

Analysis for Civil Structures

日本語版

MIDAS

WE WILL CHANGE THE WORLD

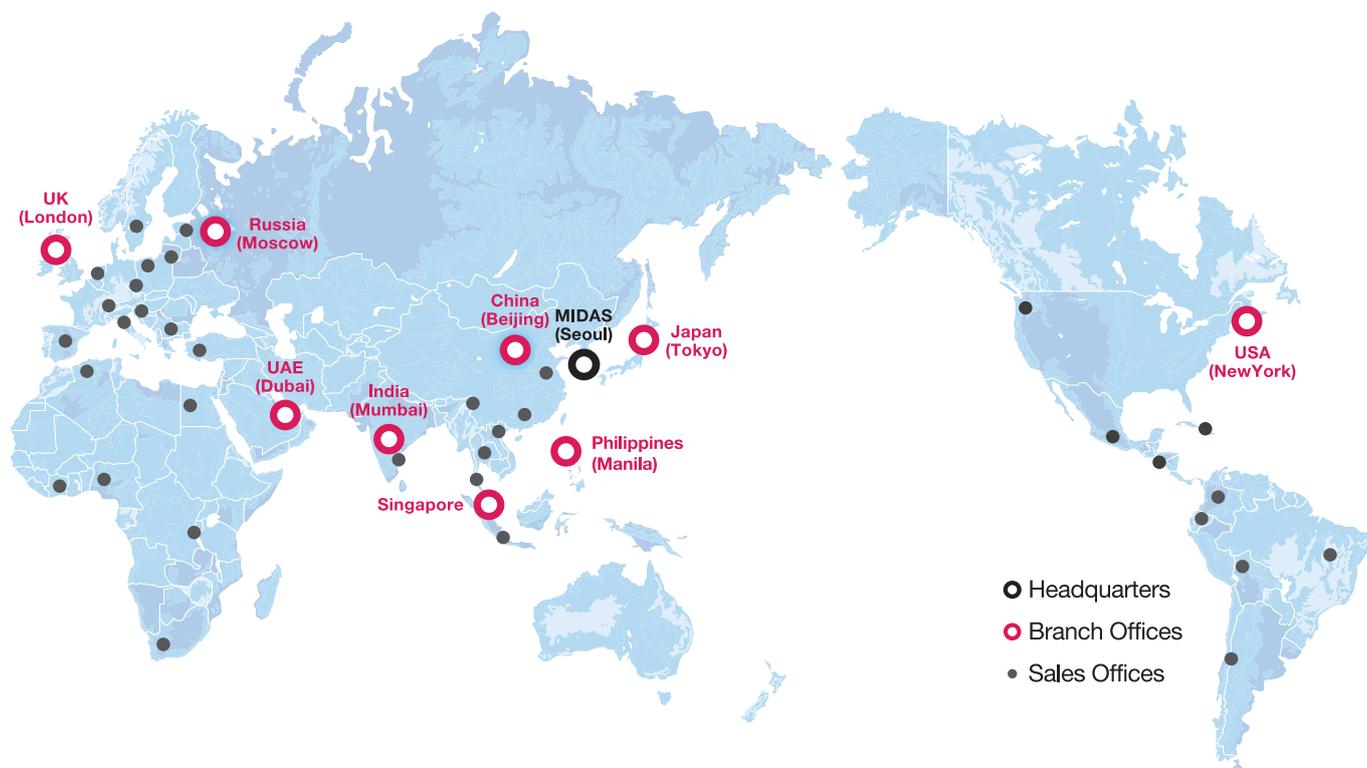
The World's Best
Total Engineering Solution
Provider & Service Partner

建設業界 **No.1**

現地法人 **9**

海外代理店 **35**

輸出国 **110**



MIDAS IT

MIDAS ITは、工学技術用ソフトウェア開発および普及、そして構造分野のエンジニアリングサービスとウェブビジネス統合ソリューションを提供する会社です。

1989年から活動を開始し、2000年9月にマイダスイティを設立、現在は約600名の世界的な専門技術者を保有し日本、アメリカ、中国、インド、ロシア、イギリス、ドバイ、シンガポール、フィリピンの現地法人や35ヶ国の代理店などの全世界ネットワークを通し、110ヶ国に工学技術用ソフトウェアを販売する企業として成長しました。

MIDAS IT JAPAN

マイダスイティジャパンは、マイダスイティの日本法人です。

2008年に建築工学技術用ソフトウェアの普及からスタートし、現在は土木/地盤/機械の分野まで事業を拡張しています。日本国内では1,300社6,500ライセンスが使用されており、建築分野から土木/地盤分野(橋梁、トンネル、地下構造物、土構造物等)、機械分野(自動車、精密機器、医療等)にかけて、多分野で活用されるまでに成長しました。

PRODUCT HISTORY



理論マニュアル

Civil

Modeling, Integrated Design & Analysis Software

midas Civil **Analysis**

Developed by MIDAS Information Technology Co.,Ltd.
Copyright © MIDAS Information Technology Co.,Ltd. 1989-2009, All rights reserved.

本書は著作権によって保護されており、すべての権利は、株式会社MIDAS IT(以下「MIDAS IT」)が保有しています。

本書は、MIDAS ITが事前に文書で承諾しない限り、電子媒体または機械可読形態を含むいかなる形態も、複写、複製、開示、翻訳、要約することはできず、かつ電子的または他のいかなる手段によっても伝送または公開することはできません。

本書に記載された情報は、単なる情報として提供されるものであり、通知なしに変更されることがあり、MIDAS ITによる責務として解釈されるべきではありません。MIDAS ITは本書に現れる可能性のある誤りや間違いに対して責任も責務も持ちません。

商標について

MIDAS Family Programは株式会社MIDASITで開発した構造解析及び設計用ソフトウェアパッケージです。MIDAS Family Programと関連マニュアルはコンピュータプログラム保護法と著作権法によって保護されています。

Windows、Windows NT、Windows 2000およびWindows XPは、アメリカ合衆国及び他の国におけるMicrosoft Corporationの登録商標です。

その他の商標または、製品名は、それぞれの所有権保持者の商標、登録商標です。

midas Civilの関連マニュアルについて

midas Civilの関連マニュアルは、オンラインヘルプの他に、Analysis & Design Manual (理論マニュアル)、Verification Manual(検証マニュアル)、リリースノート、チュートリアル(操作ガイド)があります。オンラインヘルプは、html形式で、他のマニュアルはPDF形式です。

1. Analysis Manual (理論マニュアル)

Analysis Manual は、解析プログラムの理論について示します。

2. Verification Manual(検証マニュアル)

Verification Manual は、midas Civil の解析結果を理論値、または他の構造解析プログラムの結果と比較したもので、解析機能別に例題を用いて結果比較を行っています。

3. リリースノート

リリースノートは、midas Civil の最新版に関してその新機能の概要を示します。

4. チュートリアル(操作ガイド)

