$ 」選択

4. 表示形式 > 等高線図、変形、数値、凡例 (チェックオン)

5. 数値の  クリック、小数点以下桁数: “2”、[OK] クリック

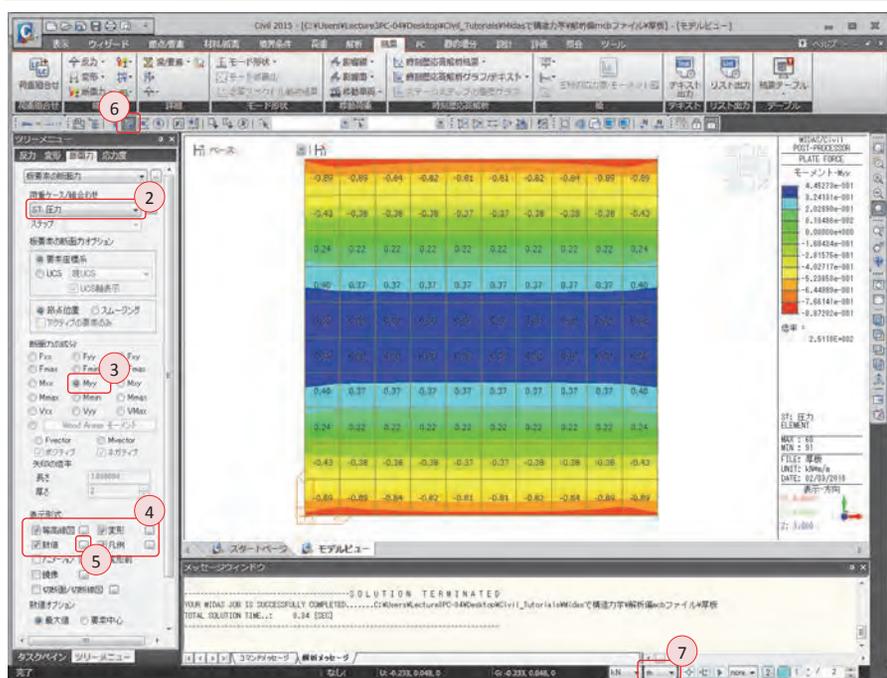
6.  ウィンドウで選択でモデル 1 を選択、短縮キー F2

7. ステータスバーで、長さ > 「m」に変更



**Tip**  
 $F_{xx}$  : x 軸方向の単位幅当たりの軸力  
 $F_{yy}$  : y 軸方向の単位幅当たりの軸力  
 $V_{xx}$  : y-z 平面の単位幅当たりの厚さ方向のせん断力  
 $V_{yy}$  : x-z 平面の単位幅当たりの厚さ方向のせん断力  
 $M_{xx}$  : x 軸方向の単位幅当たりの曲げモーメント  
 $M_{yy}$  : y 軸方向の単位幅当たりの曲げモーメント

▶ 図 10.28  
曲げモーメントの結果 (モデル 1)



中央の正モーメント 0.41kN-m (最大 0.45kN-m)、端部の負モーメント 0.81kN-m (最大 0.89kN-m) が発生することが確認できる。  
 同様にモデル 2、3、4 の端部及び中央のモーメントを確認する。

