

**MIDAS
CONSTRUCTION
TECHNICAL
DOCUMENT
COLLECTION**

土木構造分野 16



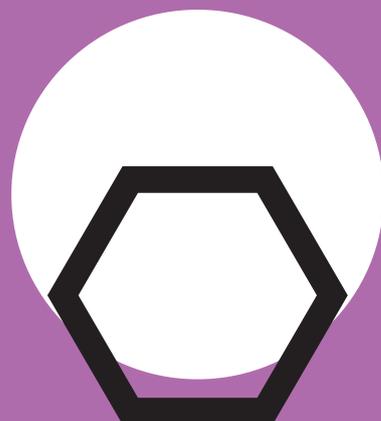
MIDAS CONSTRUCTION TECHNICAL DOCUMENT COLLECTION

土木分野

16.

有限要素法の概要 -要素のからくり

琉球大学 工学部 富山 潤 准教授



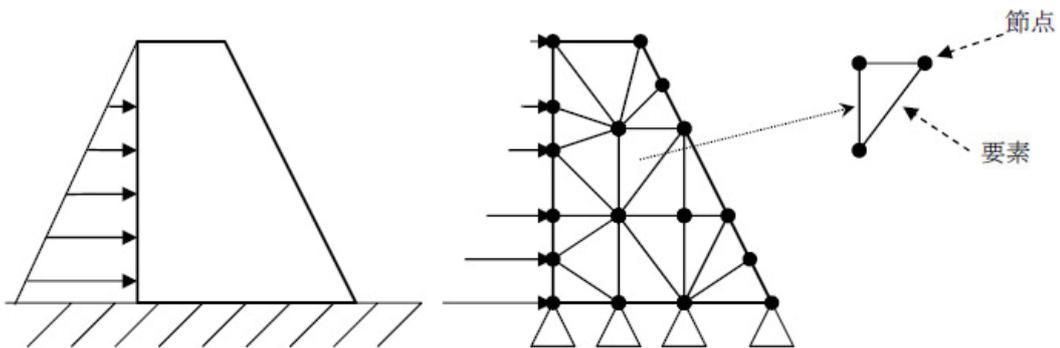
有限要素法の概要

～要素のからくり～

2016年9月26日(月) マイダス講習会
琉球大学
工学部 環境建設工学科
富山 潤

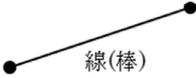
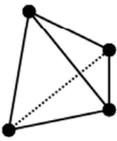
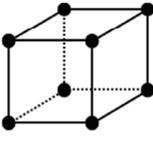
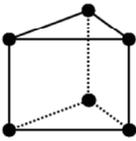
有限要素法とは

- 有限要素法とは、微分方程式を数値解析的に解く手法の一つである。
- 連続体をいくつかの要素(Element)に分けて考え(要素分割)、要素ごとに方程式を作り、それを基に全体の方程式を組み立てて解く近似解法である。



計算領域(平面問題)の有限要素分割の例

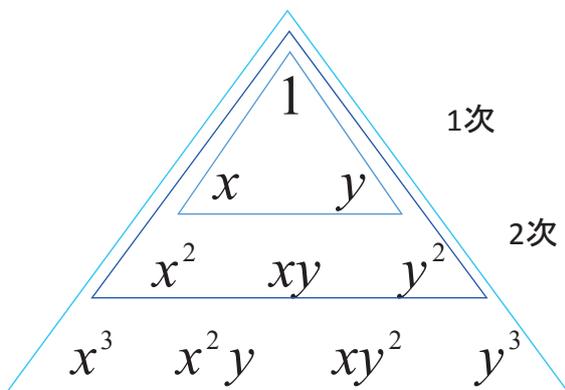
要素の一般的な幾何形状

次元	幾何形状	適用要素
1次元	 線(棒)	<ul style="list-style-type: none"> ・トラス要素 ・はり構造など
2次元	 三角形  四角形	<ul style="list-style-type: none"> ・2次元ソリッド要素 ・軸対称要素 ・板曲げ要素 ・シェル要素など
3次元	 四面体  六面体  五面体	<ul style="list-style-type: none"> ・3次元ソリッド要素

要素内の関数近似(3角形要素)

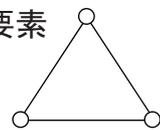
有限要素法では、要素内の変位など、求めたい値を節点の値を用いて求める。

要素内の変位の近似式を作るのにパスカルの三角形を利用すると便利である。



パスカルの三角形

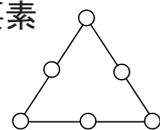
1次要素



$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$

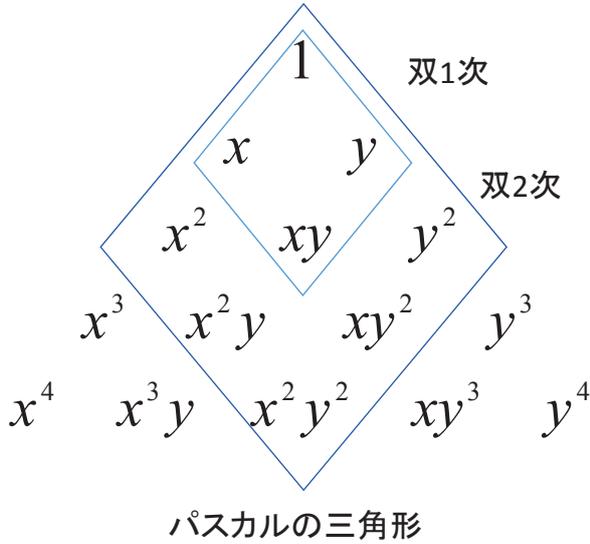
2次要素



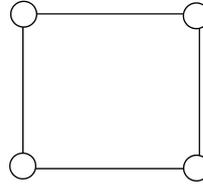
$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2$$