チュートリアルは、midas Civil を使用してモデル作成から解析条件の設定、結果処理に対する一連の操作を示します。このマニュアルは、新規ユーザーが midas Civil の機能を簡単に体験し、プログラムに慣れて頂くものです。

I 数値解析モデル

1. 概要

1.1 数値解析モデル	I-1-1
1.2 座標系と節点	I-1-3
1.3 要素タイプと主要考慮事項	I-1-5

2. 解析要素

2.1 トラス要素

2.1.1 概要	I-2-1
2.1.2 有限要素の定式化	I-2-2
2.1.3 荷重と質量	I-2-3
2.1.4 出力データ	I-2-4

2.2 引張専用要素

2.2.1 概要	I-2-5
2.2.2 要素自由度及び要素座標系	I-2-6
2.2.3 要素関連機能	I-2-6
2.2.4 断面力の出力内容	I-2-6

2.3 圧縮専用要素

2.3.1 概要	I-2-10
2.3.2 要素自由度及び要素座標系	I-2-10
2.3.3 要素関連機能	I-2-11
2.3.4 断面力の出力内容	I-2-11

2.4 梁要素

2.4.1 概要	I-2-12
2.4.2 有限要素の定式化	I-2-16
2.4.3 荷重と質量	I-2-19
2.4.4 出力データ	I-2-21

2.5 平面応力要素

2.5.1 概要	I-2-22
2.5.2 有限要素の定式化	I-2-24
2.5.3 荷重と質量	I-2-27
2.5.4 出力データ	I-2-28
2.5.5 積分点	I-2-29
2.5.6 応力計算法	I-2-31

2.6 板要素

2.6.1 概要	I-2-32
2.6.2 有限要素の定式化	I-2-34
2.6.3 荷重と質量	I-2-42
2.6.4 板の厚さ/材料	I-2-44
2.6.5 出力データ	I-2-45

2.6.6 積分点	I-2-47
2.6.7 応力計算法	I-2-47
2.7 平面ひずみ要素	
2.7.1 概要	I-2-48
2.7.2 有限要素の定式化	I-2-50
2.7.3 荷重と質量	I-2-51
2.7.4 出力データ	I-2-52
2.7.5 積分点	I-2-53
2.7.6 応力計算法	I-2-55
2.8 軸対称要素	
2.8.1 概要	I-2-56
2.8.2 有限要素の定式化	I-2-59
2.8.3 荷重	I-2-61
2.8.4 出力データ	I-2-62
2.9 ソリッド要素	
2.9.1 概要	I-2-63
2.9.2 有限要素の定式化	I-2-65
2.9.3 荷重と質量	I-2-68
2.9.4 出力データ	I-2-69
2.9.5 積分点	I-2-71
2.9.6 応力計算法	I-2-75
3. 要素入力時の主要な考慮事項	
3.1 概要	I-3-1
3.2 トラス要素、引張専用要素、圧縮専用要素	I-3-4
3.3 梁要素	I-3-6
3.4 平面応力要素	I-3-9
3.5 平面ひずみ要素	I-3-11
3.6 軸対称要素	I-3-12
3.7 板要素	I-3-13
3.8 ソリッド要素	I-3-14
3.9 直交異方性材料	I-3-15
4. 要素の剛性データ	
4.1 概要	I-4-1
4.2 断面積	I-4-3
4.3 有効せん断面積	I-4-4
4.4 ねじれ剛性	I-4-6
4.5 断面 2 次モーメント	I-4-13
4.6 断面相乗モーメント	I-4-15
4.7 断面 1 次モーメント	I-4-19
4.8 せん断係数	I-4-20

4.9 合成断面の剛性の計算	I-4-21
5. 境界条件	
5.1 境界条件	I-5-1
5.2 自由度拘束条件	I-5-2
5.3 弾性バネ要素(1 節点バネ)	I-5-5
5.4 分布タイプバネ(Winkler Spring)	I-5-8
5.5 弾性連結要素(2 節点バネ)	I-5-11
5.6 汎用リンク要素(境界非線形要素)	I-5-12
5.7 要素の端部拘束解除条件	I-5-19
5.8 剛域長さ	I-5-21
5.9 代表節点と従属節点(剛体連結機能)	I-5-33
5.10 支点の強制変位	I-5-41

II 解析機能

1. 概要	II-1-1
2. 静的線形解析	II-2-1
3. 固有値解析	
3.1 固有ベクトル解析	II-3-1
3.2 Ritz ベクトル解析	II-3-6
4. 減衰	
4.1 概要	II-4-1
4.2 比例減衰	II-4-4
4.3 レーリー減衰	
4.3.1 概要	II-4-6
4.3.2 応答スペクトル法・モード法におけるレーリー減衰	II-4-8
4.3.3 直接積分法におけるレーリー減衰	II-4-9
4.4 歪エネルギーに基づいたモード減衰	
4.4.1 概要	II-4-10
4.4.2 減衰の設定と計算方法	II-4-13
4.5 モード減衰	II-4-14
4.6 要素別のレーリー減衰	II-4-15
4.7 減衰マトリックスの構成	II-4-16
4.8 汎用リンク要素と線形減衰の考慮	II-4-17
5. 応答スペクトル解析	II-5-1
6. 時刻歴応答解析	
6.1 概要	II-6-1
6.2 モード重合法	II-6-2
6.3 直接積分法	II-6-4
6.4 多入力地震荷重に対する解析	II-6-8

7. 座屈解析	
7.1 概要	II-7-1
7.2 幾何剛性	II-7-3
7.2.1 トラス要素	II-7-4
7.2.2 梁要素	II-7-5
7.2.3 平面応力要素	II-7-7
7.2.4 板要素	II-7-8
7.2.5 ソリッド要素	II-7-9
7.3 限界荷重係数の抽出	II-7-10
7.4 線形座屈解析のパラメータ	II-7-11
8. 静的非線形解析	
8.1 概要	II-8-1
8.2 静的非線形解析	
8.2.1 解析手法	II-8-3
8.2.2 非線形要素の剛性	II-8-4
8.3 P-デルタ解析	
8.3.1 概要	II-8-5
8.3.2 解析手法	II-8-6
8.4 幾何学的非線形解析	
8.4.1 概要	II-8-10
8.4.2 トラス要素	II-8-14
8.4.3 梁要素	II-8-16
8.4.4 平面応力要素	II-8-21
8.4.5 板要素	II-8-23
8.4.6 平面ひずみ要素	II-8-27
8.4.7 軸対称要素	II-8-28
8.4.8 ソリッド要素	II-8-31
8.5 材料非線形解析	
8.5.1 一般事項	II-8-34
8.5.2 降伏条件	II-8-35
8.5.3 流れ法則	II-8-36
8.5.4 硬化則	II-8-37
8.5.5 有効塑性ひずみの定義方法による分類	II-8-39
8.5.6 降伏面の変化による分類	II-8-40
8.5.7 構成マトリックス	II-8-42
8.5.8 応力の積分	II-8-43
8.5.9 塑性材料モデル	II-8-48
9. 動的非線形解析	
9.1 概要	II-9-1
9.2 境界非線形の時刻歴解析	