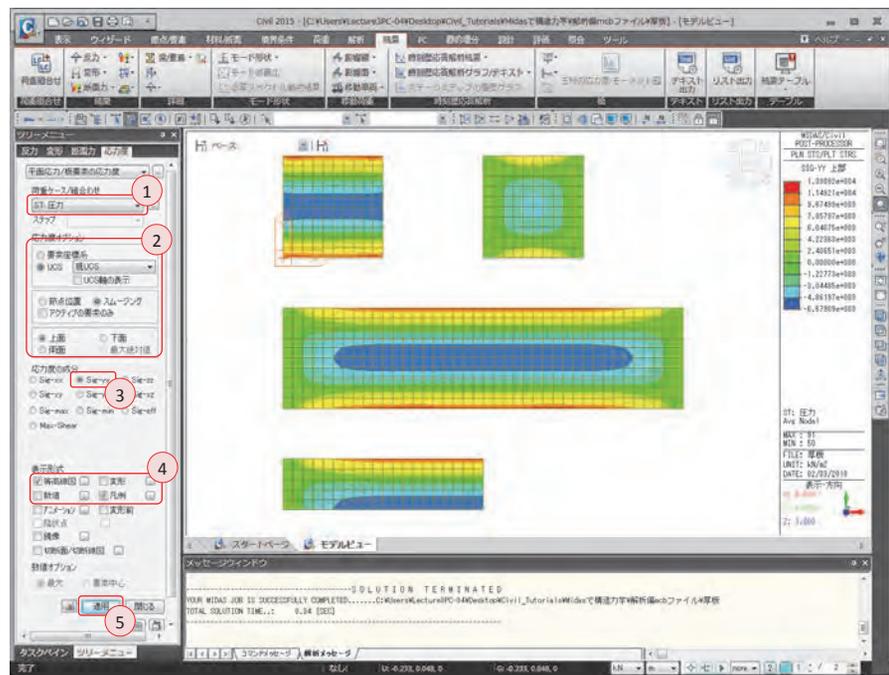
02.8.3 応力

形状と境界条件がそれぞれ異なる板要素の応力を確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [応力▼] > [平面応力/板要素の応力度]

1. 荷重ケース/組み合わせ > 「ST:圧力」 選択
2. 応力度オプション > 「UCS」 選択、「スムージング」 選択、「上面」 選択
3. 応力度の成分 > 「Sig-yy」 選択
4. 表示形式 > 等高線図、凡例 (チェックオン)
5. [適用] クリック
6. 短縮キー「Ctrl+A」

▶図 10.29  
応力



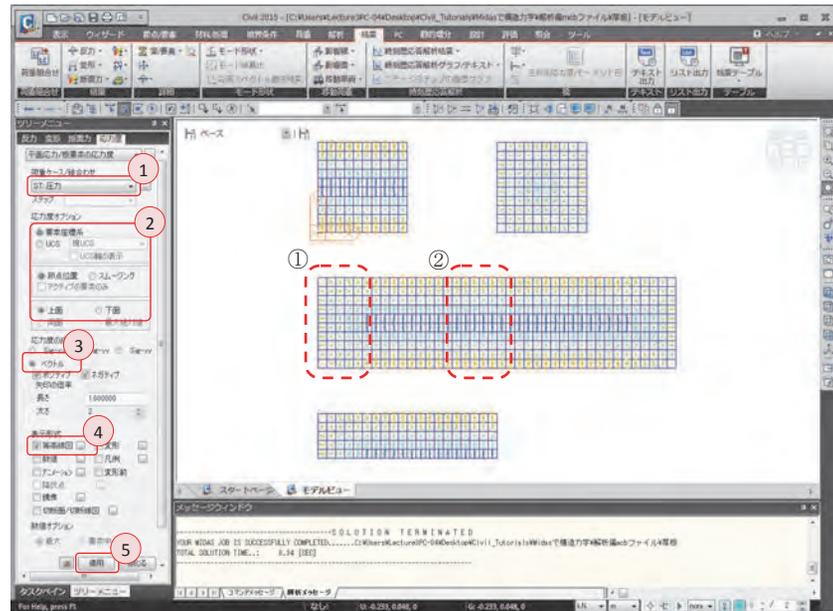
2 辺固定であるモデル 1 において、4 辺固定であるモデル 2 より大きい応力が発生することが確認できる。モデル 3 の場合、短い辺ではモデル 2 と同じ応力が発生し、長い辺ではモデル 1 と同じ応力が発生する。モデル 3 とモデル 4 では同じ応力分布が確認できる。

02.8.4 主応力の方向 形状及び境界条件が異なる板要素のモデルに対し主応力ベクトルを比較する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [応力▼] > [平面応力/板要素の応力度]

1. 荷重ケース/組み合わせ > 「ST:圧力」 選択
2. 応力度オプション > 「要素座標系」 選択、「節点位置」 選択、「上面」 選択
3. 応力度の成分 > 「ベクトル」 選択
4. 表示形式 > 等高線図 (チェックオン)
5. [適用] クリック

▶ 図 10.30  
主応力ベクトル



2 辺固定であるモデル 1 の主応力の方向は支持面に対し垂直であり、4 辺固定であるモデル 2 は支持面に対し 45° 方向である。モデル 3 の①の部分の主応力の方向はモデル 2 の主応力の方向に近い傾向を示し、モデル 3 の②の部分の主応力の方向はモデル 1 の方向と同じである。すなわち、4 辺固定の構造物でも、長辺と短辺の比が 2 以上の場合の内側の応力の流れは 2 辺固定のモデル 1 と同様であることがいえる。従って、モデル 3 のような長方形の板で構成された構造物は短辺方向の断面に対する 2 次元のフレーム構造として解析し設計に適用することができる。1/4モデルであるモデル 4 の主応力の方向は、モデル 3 と同じである。