要素内の関数近似(4角形要素)



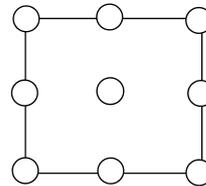
(双)1次要素



$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$$

2次要素



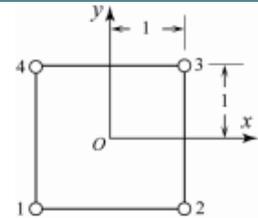
$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^2 y^2$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^2 y + \beta_8 xy^2 + \beta_9 x^2 y^2$$

要素内の関数近似(4角形要素)

要素の変形モード

要素の変形：基本変形モードの重ね合わせ



x方向について

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

基本変形モード：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

	剛体移動	1軸引張	せん断	曲げ
x 軸方向 基本変形 モード (l=1)	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 	$\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ 	$\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 	$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$
y 軸方向 基本変形 モード	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 	$\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$ 	$\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 	$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

※基本変形モードは近似式のx, y方向成分に節点座標を代入することで知ることができる。

要素内の関数近似(4角形要素)

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + a_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

剛体移動 一軸引張 せん断 一次の曲げ

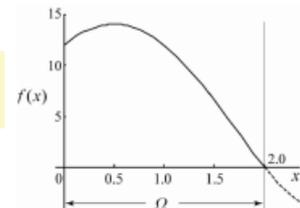
※有限要素法により境界値問題の近似解として得られる任意の変形は、これらの各基本変形モード(ベクトル)の線形和で近似されることになる。



近似関数の違いで、得られる解が異なる！

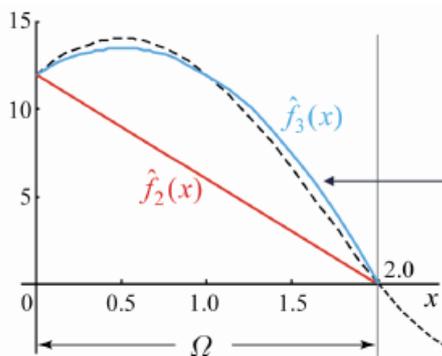
関数近似のイメージ

元の関数： $f(x) = 12 + 8x - 7x^2 - 2x^3 + x^4$



(a) 近似対象とする関数

$\{1, x, x^2\}$ を用いて仮定： $f(x) \approx \hat{f}_3(x) = a + bx + cx^2$



(b) 多項式の次数を上げる近似

$$f(0) = f(1) = 12, f(2) = 0$$

$$\hat{f}_3(x) = 12 + 6x - 6x^2$$

- ◆ 元の関数に近づいた
- ◆ 近似誤差が減少した

関数近似のイメージ

元の関数： $f(x) = 12 + 8x - 7x^2 - 2x^3 + x^4$

$\{1, x, x^2, x^3\}$ を用いて仮定： $f(x) \approx \hat{f}_4(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

問：

- ◆ より元の関数に近づく？
- ◆ さらに近似誤差が減少する



答：

- ◆ YES

$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ を用いて仮定： $f(x) \approx \hat{f}_5(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

問：

- ◆ より元の関数に近づく？
- ◆ 近似誤差は？

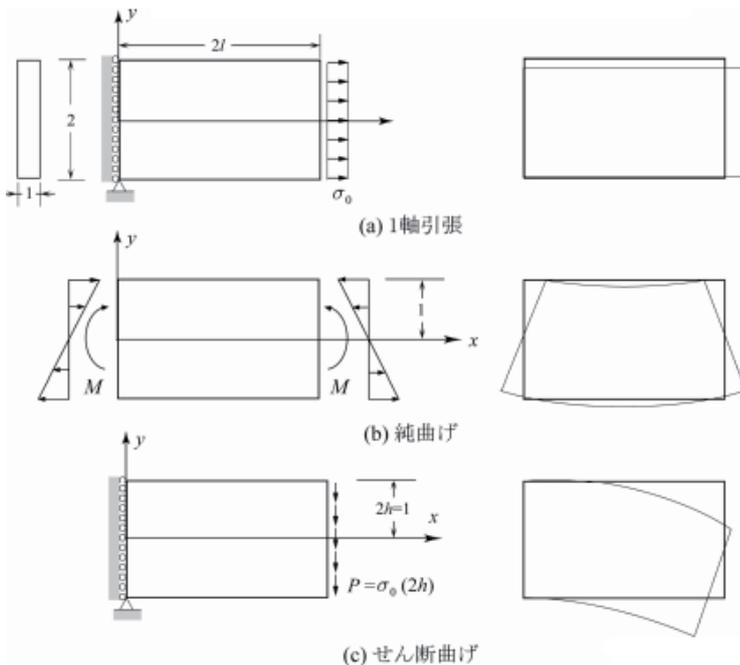


問：

- ◆ YES
- ◆ 誤差 = 0: ZERO!!