9.2.1 概要	II-9-2
9.2.2 解析モデル	II-9-3
9.2.3 モード重ね合わせ法	II-9-4
9.2.4 直接積分法	II-9-8
9.2.5 有効剛性	II-9-9
9.2.6 境界非線形要素(カタイプ)の動的特性	II-9-10
9.2.7 Runge-Kutta 法	II-9-25
9.3 動的フレーム非線形解析	
9.3.1 概要	II-9-28
9.3.2 運動方程式	II-9-29
9.3.3 静的非線形解析	II-9-31
9.3.4 初期断面力の考慮	II-9-32
9.3.5 初期剛性	II-9-34
9.3.6 非線形要素	II-9-35
9.3.7 履歴モデル	II-9-43
9.3.8 多軸ヒンジの履歴モデル	II-9-105
9.4 ファイバモデル	
9.4.1 ファイバモデルの定義と定式化	II-9-112
9.4.2 鋼材モデル	II-9-116
9.4.3 コンクリートモデル	II-9-119
10. 施工段階解析	
10.1 概要	II-10-1
10.2 時間依存性材料	
10.2.1 クリープ及び乾燥収縮	II-10-3
10.2.2 クリープの計算方法	II-10-7
10.2.3 乾燥収縮の概念	II-10-10
10.2.4 時間による弾性係数の変化	II-10-11
10.2.5 強度発現関数	II-10-12
10.3 時間依存性材料データの入力手順	II-10-13
10.4 施工段階の定義及び構成	
10.4.1 概要	II-10-15
10.4.2 要素の生成と除去	II-10-18
10.4.3 荷重の生成と除去	II-10-19
10.4.4 境界条件の生成と除去	II-10-21
10.4.5 注意事項	II-10-22
10.5 施工段階解析手順	II-10-24
10.6 非線形施工段階解析	
10.6.1 施工段階を独立的に解析する方法	II-10-26
10.6.2 施工段階を以前段階に累積して解析する方法	II-10-27
10.7 吊橋の平衡状態解析	
10.7.1 ケーブルシステムだけの吊橋の平衡状態決定(吊橋ウィザード)	II-10-29

10.7.2	垂直面内での解析	II-10-30
10.7.3	水平面内での解析	II-10-32
10.7.4	非線形解析を使用したケーブルシステムの平衡状態計算	II-10-32
10.7.5	吊橋全体構造物の平衡状態の決定	II-10-34
11. 水和熱解析		
11.1	概要	II-11-1
11.2	熱伝達解析	
11.2.1	伝導	II-11-2
11.2.2	対流	II-11-3
11.2.3	発熱	II-11-4
11.2.4	パイプクーリング	II-11-5
11.2.5	初期温度	II-11-5
11.2.6	外気温度	II-11-5
11.2.7	固定温度	II-11-6
11.3	熱応力解析	
11.3.1	温度と時間による等価材齢、積算温度	II-11-7
11.3.2	等価材齢と積算温度を用いたコンクリートの圧縮強度	II-11-8
11.3.3	温度の変化量による変形	II-11-9
11.3.4	乾燥収縮による変形	II-11-9
11.3.5	クリープによる変形	II-11-9
11.4	水和熱解析手順	II-11-10
12. プレストレストコンクリート解析		
12.1	概要	II-12-1
12.2	プレストレスの損失	II-12-2
12.2.1	即時損失	II-12-3
12.2.2	時間的損失	II-12-6
12.3	プレストレス荷重	II-12-9
13. 平衡方程式の解法		
13.1	概要	II-13-1
13.2	直接解法	II-13-2
13.2.1	Skyline 解法	II-13-3
13.2.2	Multi-frontal 解法	II-13-5
14. 反復計算の手法		
14.1	概要	II-14-1
14.2	ニュートンラフソン法	II-14-3
14.3	弧長法	II-14-4
14.4	変位制御法	II-14-7
14.5	収束判定誤差	II-14-9

15. その他の解析	
15.1 構造物の支点沈下を自動考慮した解析	II-15-1
15.2 最適化技法を用いた未知荷重の解析	II-15-2
16. 影響線解析	
16.1 標準的な作業の流れ	II-16-1
16.2 格子モデルの作成	II-16-3
16.3 荷重の設定	II-16-4
16.4 その他の設定	II-16-13
17. 波浪荷重の生成	
17.1 概要	II-17-1
17.1.1 波のパラメータの用語整理	II-17-1
17.1.2 海洋構造物の部材に作用する波力	II-17-2
17.1.3 海洋波浪の工学的性質	II-17-3
17.2 波浪理論	II-17-5
17.2.1 Airy wave theory: 線形波動理論	II-17-5
17.2.2 Stokes 5th wave theory: 非線形波動理論(5次項まで stokes 級数展開)	II-17-7
17.2.3 Stream Function: 流れ関数を用いた非線形波動理論	II-17-9
17.2.4 Cnoidal/Solitary wave: 浅海域、周期波(ヤコビアン楕円積分項で表現)	II-17-9
17.2.5 孤立波(Solitary wave)	II-17-10
17.3 波浪理論の適用限界	II-17-11
17.4 計算手順	II-17-12

I. 数值解析モデル

Civil

Modeling, Integrated Design & Analysis Software

1. 概要

1.1 数値解析モデル

構造物の構造解析モデルは、節点、要素および境界条件のデータで構成される。節点は、構造部材の位置を指定するのに使用し、要素は、構造部材の数値解析を可能とするデータとして入力するのに使用する。境界条件は、解析対象の構造モデルと隣接構造体との連結状態を考慮するのに使用する。

構造解析とは、構造物の挙動を分析するために、数値解析モデルを用いて、予想される仮想的な状況に対して理論的なシミュレーションを行うことを意味する。

したがって、より正確な解析作業を行うためには、構造物の構造的特性と外乱条件を正確に解析モデルに具現化する必要がある。ここで、外乱条件としての荷重条件は、設計規準または確率論的な近似解法により決定された結果に従う必要がある。構造物の構造的特性に対して、数値解析モデルを構成している要素タイプ及びモデリング技法によって、解析結果が大きく変わることがある。

したがって、実際の構造物の挙動に影響を及ぼす剛性に対しては十分に検討し、その剛性を実際の構造物を近似できるように、適切な要素を選択する必要がある。

しかし、実際の構造物は一般的に複雑な形状と多様な物性をもつ材料で構成されるため、構造物がもつあらゆる剛性と質量を正確に数値解析モデルに反映することは、たいへん困難な作業であり効率的でない。