02.8.5 板要素属性  
の修正モデルの生成

解析モデルを別の名前で作成する。

メインメニュー  > **名前を付けて保存...**

1. ファイル名：“薄板”と入力し、[保存]をクリック

板要素のタイプを薄板（せん断変形を考慮しないタイプ）に修正する。

メインメニュー [節点/要素] > [要素] > **[要素テーブル]**

1. 要素 1 の補助タイプ > 「Thin(w/o Drill)」に変更
2. 入力した Thin(w/o Drill) を他の **要素 2～要素 700** の補助タイプセルに **コピー**  
(要素 1 のセルを選択し、Ctrl+C をクリックした後、他のセルをドラッグで選択し、Ctrl+V をクリックする。)



1. 板要素の平板で、「厚板」と「薄板」の違いは？

厚板>

せん断変形を考慮する。

薄板>

せん断変形を考慮しない。

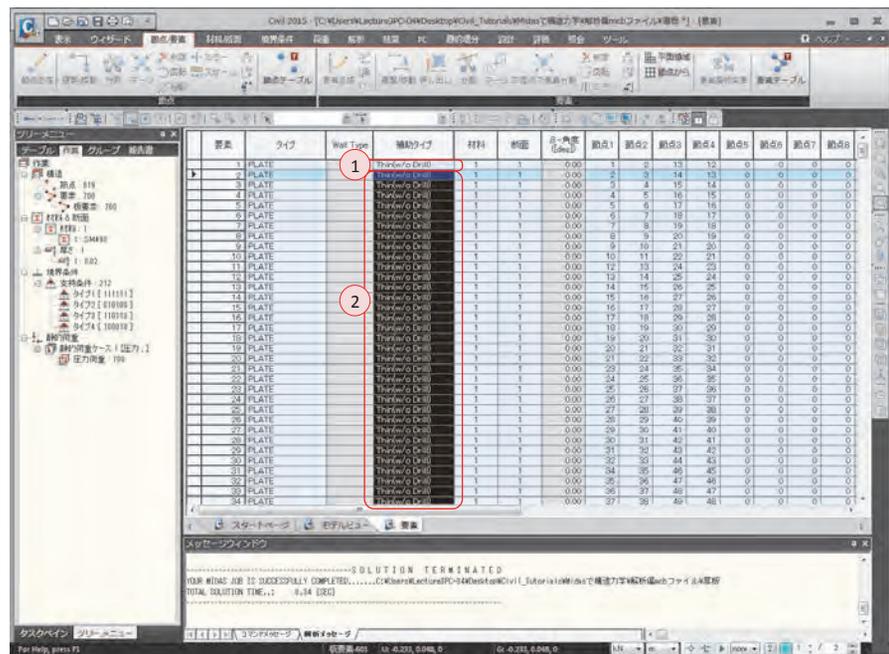
(デフォルト：厚板)

2. 「面内回転自由度を含む」とは？

平板要素の要素座標軸の z 方向の回転自由度の考慮有無を選択するオプション  
(デフォルト：チェック(考慮しない))