関数近似の次数を上げれば、精度は良くなる！

変位問題における要素の変形性能(四角形要素)



解析解(理論解)

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\sigma_0}{E} x \\ v(x, y) &= -\nu \frac{\sigma_0}{E} y \end{aligned} \right\}$$

σ_0 は引張方向の単位面積当たりの分布外力,
 E, ν はそれぞれヤング率, ポアソン比

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{M}{EI} xy \\ v(x, y) &= -\frac{M}{2EI} (x^2 + \nu y^2) \end{aligned} \right\}$$

M はモーメント荷重, I は断面2次モーメント

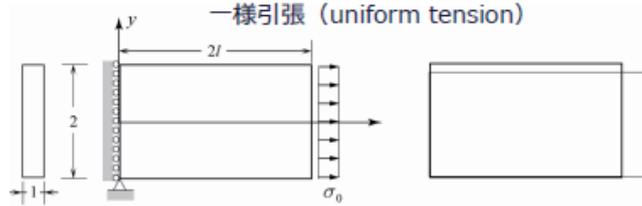
$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{E} \{A[3x^2y - (2+\nu)y^3] + 6Bxy\} \\ v(x, y) &= \frac{1}{E} \{-A[x^3 + \nu xy^2] - 3B[x^2 + \nu y^2] - 2(1+\nu)Cx\} \end{aligned} \right\}$$

$A = -2P/h^3, B = 2Pl/h^3, C = (3/2)(P/h)$

変位問題における要素の変形性能(四角形要素)

厳密解：

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\sigma_0}{E}x \\ v(x, y) &= -\nu \frac{\sigma_0}{E}y \end{aligned} \right\}$$



有限要素解（4節点四辺形要素: QUAD4）：

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &\approx \hat{u}(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v(x, y) &\approx \hat{v}(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \frac{\sigma_0}{E} & b_2 &= -\nu \frac{\sigma_0}{E} \\ a_1 &= a_3 = a_4 = b_1 = b_3 = b_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

	剛体移動	軸引張	せん断	曲げ
x軸方向基本変形モード (i-1)				
y軸方向基本変形モード				

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}(x, y) &= \frac{\sigma_0}{E}x \\ \hat{v}(x, y) &= -\nu \frac{\sigma_0}{E}y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{変位が線形分布 = 応力・ひずみが一定値} \\ &\text{厳密解に一致} \end{aligned}$$

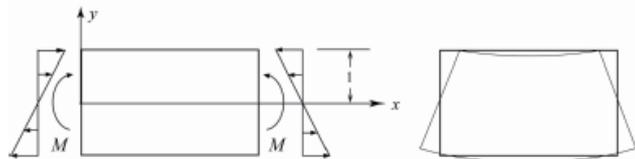
- ◆ 仮定した解が厳密解を含む
- ◆ 厳密解は要素の基本変形モードで表現可能

変位問題における要素の変形性能(四角形要素)

厳密解：

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{M}{EI}xy \\ v(x, y) &= -\frac{M}{EI}(x^2 + \nu y^2) \end{aligned} \right\}$$

純曲げ (pure bending)



x軸方向に双1次
y軸方向に2次の変形モード

有限要素解：

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &\approx \hat{u}(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v(x, y) &\approx \hat{v}(x, y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{aligned} \right\} \text{には含まれない項がある}$$

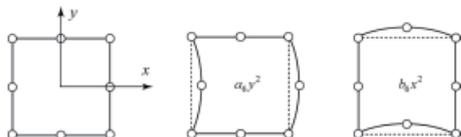
➡ 厳密解を再現できない

しかし、より2次項を含む有限要素解（8節点四辺形要素；二次要素: QUAD8）：

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 \\ \hat{v}(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + b_5x^2 + b_6y^2 + b_7x^2y + b_8xy^2 \end{aligned}$$

を仮定すれば厳密解に含まれる項をすべて含む

➡ 厳密解を再現できる (再現性)

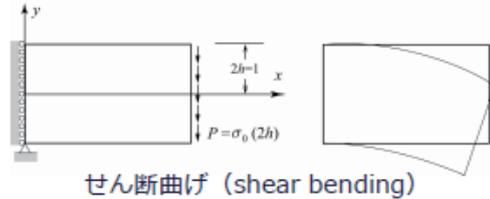


変位問題における要素の変形性能(四角形要素)

厳密解：

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{E} \left\{ A \left[3x^2y - (2 + \nu)y^3 \right] + 6Bxy \right\} \\ v(x, y) &= \frac{1}{E} \left\{ -A \left[x^3 + \nu xy^2 \right] - 3B \left[x^2 + \nu y^2 \right] - 2(1 + \nu)Cx \right\} \end{aligned} \right\}$$

xの3乗のオーダーを含む



1次や2次の多項式を仮定した
有限要素 (4節点四辺形要素や8節点四辺形要素)
では厳密解を再現できない

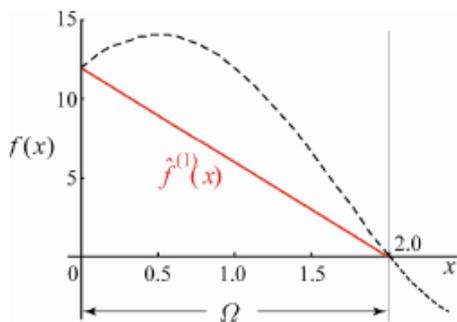
この厳密解は多項式形なので、
節点を増やして次数を上げることで再生することは可能だが、
一般的な境界値問題の解は多項式形であることは期待できない