したがって、モデリングを行うときは、解析する目的を明確にし、場合によっては数値解析モデルを単純化したりして、修正する必要がある。

例えば、要素を選択するとき、建築構造物のせん断壁に対して、必ずしも板型要素(平面応力要素、板要素)を使用する必要はなく、工学的判断により、梁要素で代用することも可能である。

実際に、横幅に対して高さが5倍以上になるせん断壁の場合は、板型要素を使用するよりも梁要素を用いて柱部材(Wide Column)でモデリングすると、より信頼性がある結果を得ることができる。

また、土木構造物で橋梁のメインガーダーをモデリングするときも、板型要素(平面応力要素または板要素)を使用するよりも、線要素(トラス要素、梁要素等)を用いる方が、解析時間の短縮化や設計への適用性の面で、より効果的である。

さらに建築構造物の水平荷重に対する解析時に、床板面で剛床仮定(Rigid Diaphragm Action)が成立する場合には、床板を有限要素化する必要なく、幾何学的な拘束条件を適切に与えることにより、モデルを単純化できる。

有限要素(Finite Element)とは、構造物を構成する各構造要素の構造的特性を数学的な方法で理想化したものであるため、構造特性のすべてを完全に表現することは困難である。

したがって、前述したように、使用する有限要素の特性を十分に把握し、各有限要素間の連結時に生じる挙動を正確に分析して、設計に適用する必要がある。

1.2 座標系と節点

プログラムでは、次のような座標系をサポートしている。

- 全体座標系 (Global Coordinate System)
- 要素座標系 (Element Coordinate System)
- 節点座標系 (Node Local Coordinate System)

全体座標系は、右手の法則に従う X, Y, Z 軸の直交座標系(Conventional Cartesian Coordinate System)を用いて、大文字 "X, Y, Z" で座標軸を表示する。

節点データ、節点に関連して入力される多くのデータ、節点変位および反力などが全体座標系を使用する。

全体座標系は、構造解析を実行しようとする構造物の幾何学的形状を入力するのに使用し、この時の基準点(Reference Point)は、プログラム内部で自動的に X=0, Y=0, Z=0 の位置に設定される。

プログラムでは、モデル画面の鉛直方向が、全体座標系の Z 軸方向になるように構成されているため、構造物の鉛直方向(重力加速度の作用方向の反対方向)を全体座標系の Z 軸方向と平行になるように入力すると便利である。

要素座標系は、右手の法則に従う x, y, z 軸の直交座標系を用いて、小文字の"x, y, z"で座標軸を表示する。

🔊 プログラムの数値解析モデルで '要素種類と主要考慮事項' を参照

要素耐力、応力などの要素に関連する多くのデータは、要素座標系に従う。

節点座標系(Node Local Coordinate System)は、節点に対して全体座標系とは異なる任意方向に、支持条件、節点バネまたは強制変位等の境界条件を入力したり、任意方向の反力を計算して出力する場合に使用する。節点座標系は、右手の法則による x, y, z 軸の直交座標系を用いて、小文字の"x, y, z"で座標軸を表示する。

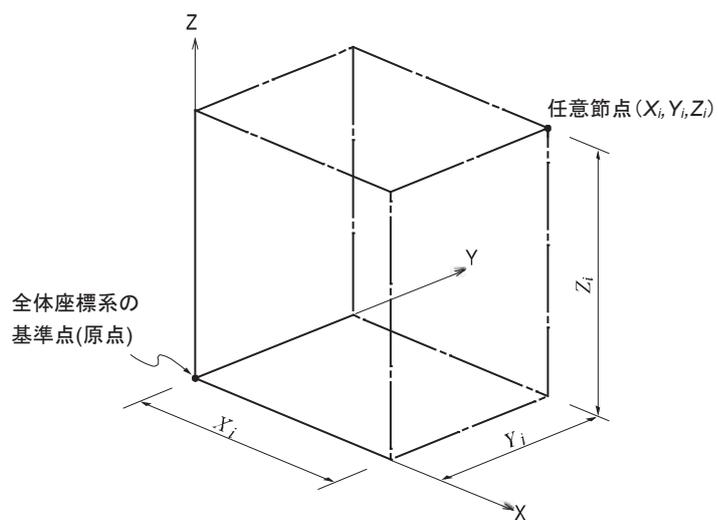


図 1.2.1 全体座標系と節点座標系

1.3 要素タイプと主要考慮事項

プログラムで使用可能な有限要素の種類を以下に示す。有限要素は基本的に要素の種類と構成節点で定義され、節点の連結順序によって要素座標系が決まる。要素には形、大きさ、材料などのデータが適用されて、要素の種類別に以下のようなデータが必要となる。

- トラス要素(Truss Element)
- 引張専用要素(Tension-only Element, フック要素及びケーブル要素を含む)
- 圧縮専用要素(Compression-only Element, ギャップ要素を含む)
- 梁要素/テーパ断面梁要素(Beam Element/Tapered Beam Element)
- 平面応力要素(Plane Stress Element)
- 板要素(Plate Element)
- 平面ひずみ要素(2D Plane Strain Element)
- 軸対称要素(2D Axisymmetric Element)
- ソリッド要素(Solid Element)

要素種類別に要素定義時に必要な入力データを表 1.3.1 に示す。

表 1.3.1 使用可能な要素と入力データ

要素	入力データ
トラス要素	断面積、材料
梁(テーパ断面)要素	断面特性、材料
平面応力要素	厚さ、材料
板要素	厚さ、材料
平面ひずみ要素	厚さ、材料
軸対称要素	材料
ソリッド要素	材料

要素別に使用可能な解析種類、荷重条件を表 1.3.2～1.3.4 に示す。

表 1.3.2 要素別に使用可能な解析種類(1)

要素	解析	線形静的	固有値	応答 スペクトル	時刻歴解析	
					線形	非線形 (プッシュオーバーを含む)
トラス		○	○	○	○	○
引張専用		○	トラスとして	トラスとして	トラスとして	トラスとして
フック		○	トラスとして	トラスとして	トラスとして	トラスとして
ケーブル		トラスとして	トラスとして	トラスとして	トラスとして	トラスとして
圧縮専用		○	トラスとして	トラスとして	トラスとして	トラスとして
ギャップ		○	トラスとして	トラスとして	トラスとして	トラスとして
一般梁		○	○	○	○	○
テーパ断面梁		○	○	○	○	平均断面
板-厚板		○	○	○	○	剛性のみ
板-薄板		○	○	○	○	剛性のみ
平面応力		○	○	○	○	剛性のみ
ソリッド		○	○	○	○	剛性のみ
平面ひずみ		○	○	○	○	剛性のみ
軸対称		○	×	×	×	×

表 1.3.3 要素別に使用可能な解析種類(2)