▶ 図 10.31

板要素の属性の修正



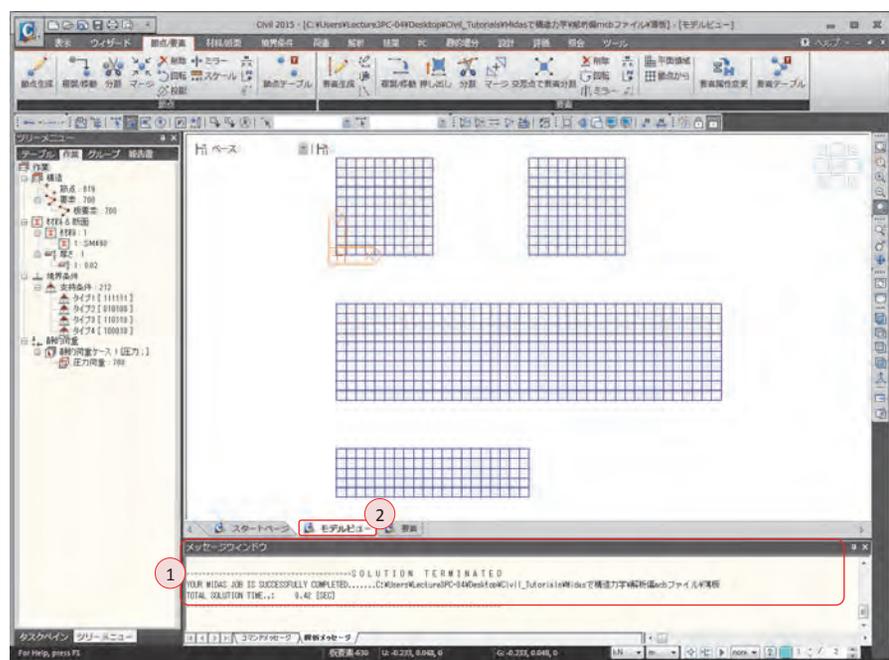
02.8.5 修正モデル  
の構造解析の実行

せん断変形を考慮しないモデルの解析を実行する。

メインメニュー [解析] > [解析実行] > [解析実行]

1. メッセージウィンドウで解析正常終了のメッセージを確認
2. モデルビューをクリック

▶ 図 10.32  
解析の正常終了のメッセージ

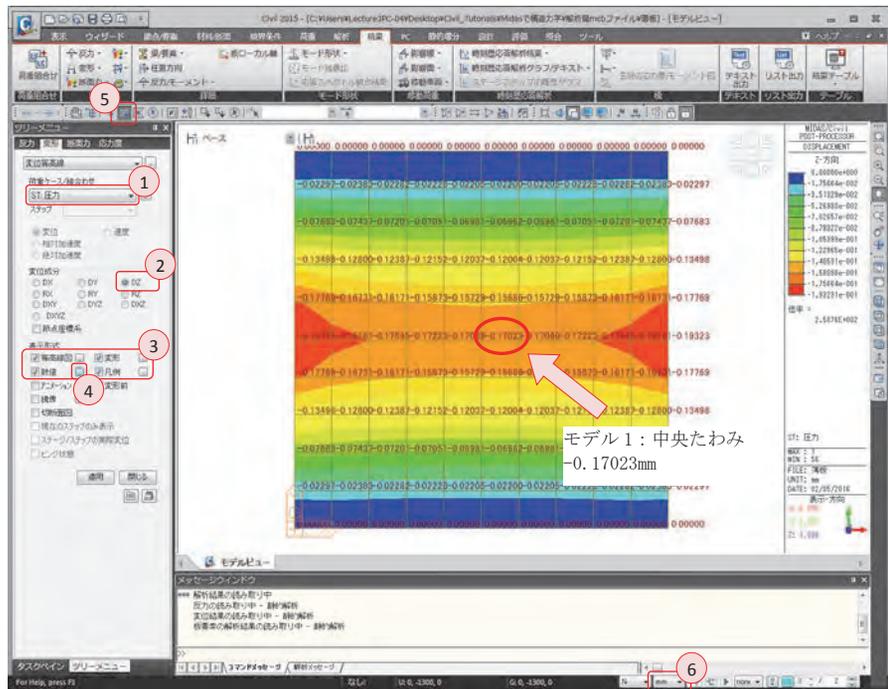


02.8.6 変位及び変形 面荷重による板要素のモデル1のたわみを確認する。

メインメニュー [結果] > [結果] > [変形▼] > [変位等高線]

1. 荷重ケース/組合せ > 「ST:圧力」選択
2. 変位成分 > 「DZ」選択
3. 表示形式 > 等高線図、変形、数値、凡例 (チェックオン)
4. 数値の  クリック、小数点以下桁数: “5” 入力、[OK] クリック
5.  ウィンドウで選択でモデル1を選択し、短縮キーF2
6. ステータスバーで、長さ> 「mm」に変更