次数を上げることは節点数を増やせば、

- ・ 厳密解が見つからないような問題でも精度を上げられる
- ・ しかし、自由度を増やえるので計算コストは高くなる

関数近似のイメージ

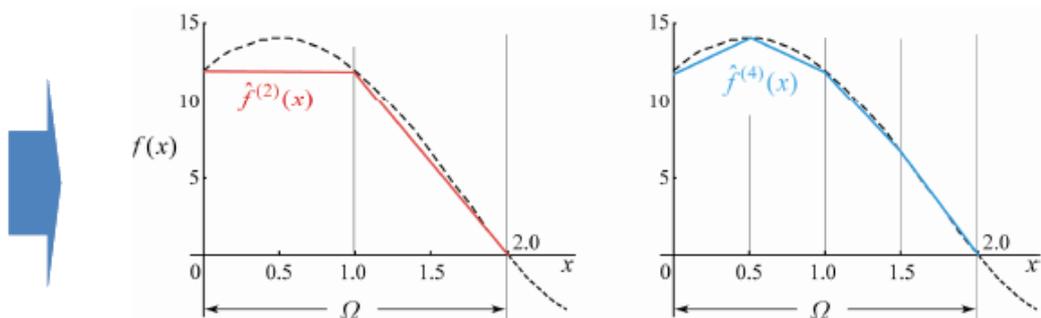
有限要素法では、要素内の関数近似が低くても
解析精度を上げることができる。



- ◆ 多項式の次数は上げない
- ◆ 元の関数を区分的な一次 (線形) 関数を組み合わせて表現

※誤差を含むが、小領域を小さくすることで近似精度は良くなる。小領域を小さくすることは、「点」の挙動に近づくと等価である。

※有限要素法のメッシュの細分化に相当する。



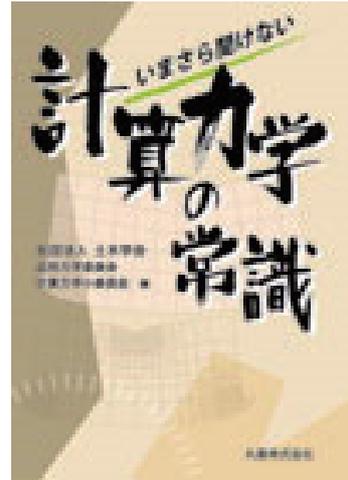
(c) 小領域を小さくする近似

メッシュや要素で答えが変わる！

第2話 メッシュや要素で答えが変わる

- 2.1 「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析
 - 2.1.1 様々なメッシュパターンや要素種類を使って得られる解の比較
 - 2.1.1.1 様々なメッシュパターンや要素種類を使って得られる解の比較
 - 2.1.1.2 要素あるいはメッシュによる精度の変化
 - 2.1.1.3 メッシュ細分化のみでは精度を制御できない例～非圧縮性～
 - 2.2 有限要素解析におけるメッシュの細分化の応用
 - 2.2.1 部分的なメッシュ細分化による精度向上
 - 2.2.2 メッシュ細分化の落とし穴
 - 2.3 まとめ

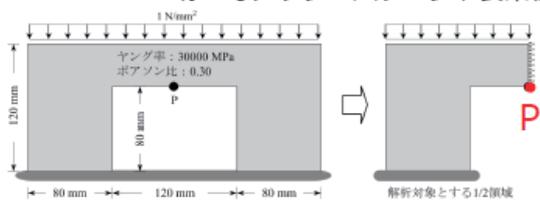
執筆担当：寺田（東北大）・車谷（東北大）



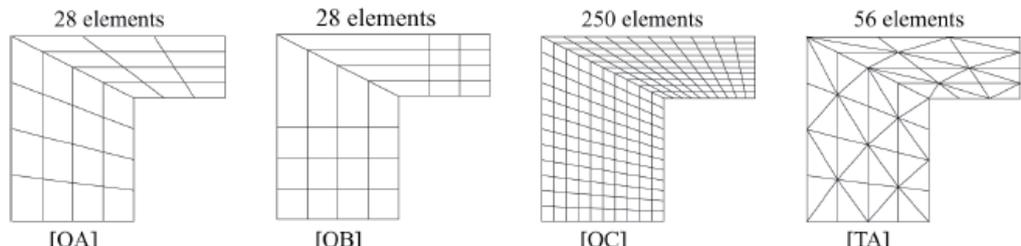
メッシュや要素で答えが変わる！

2.1 「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

2.1.1 様々なメッシュパターンや要素種類を使って得られる解の比較



変位法に基づく有限要素解（理論的考察）
「P点の変位の値が大きいくほど精度が高い」



<QL>		4節点，線形，完全積分	<TL>		3節点，線形
<QI> 高性能要素		4節点，線形，非適合	<TH>		6節点，2次
<QH>		8節点，2次，完全積分	注意：2次の要素QHとTHを用いると メッシュ全体の節点数は増加します		