解析 要素	P-デルタ	座屈解析	支点沈下 解析	非線形		
				幾何	幾何 (幾何剛性用 初期軸力)	材料
トラス	○	○	○	○	○	○
引張専用	×	×	トラスとして	○	○	○
フック	×	×	×	○	○	○
ケーブル	×	×	トラスとして	弾性懸垂 線要素とし	弾性懸垂 線要素とし	トラスとして
圧縮専用	×	×	トラスとして	○	○	○
ギャップ	×	×	×	○	○	○
一般梁	○	○	○	○	○	線形として
テーパー断面梁	○	○	○	○	○	線形として
板-厚板	剛性のみ	○	○	○	剛性のみ	○
板-薄板	剛性のみ	○	○	厚板として	剛性のみ	厚板として
平面応力	剛性のみ	○注1)	○	○	剛性のみ	○
ソリッド	剛性のみ	○	○	○	剛性のみ	○
平面ひずみ	×	×	×	×	剛性のみ	○
軸対称	×	×	×	×	剛性のみ	○

注1) 幾何剛性に影響ありません。

表 1.3.4 要素別に使用可能な解析種類(3)

解析要素	施工段階解析		水和熱解析	合成断面解析 (施工段階なし)	解析ケース別 境界条件
	線形	非線形 (独立、累積)			
トラス	○	○	○	○	○
引張専用	○	独立(○)	×	トラスとして	○
フック	×	×	×	×	○
ケーブル	等価トラス	○	×	トラスとして	○
圧縮専用	○	独立(○)	×	トラスとして	○
ギャップ	×	×	×	×	○
一般梁	○	○	×	○	○
テーパー断面梁	○	○	×	○	○
板-厚板	○	独立(○)	×	○	○
板-薄板	○	独立(○)	×	○	○
平面応力	○	独立(○)	×	○	○
ソリッド	○	独立(○)	○	○	○
平面ひずみ	○	独立(○)	×	×	○
軸対称	○	独立(○)	×	×	○

一般的に、トラスまたは梁要素は要素分割数の影響が少ないが、平面またはソリッド要素は要素分割数と形状によって結果が大きく左右される。一般的に要素を細かく分割する必要がある部分は次の通りである。

- 幾何学的に不連続な部分、または開口部の周り
- 荷重が大きく変化する部分、または集中荷重が作用する部分
- 断面積/厚さ、または材料が不連続的な部分
- 応力/断面力などを詳細に検討する必要がある部分

有効な数値解析モデルを作成するためには、以下のように要素大きさだけでなく、要素の形状と連結状態を考慮する必要がある。

- 隣接する要素の大きさの差は 1/2 以下となるようにする。
- 応力を求める場合は 4 節点の平面要素と 8 節点のソリッド要素を使う。
- 平面要素の場合、正多角形となるようにメッシュ分割する。
4 角形の場合、角の角度が 45°以上から 135°以下で、3 角形の場合は 30°以上から 150°以下となるようにする。
- 4 節点の平面要素の場合、節点が同一平面上にあるようにする。
- 回転自由度に対する剛性を持たない要素(トラス/平面応力/ソリッド要素)同士に繋がった場合は特異性エラー(Singular Error)が発生する可能性がある。このような場合、プログラムでは該当節点の回転自由度を自動的に拘束することができる。

有限要素法では要素の特性を要素座標系での要素剛性 \mathbf{K}^e で表現して、剛性マトリックス \mathbf{K}^e は次のように表す。

$$\mathbf{K}^e = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (1.3.1)$$

ここで、マトリックス \mathbf{B} はひずみと節点変位の関係を表して、形状関数 \mathbf{N} の微分の形で求まる。 \mathbf{N} は節点別の形状関数 N_i で構成されて、無次元座標系(Natural Coordinate) $\xi-\eta-\zeta$ で定義する。一方、マトリックス \mathbf{D} は応力とひずみの関係を表して、剛性マトリックスとも呼ばれる。

2. 解析要素

2.1 トラス要素

2.1.1 概要

トラス要素は、2つの節点で定義される“3次元の一軸引張-圧縮線材”である。トラス要素は一般的に立体トラス(Space Truss)またはブレース(Diagonal Brace)などをモデリングする時に使用されて、静的(線形/非線形)解析および動的解析で使用することができる。トラス要素は軸方向(Axial)の力のみを伝達して、一定の初期間隔を持つ引張専用、または圧縮専用の特性を与えることができる。変形を定義する応力、ひずみは次の通りである。

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}\} \quad (2.1.1)$$

図 2.1.1 のようにトラス要素は軸方向に対する自由度のみを持つので、要素座標系の x 軸方向のみが意味を持つ。要素座標系の x 軸方向は節点 1 から節点 2 の方向となる。

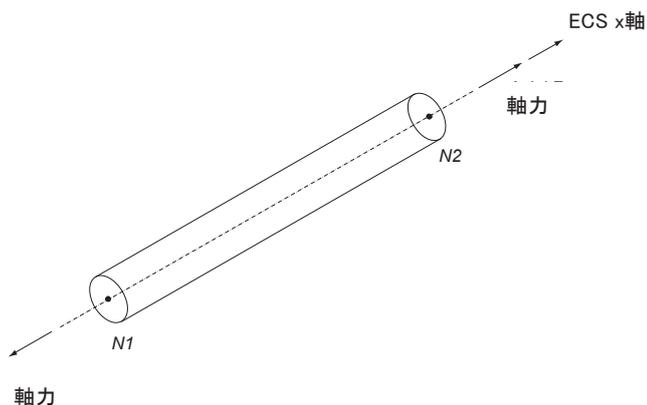


図 2.1.1 トラス要素の要素座標系と断面力

2.1.2 有限要素の定式化

トラス要素の断面積は、要素全体で一定と仮定する。トラス要素は要素座標系の x 軸方向の並進変位(Translation) u のみを持つ。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i\} \quad (2.1.2)$$

任意の座標 x と並進変位 u は、形状関数を用いて以下のように表すことができる。

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i, \quad u = \sum_{i=1}^2 N_i u_i \quad (2.1.3)$$

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (2.1.4)$$

節点変位とひずみの関係は \mathbf{B}_i によって式(2.1.5)のようになる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.1.5)$$

マトリックス \mathbf{B}_i は、形状関数の微分で、次のように表す。

$$\mathbf{B}_i = \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} \quad (2.1.6)$$

マトリックス \mathbf{B}_i を用いて、軸方向の変形に対する要素剛性マトリックスを次のように表す。

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{L_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dL, \quad \mathbf{D} = A \{E\} \quad (2.1.7)$$

ここで、 A は断面積、 L_e は要素の長さである。

最終的に、トラス要素の剛性マトリックスは、式(2.1.7)より次のようになる。

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

2.1.3 荷重と質量

(1) 荷重

トラス要素に適用できる荷重には物体力(Body Force)、プレストレス(Prestress)、温度荷重(Thermal)などがある。物体力は、要素の自重や慣性力を表現する荷重で、プレストレスは、トラス要素に断面力として引張を与える場合に使用する。温度荷重は、節点温度、要素温度荷重による熱変形を考慮する場合に使う。プレストレスと温度荷重による要素座標系の荷重ベクトルは次の通りである。