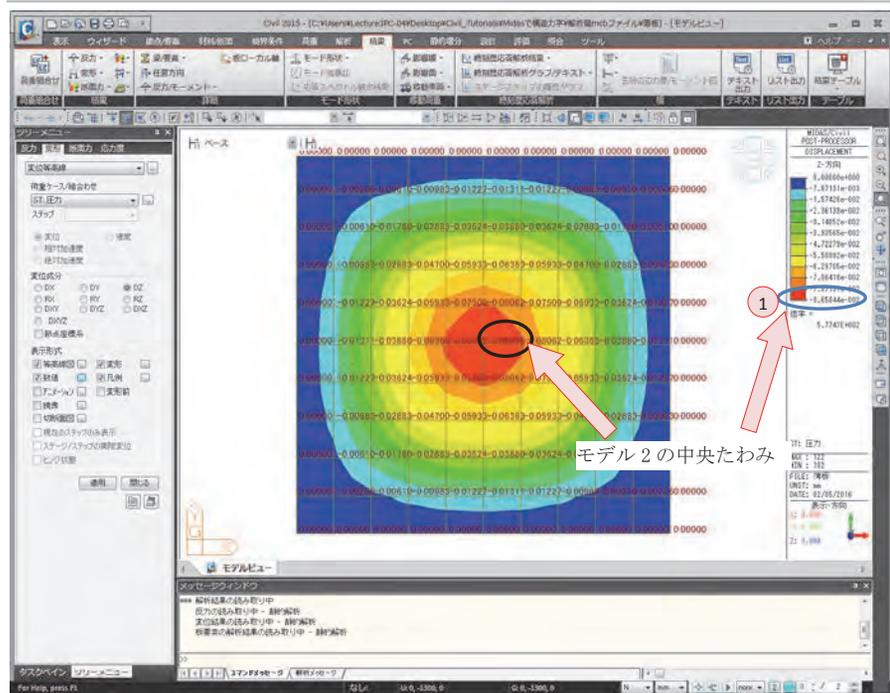
▶ 図 10.33  
変位の結果 (モデル1)



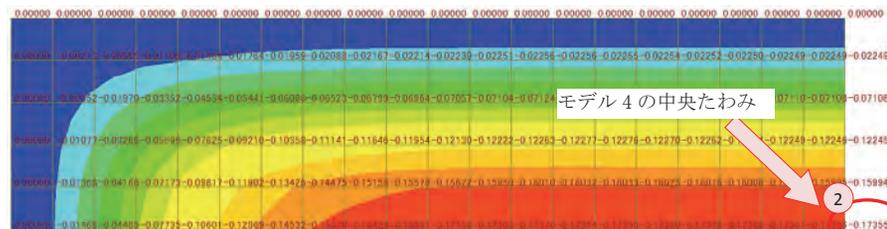
面荷重による板要素モデル 2、モデル 4 (モデル 3 の対称モデル) のたわみを確認する。

1. 短縮キー「Ctrl+a」、 ウィンドウで選択でモデル 2 を選択、短縮キー F2  
→ 中央のたわみを確認 (-0.08658mm)
2. 短縮キー「Ctrl+a」、 ウィンドウで選択でモデル 4 を選択、短縮キー F2  
→ 中央のたわみを確認 (-0.17355mm)

▶ 図 10.34  
変位の結果  
(a) モデル 2  
(b) モデル 4



(a)



(b)

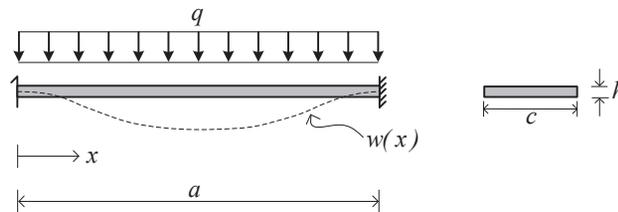
## 03. 構造計算の解説

### 03.1 力学的概念の理解及び数値計算

2次元要素を使用するモデル1～モデル3は、1章の「はじめに」の1次元要素において、軸力や慣性力がない場合を2次元に拡張した概念である。モデル1は対面する両辺のみが拘束されているため、梁に近い1方向の挙動を示し、モデル2とモデル3は4辺が固定されているため、2方向の挙動を示すことが予想できる。しかし、モデル3は形状比 ( $b/a$ 、 $a$ =短辺の長さ、 $b$ =長辺の長さ) が4.0と比較的大きいため、モデル1のような1方向の挙動に近い挙動を示す。

2次元要素である板要素に対する解析結果を理解するため、1次元の梁要素に対する解析結果と比較する。図10.35はスパン長さが $a$ の両端固定梁に等分布荷重が作用する場合を表している。断面積が $c \times h$ であれば、 $D \equiv EI/c$ となり、力の釣り合い式が適用できる。図10.35に関する式10.11は1章「はじめに」の式1.1から軸力とモーメントの項を除いた形をしている。