メッシュや要素で答えが変わる！

つづき

	28 elements [QA]	28 elements [QB]	250 elements [QC]	56 elements [TA]
4節点, 線形 完全積分	0.01589	0.01594	0.0211	
4節点, 線形 高性能要素	0.0188			
3節点, 線形	要素の種類によって答えが変わる			0.0150
6節点, 2次	理論「P点の変位の値が大きいほど精度が高い」			0.0223

要素の数・形状によって答えが変わる

要素の形状・種類によって答えが変わる

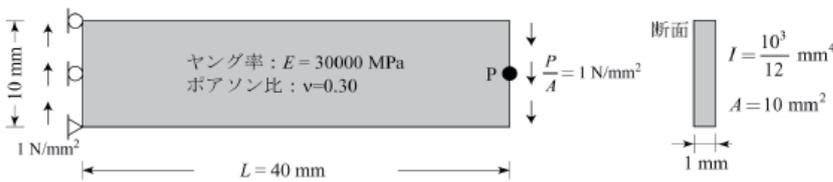
17

メッシュや要素で答えが変わる！

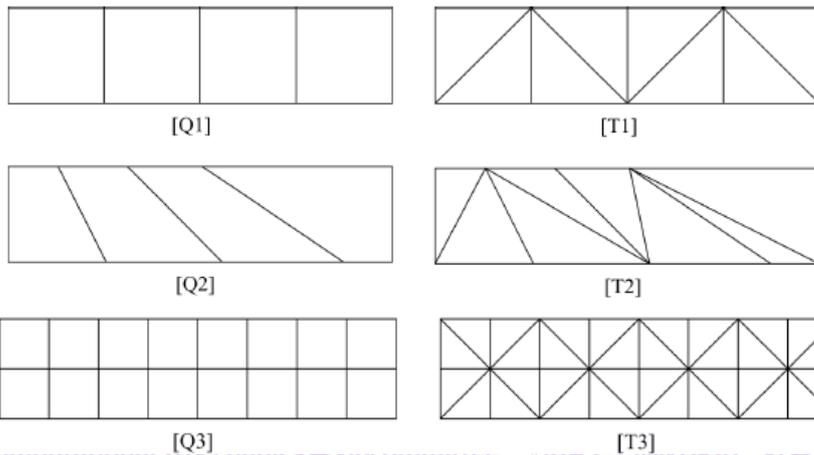
2.1 「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

2.1.2 要素あるいはメッシュによる精度の変化

平面応力下の梁のせん断曲げ問題



$$v_P^{REF} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA} = 0.0895 \text{ (mm)}$$

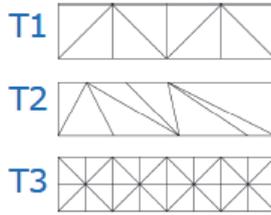
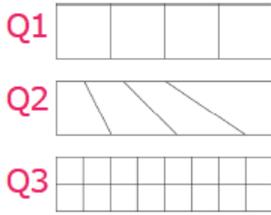


- ◆ 三角形・四角形
- ◆ 線形・高次
- ◆ 高性能（非適合）

18

メッシュや要素で答えが変わる！

つづき



$$v_P^{REF} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5GA}$$

$$= 0.0895 \text{ (mm)}$$

$$ERROR = \frac{|v_P^{FEM}| - |v_P^{REF}|}{|v_P^{REF}|} \times 100 \text{ (%)}$$

メッシュ	要素	誤差(%)
Q1	線形	32.90
Q1	高性能	2.27
Q1	高次(2次)	1.34
Q2	線形	54.60
Q2	高性能	2.70
Q2	高次(2次)	3.26
Q3	線形	11.70
Q3	高性能	1.51
Q3	高次(2次)	0.74

メッシュ	要素	誤差(%)
T1	線形	68.30
T1	高次(2次)	1.82
T2	線形	74.60
T2	高次(2次)	4.04
T3	線形	36.90
T3	高次(2次)	0.74

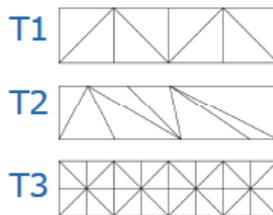
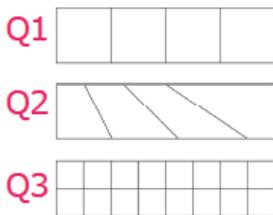
※低次要素において「要素のゆがみ」の問題は深刻である。

19

メッシュや要素で答えが変わる！

2.1 「要素」や「メッシュ」に依存する有限要素解析

2.1.3 メッシュ細分化のみでは精度を制御できない例～非圧縮性～



平面ひずみ下の梁のせん断曲げ問題

$E = 30000 \text{ (MPa)}$

$\nu = 0.499$ ← 擬似非圧縮性

$v_P^{REF} = 0.0675 \text{ (mm)}$

メッシュ	要素	誤差(%)
Q1	線形	94.00
Q1	高次(2次)	0.72
Q2	線形	91.90
Q2	高次(2次)	53.30
Q3	線形	93.80
Q3	高次(2次)	0.53