物体力

$$\mathbf{F}_i = A \int_{L_e} N_i \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} dL \quad (2.1.9)$$

ここで、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は方向別の重量密度である。

プレストレス

$$\mathbf{F}_i = - \int_{L_e} \mathbf{B}_i^T P dL \quad (2.1.10)$$

ここで、 P は軸方向のプレストレスである。

温度荷重

$$\mathbf{F}_i = \int_{L_e} \mathbf{B}_i^T EA \alpha \Delta T dL \quad (2.1.11)$$

ここで、 α は熱膨張係数、 ΔT は温度変化である。

(2) 質量

トラス要素の質量は x, y, z の並進変位に対してだけ構成されて、集中質量(Lumped Mass)だけが考慮でき、質量マトリックスは次のようになる。

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.12)$$

ここで、 ρ は質量密度である。

2.1.4. 出力データ

解析結果としては、要素座標系による節点 1 と 2 の位置での要素断面力(Element Force)と応力が出力される。出力される要素断面力は軸方向の力 $N_x (= A\sigma_{xx})$ であり、図 2.1.2 に示したように引張力が作用する場合に '+' 符号となる。一般的に要素両端での断面力は同じであるが、自重を入力された場合には異なる場合もある。

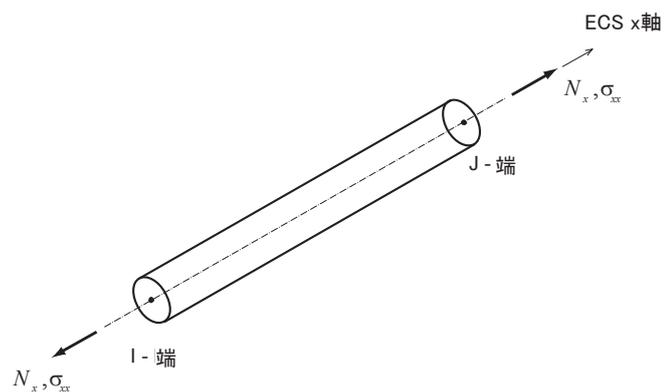


図 2.1.2 トラスの要素の出力データの符号規約

2.2 引張専用要素(Tension-only Element)

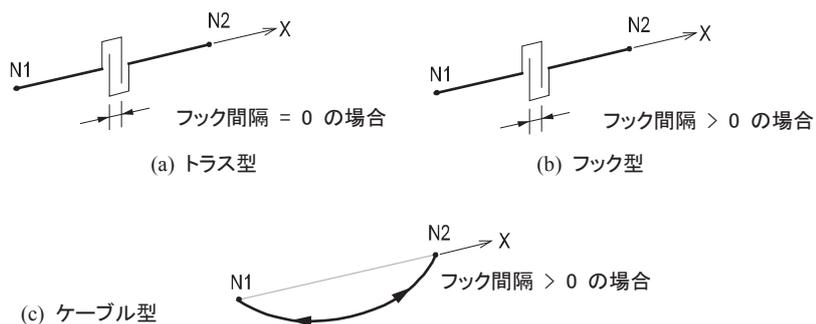
2.2.1 概要

この要素は、2 個の節点によって定義される" 3 次元の引張力専用の1軸要素"として、一般的に耐風ブレースやケーブルまたはフック金物などをモデリングするのに使用され、要素軸方向の引張力のみを伝達する。

🔊 ケーブル型の引張専用要素の場合には、初期張力(Pretension Force)をあらかじめ入力します。この値はケーブルの設置時に導入されるケーブルの張力を意味し、ゼロ(Zero)を入力した場合には、自重によって発生するケーブルの張力を計算して使用します。

引張専用要素として入力できる要素タイプには、次のものがある。

- トラス** 引張専用要素として引張力だけを伝達できるトラス要素を定義するのに使用
- フック** 一定の初期間隔(Hook Distance)を持ち、その間隔の変位が生じた後から要素の剛性を発現
- ケーブル** 部材の張力に応じて剛性が変化するケーブルの特性を考慮した要素を定義するのに使用



🔊 On-line Manual の"解析> 解析制御データ"を参照

図 2.2.1 引張専用要素の概念図

2.2.2 要素自由度及び要素座標系

"トラス要素"と同じ要素自由度を持ち、要素座標系も同じ体系に従う。

2.2.3 要素関連機能

🔊 繰り返し解析 (Iterative Analysis)とは、非線形構造系に対して行う解析を意味し、軸力によって変化する剛性や架構の形状を適切に考慮するために、解析結果に対する収束条件を満足するまで、繰り返し実行される解析のことを指します。

解析制御データ	引張または圧縮専用要素を用いた繰り返し解析 (Iterative Analysis) の時に使用する収束判定条件を入力
材料	材料特性の入力
断面	断面の入力
初期荷重	プレテンション荷重の入力

2.2.4 断面力の出力内容

"トラス要素"と同じ符号体系に従う。

ケーブル要素の剛性は、一般弾性剛性とサグ(Sag)による剛性で構成され、以下の式から計算する。

$$K_{comb} = \frac{1}{1/K_{sag} + 1/K_{elastic}} \quad (2.2.1)$$

$$K_{comb} = \frac{EA}{L \left[1 + \frac{w^2 L^2 EA}{12T^3} \right]} \quad (2.2.2)$$

$$K_{elastic} = \frac{EA}{L}, \quad K_{sag} = \frac{12T^3}{w^2 L^3} \quad (2.2.3)$$

ここで、 E は弾性係数、 A は断面積、 L は長さ、 w は単位長さ当たりの自重、 T は張力である。

■ カテナリ形状

幾何学的非線形解析に使用するケーブル要素は接線剛性を利用して、次の方法で剛性を計算する。

図 2.2.2 のように2つの点を有するケーブル要素に、 i 点での変位 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ と j 点での変位 $\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ が発生して、節点力が $F_1^0, F_2^0, F_3^0, F_4^0, F_5^0, F_6^0$ から $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ に変化した時の節点力と変位の釣り合い関係を示す。

$$F_4 = -F_1$$

$$F_5 = -F_2$$

$$F_6 = -F_3 - \omega_0 L_0 \quad (\text{但し、} \omega_0 = \omega \text{ と仮定})$$

$$l_x = l_x^0 - \Delta_1 + \Delta_4 = f(F_1, F_2, F_3)$$

$$l_y = l_y^0 - \Delta_2 + \Delta_5 = g(F_1, F_2, F_3)$$

$$l_z = l_z^0 - \Delta_3 + \Delta_6 = h(F_1, F_2, F_3)$$

ここで、 $F_1^0, F_2^0, F_3^0, F_4^0, F_5^0, F_6^0$: 変形前の i, j 端の節点力
 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$: 変形後の i, j 端の節点力、
 ω : 単位長さあたりの重量