▶ 図 10.35  
両端固定の梁でのたわみ



▶ 式 10.11

$$EIw''(x) = qc \frac{x}{2}(a-x) - \frac{qc-a^2}{12}$$

式10.11を積分し、境界条件を適用すると次のような結果が得られる。

▶ 式 10.12

$$w(x) = \frac{q}{24D}(-x^4 + 2ax^3 - a^2x^2)$$

モデル 1 は 1 方向に挙動するため、1 次元要素のたわみ式による値と同じになるはずである。従って、中央 ( $x = a/2$ ) でのたわみは式 10.13 のように、両端が固定されている梁における中央のたわみと等しくなる。

▶式 10.13                      モデル 1:      $w_{\max} = qa^4 / (384D) \approx 0.002604qa^4 / D$

上の式では、たわみを方向に関係なく正数で表した。

モデル 2 及び 3 は、2 方向に挙動するため、1 章「はじめに」での式 1.21 に端部モーメントが追加された形の式を用いる。しかし、2 次元要素である板要素の変形を計算する過程は非常に複雑であるため、モデル 2 と 3 は参考文献の中で誘導された式による結果を解析の結果と比較する。以下の式は細い梁を対象に板の中央でのたわみを算定する式である。

▶式 10.14                      モデル 2:      $w_{\max} = 0.00126qa^4 / D$

▶式 10.15                      モデル 3:      $w_{\max} = 0.00260qa^4 / D$

式 10.15 から分かるように、モデル 3 の結果はモデル 1 の結果にほぼ等しい。

板の中心におけるたわみに関する参考文献での計算と解析結果との比較は次のとおりである。

▶表 10.1  
数値計算の結果の比較

モデル	ポアソン比	q	a	参考文献での計算値	解析結果 (薄板)	解析結果 (厚板)
モデル 1	0.3	0.01	1000	0.17340	0.17023	0.17119
	0	0.01	1000	0.19055	0.19055	0.19128
モデル 2	0.3	0.01	1000	0.08390	0.08658	0.08718
モデル 3	0.3	0.01	1000	0.17312	0.17355	0.17450

単位 : N、mm

ポアソン比が 0 ではない場合、モデル 1 に対する解析での板の最大たわみは板の中央ではなく端の方で発生する。しかし、ポアソン比を 0 と想定した場合には中央と端で同じたわみが発生し、薄板の解析結果は参考文献での計算値と一致する。

モデル 2 及び 3 は解析の結果が数値計算の結果より多少大きく、厚板の場合ではより大きい変形が発生することが確認できる。これは、厚板に対する解析ではせん断変形の効果が反映されたためである。

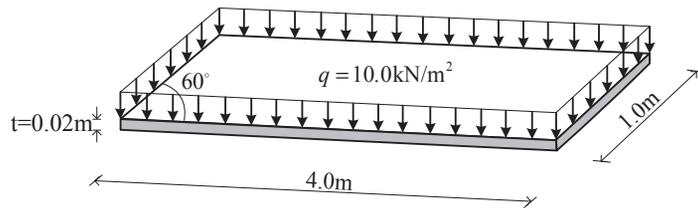
#### 参考文献

"Theory of plates and shell", Timoshenko & Woinowsky-Krieger

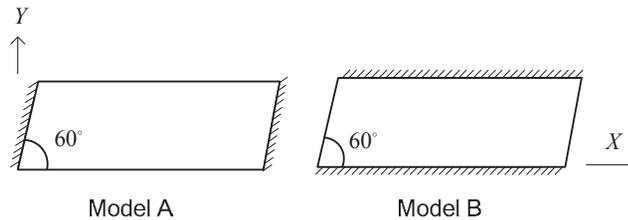
## 04.練習問題

1. 60°傾いた横長い平行四辺形に対し、境界条件による主応力の方向を比較しなさい。

構造形状及び荷重条件



境界条件



➤ **材料**

弾性係数（鋼材 SM490）：  $2.05 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

ポアソン比： 0.3

➤ **断面**

厚さ： 20mm

➤ **荷重**

等分布圧力荷重： 10 kN/m<sup>2</sup>

midas Civil

## Sutong Bridge in China

### The World's Longest Cable Stayed Bridge

The total length of the crossing is 8,206m. The main bridge is a double-cable-plane, double-pylon steel box girder cable stayed bridge. The central span of 1,088m will have a navigation clearance of 62m, which will allow fourth and fifth generation container ships to pass through in all weather.

The bridge and its approaches will be of a six-lane expressway design, with a maximum speed of 100km/h.

This sets a record of being the world's longest cable stay bridge to date.



\*本書はMidas Civil845ver(2015)、SI単位を活用して制作されています。

# Structural Analysis

midas Civilで学ぶ構造力学 | 解析編 |