メッシュ	要素	誤差(%)
T1	線形	62.70
T1	高次(2次)	2.12
T2	線形	76.50
T2	高次(2次)	6.06
T3	線形	31.70
T3	高次(2次)	0.11

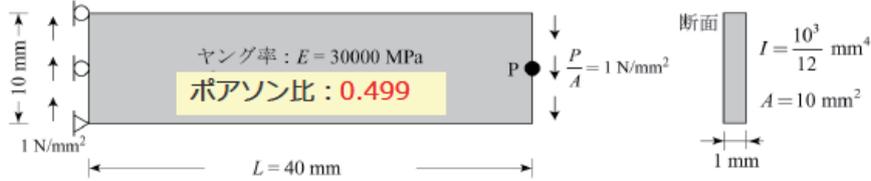
非圧縮性材料：精度を高めるには？

20

メッシュや要素で答えが変わる！

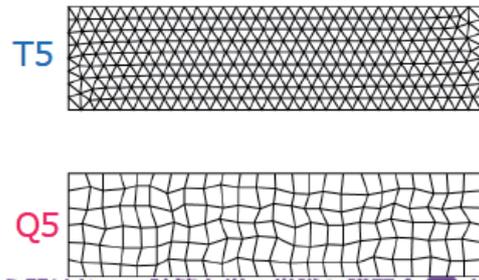
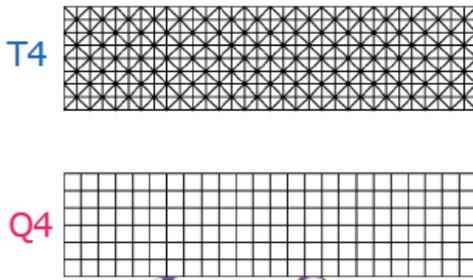
つづき

検討：平面ひずみ擬似非圧縮性の例題
 ～メッシュ細分化で精度向上を図れるか？～



規則的なメッシュ

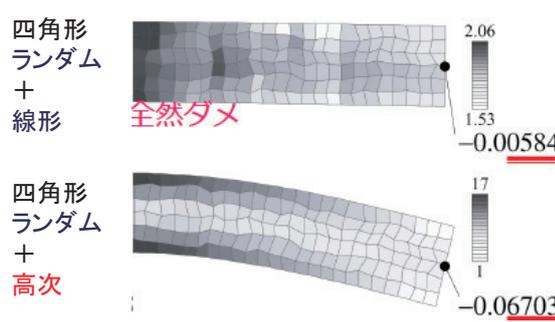
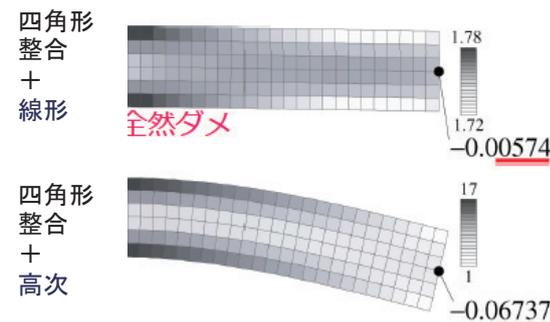
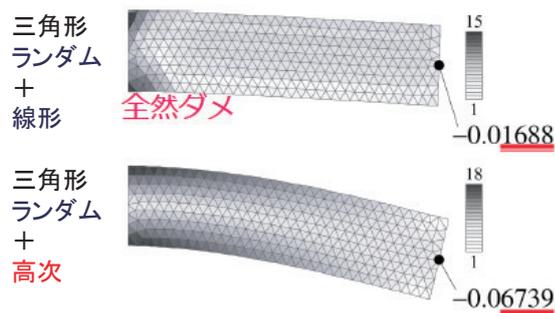
ランダムなメッシュ



21

メッシュや要素で答えが変わる！

つづき

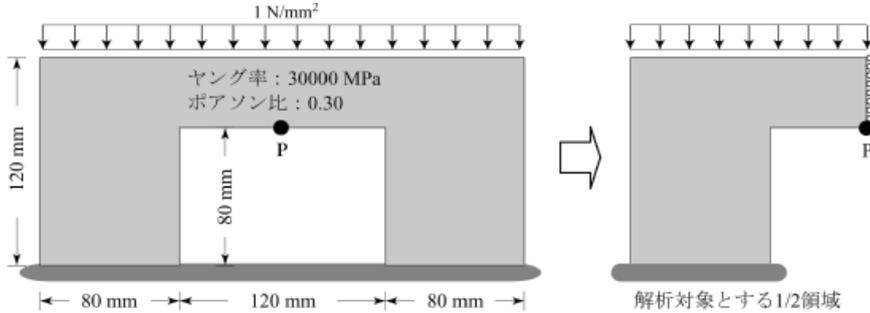


22

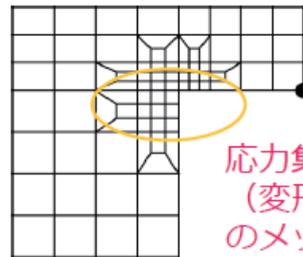
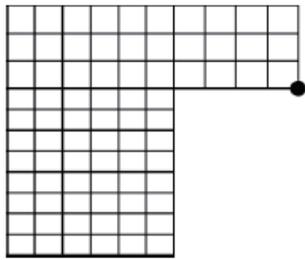
メッシュや要素で答えが変わる！