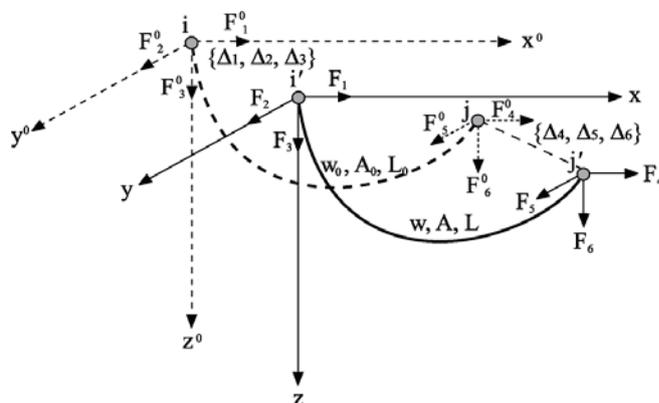


図 2.2.2 カテナリの接線剛性の概念図

ケーブル全体座標系の方向別長さに対する微分方程式は以下ようになる。また、変位と荷重の関係を整理すると柔軟度行列 $[F]$ を求めることができる。柔軟度行列を計算してケーブル接線剛性 $[K]$ を求める。ケーブルの剛性は釣り合うまで反復計算を行わなければ求まらない。

$$dl_x = \frac{\partial f}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial f}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial f}{\partial F_3} dF_3$$

$$dl_y = \frac{\partial g}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial g}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial g}{\partial F_3} dF_3$$

$$dl_z = \frac{\partial h}{\partial F_1} dF_1 + \frac{\partial h}{\partial F_2} dF_2 + \frac{\partial h}{\partial F_3} dF_3$$

$$\begin{Bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{Bmatrix}, \quad [F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial F_1} & \frac{\partial f}{\partial F_2} & \frac{\partial f}{\partial F_3} \\ \frac{\partial g}{\partial F_1} & \frac{\partial g}{\partial F_2} & \frac{\partial g}{\partial F_3} \\ \frac{\partial h}{\partial F_1} & \frac{\partial h}{\partial F_2} & \frac{\partial h}{\partial F_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{Bmatrix}, \quad (K = F^{-1})$$

柔軟度行列の各要素は次式になる。

$$f_{11} = \frac{\partial f}{\partial F_1} = -\frac{L_0}{EA_0} - \frac{1}{w} \left[\ln\{F_3 + wL_0 + B\} - \ln\{F_3 + A\} \right] - \frac{F_1^2}{w} \left[\frac{1}{B^2 + (F_3 + wL_0)B} - \frac{1}{A^2 + F_3A} \right]$$

$$f_{12} = \frac{\partial f}{\partial F_2} = -\frac{F_1 F_2}{w} \left[\frac{1}{B^2 + (F_3 + wL_0)B} - \frac{1}{A^2 + F_3A} \right]$$

$$f_{13} = \frac{\partial f}{\partial F_3} = -\frac{F_1}{w} \left[\frac{F_3 + wL_0 + B}{B^2 + (F_3 + wL_0)B} - \frac{F_3 + A}{A^2 + F_3A} \right]$$

$$f_{21} = \frac{\partial g}{\partial F_1} = f_{12}$$

$$f_{22} = \frac{\partial g}{\partial F_2} = -\frac{L_0}{EA_0} - \frac{1}{w} \left[\ln\{F_3 + wL_0 + B\} - \ln\{F_3 + A\} \right] - \frac{F_2^2}{w} \left[\frac{1}{B^2 + (F_3 + wL_0)B} - \frac{1}{A^2 + F_3A} \right]$$

$$f_{23} = \frac{\partial g}{\partial F_3} = \frac{F_2}{F_1} f_{13}$$

$$f_{31} = \frac{\partial h}{\partial F_1} = -\frac{F_1}{w} \left[\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right]$$

$$f_{32} = \frac{\partial h}{\partial F_2} = \frac{F_2}{F_1} f_{31}$$

$$f_{33} = \frac{\partial h}{\partial F_3} = -\frac{L_0}{EA_0} - \frac{1}{w} \left[\frac{F_3 + wL_0}{B} - \frac{F_3}{A} \right]$$

$$A = (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{1/2}, \quad B = (F_1^2 + F_2^2 + (F_3 + wL_0)^2)^{1/2}$$

$$\{dF\} = K_T \{d\Delta\}$$

$$K_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_3} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_4} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_5} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta_6} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_3} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_4} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_5} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta_6} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \Delta_1} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta_2} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta_3} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta_4} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta_5} & \frac{\partial F_3}{\partial \Delta_6} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial \Delta_1} & -\frac{\partial F_1}{\partial \Delta_2} & -\frac{\partial F_1}{\partial \Delta_3} & -\frac{\partial F_1}{\partial \Delta_4} & -\frac{\partial F_1}{\partial \Delta_5} & -\frac{\partial F_1}{\partial \Delta_6} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial \Delta_1} & -\frac{\partial F_2}{\partial \Delta_2} & -\frac{\partial F_2}{\partial \Delta_3} & -\frac{\partial F_2}{\partial \Delta_4} & -\frac{\partial F_2}{\partial \Delta_5} & -\frac{\partial F_2}{\partial \Delta_6} \\ -\frac{\partial F_3}{\partial \Delta_1} & -\frac{\partial F_3}{\partial \Delta_2} & -\frac{\partial F_3}{\partial \Delta_3} & -\frac{\partial F_3}{\partial \Delta_4} & -\frac{\partial F_3}{\partial \Delta_5} & -\frac{\partial F_3}{\partial \Delta_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ii} & F_{ij} \\ -F_{ii} & -F_{ij} \end{bmatrix}$$

2.3 圧縮専用要素(Compression-only Element)

2.3.1 概要

この要素は、2 個の節点によって定義される"3次元の圧縮力専用の1軸要素"として、接触問題や地盤などをモデリングするのに使用され、要素軸方向の圧縮力のみを伝達できる。圧縮専用要素として入力できる要素タイプには次のものがある。

- トラス** 圧縮力専用要素として圧縮力だけを伝達できるトラス要素を定義するのに使用
- ギャップ** 一定の初期間隔(Gap Distance)を持ち、その間隔の変位が生じた後から要素の剛性を発現

2.3.2 要素自由度及び要素座標系

"トラス要素"と同じ要素自由度を持ち、要素座標系も同じ体系に従う。

🔊 On-line Manual の"解析>解析制御データ"を参照

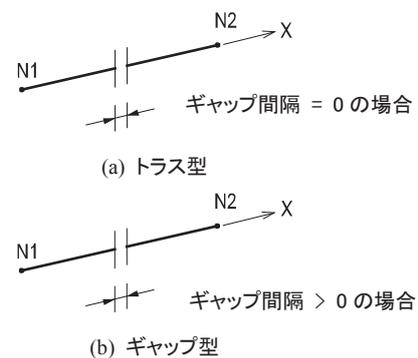


図 2.3.1 圧縮専用要素の概念図

2.3.3 要素関連機能

解析制御データ	引張または圧縮専用要素を用いた繰り返し解析 (Iterative Analysis) の時に使用する収束判定条件を入力
材料	材料特性の入力
断面	断面の入力
初期荷重	プレテンション荷重の入力