2.2 有限要素解析におけるメッシュの細分化の応用

2.2.1 部分的なメッシュ細分化による精度向上



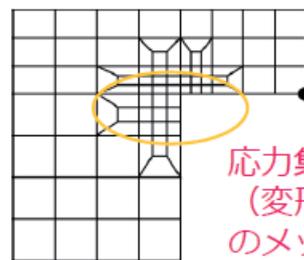
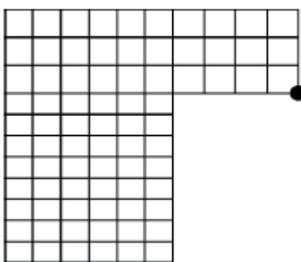
節点数・要素数は両者ともに同じ



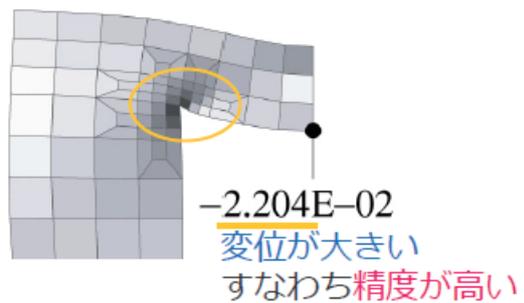
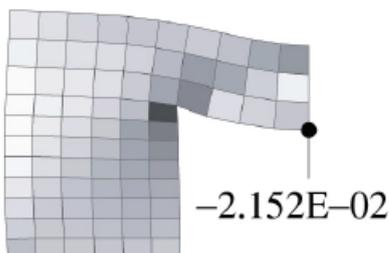
応力集中部
(変形が大きい)
のメッシュを細分化

メッシュや要素で答えが変わる！

つづき



応力集中部
(変形が大きい)
のメッシュを細分化



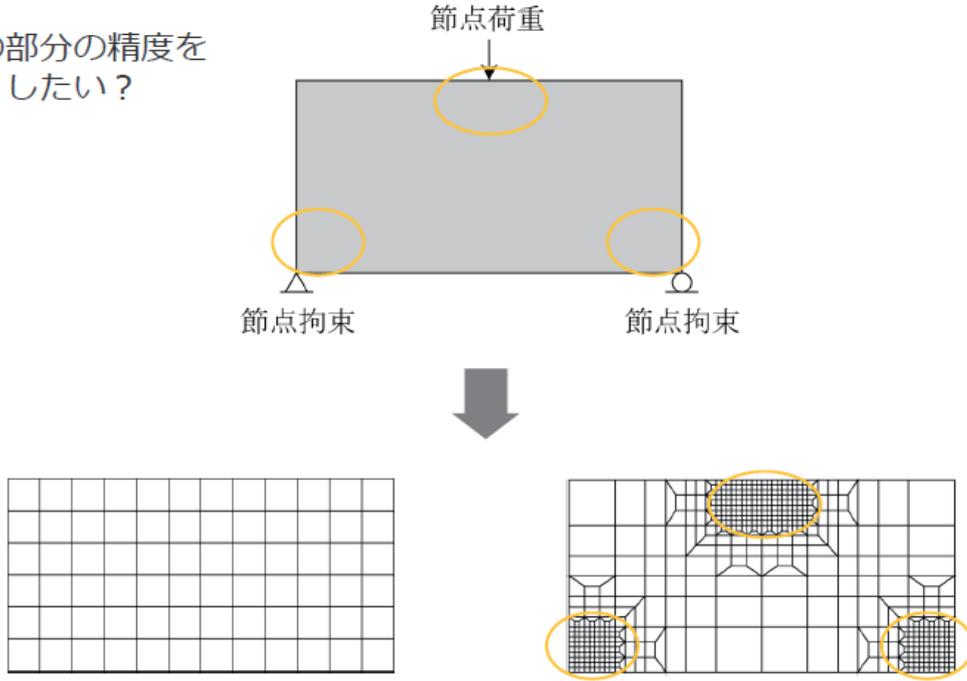
変位が大きい
すなわち精度が高い

メッシュや要素で答えが変わる！

2.2 有限要素解析におけるメッシュの細分化の応用

2.2.2 メッシュ細分化の落とし穴

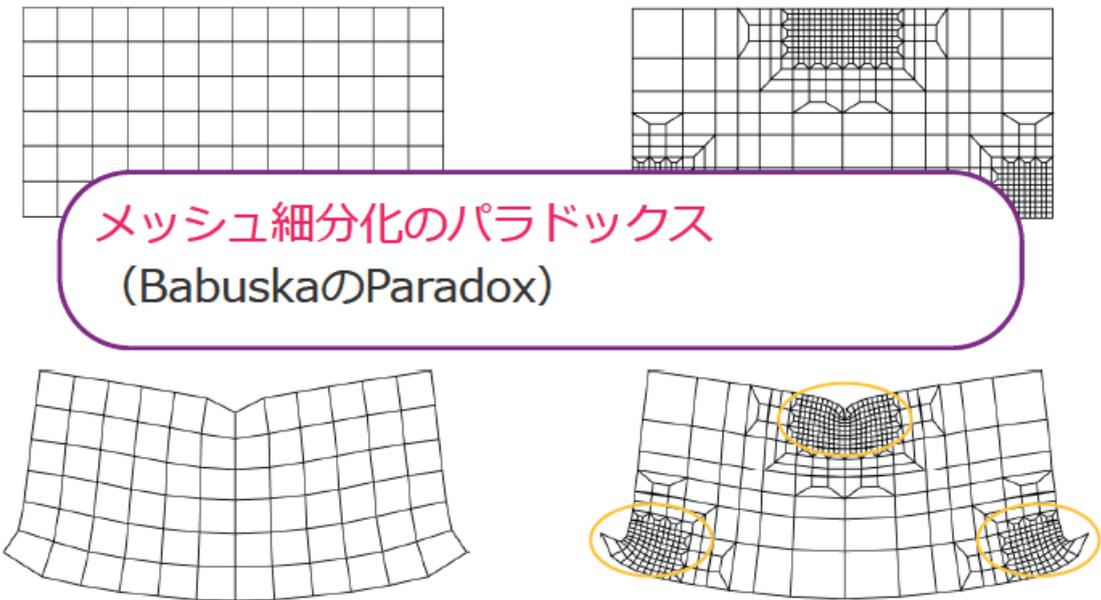
どの部分の精度を高くしたい？



25

メッシュや要素で答えが変わる！

つづき



メッシュ細分化によって、誤った結果を示している固体力学は空間的な広がりを持った領域・境界を対象としているすなわち、1点での载荷や支持は許容されない
 右の結果は、メッシュ細分化により、誤りを誇張したことになっている。

メッシュや要素で答えが変わる！

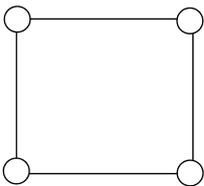
2.3 まとめ

- FEMの近似解が変化する要因
 - ▶ メッシュの切り方
 - 要素形状（正方形からの変動＝ゆがみ）
 - ▶ メッシュの細かさ
 - 要素分割数（要素数，節点数）
 - ▶ 要素の位相
 - 三角形，四角形など
 - ▶ 要素の近似性能：要素内での関数の表現方法
 - 線形・高次
 - 非適合
 - （混合補間）

27

変形問題の定式化

(双)1次要素



要素の近似関数

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$$

要素の近似関数 ⇒ 節点の値を用いた補間

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_e \mathbf{d}_e$$

変形問題の定式化

ひずみ-変位関係から[B]マトリックスを得ることができる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \\ \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \{\varepsilon\} = [B]\{u\} \\ \{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}] \\ \{u\}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4] \end{cases}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

29

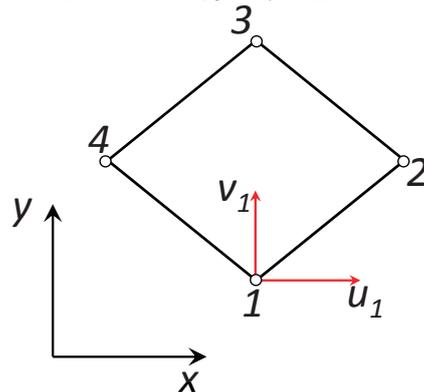
変形問題の定式化(エネルギー原理)

アイソパラメトリック四角形要素の有限要素式は、最小ポテンシャルエネルギーの原理により次式を得る(仮想仕事の原理やカステリアーノの第一定理でもよい)。

$$[K_e]\{u\} = \{f\}$$

$$[K_e] = \int_V [B]^T [D][B] dV = \int_S [B]^T [D][B] t dx dy$$

$\{u\}$: 節点変位ベクトル
 $\{f\}$: 節点力ベクトル
 t : 厚さ



応力-ひずみマトリックス([D])

平面応力

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

平面ひずみ

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/[2(1-\nu)] \end{bmatrix}$$

四角形要素

E :: 弾性係数

ν :: ポアソン比

まとめ

- 有限要素法は、近似解法である。
- 要素の種類、メッシュ分割などで答えが変わる。
- したがって、ブラックボックスとしての有限要素解析は危険である。したがって、設計では、上記のことを理解し、有限要素法を正確に使える技術者が、求められている。
- 例えば、
機会学会：
計算力学技術者（CAE技術者）の資格認定
～固体力学分野／熱流体力学分野／振動分野～
<http://www.jsme.or.jp/cee/cmrintei.htm>

ご清聴ありがとうございました

土木分野

MIDAS CONSTRUCTION TECHNICAL DOCUMENT COLLECTION



株式会社マイダスイテジヤパン

〒101-0021 東京都千代田区外神田5-3-1 秋葉原OSビル7F

TEL 03-5817-0787 | FAX 03-5817-0784 | e-mail g.support@midasit.com | URL <http://jp.midasuser.com/geotech>

Copyright © Since 1989 MIDAS Information Technology Co., Ltd. All rights reserved.