2.3.4 断面力の出力内容

"トラス要素"と同じ符号体系に従う。

2.4 梁要素

2.4.1. 概要

梁要素は 2 つの節点で定義される線材で、断面の大きさに比べて部材長さが長い骨組部材をモデリングする時に利用する。梁要素は静的(線形/非線形)解析および動的解析で使用することができ、軸方向(Axial)の変形、曲げ(Bending)、ねじり(Torsion)、せん断(Shear)変形などを考慮できる。変形を定義する応力、ひずみと要素断面力(Element Force)は次の通りである。

軸方向の応力とひずみ

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}\}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}\} \quad (2.4.1)$$

曲げモーメントと曲率

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_y \\ M_z \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} \quad (2.4.2)$$

ねじりモーメントとねじり角

$$\mathbf{T} = \{M_x\}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha\} \quad (2.4.3)$$

せん断力とせん断ひずみ

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.4.4)$$

要素断面力と応力に対する符号規約は図 2.4.1 の通りで、矢印方向が‘+’符号となる。梁要素のせん断変形を無視する場合は、せん断面積を 0(Zero)に入力する。要素長さに対する断面の幅、またはせいとの比が約 1/5 より大きくなる場合はせん断変形による影響が大きくなるので、梁要素よりは板要素か、ソリッド要素を使ったほうが良い。

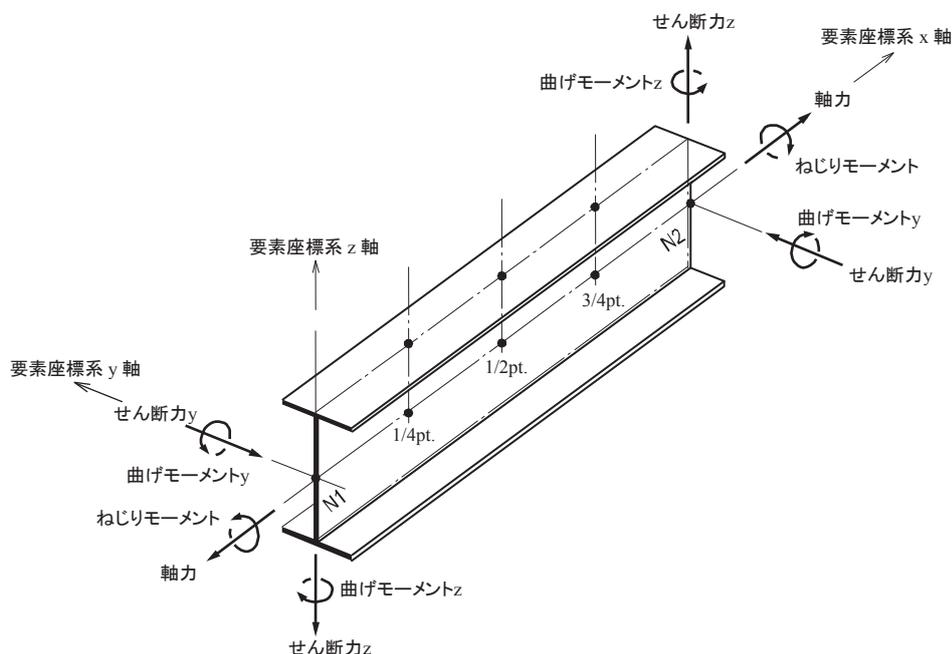


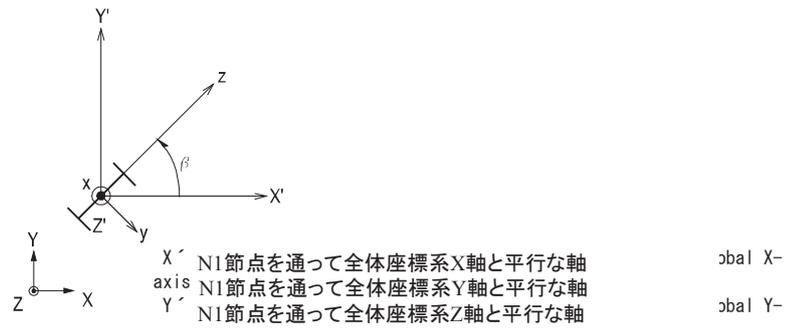
図 2.4.1 梁要素の要素座標系と断面力の符号規約

梁要素の要素座標系は要素断面力または応力の出力基準となり、特に梁要素のせん断剛性と曲げ剛性の方向を決める基準となる。要素座標系の x 軸方向は節点 1 から節点 2 の方向であり、 y, z 軸の方向は図 2.4.1 と同じで、図 2.4.2～4 の 3 つの方法を使って指定する。要素座標系 z 軸が決まると、 y 軸は右手法則によって自動的に決定される。

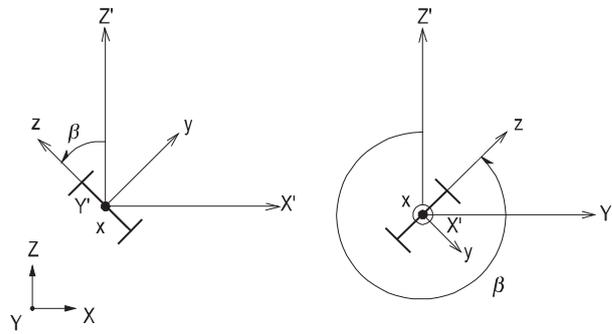
図 2.4.2 は要素座標系 z 軸と全体座標系との角度である“ β 角”の β を入力して、 z 軸を入力する方法である。要素座標系 x 軸が全体座標系 Z 軸に対して平行の場合、 β は全体座標系 X 軸と要素座標系 z が成す角度となる。要素座標系 x 軸が全体座標系 Z 軸に対して平行でない場合、 β は全体座標系 Z 軸と要素座標系 $x-z$ 平面が成す角度となる。

図 2.4.3 は、要素座標系 $x-z$ 平面上の 1 つ節点を利用して、 z 軸を指定する方法である。要素座標系 x 軸上の節点は z 軸を指定する節点として使用することができない。

図 2.4.4 は、要素座標系 z 軸を直接入力する方法である。入力する z 軸のベクトルは要素座標系 x 軸と平行ではない。



(a)垂直部材の場合(要素座標系 x 軸が全体座標系 Z 軸と平行の場合)



(b)水平または対角部材の場合(要素座標系 x 軸が全体座標系 Z 軸と平行でない場合)

図 2.4.2 β 角を利用した要素座標系の定義

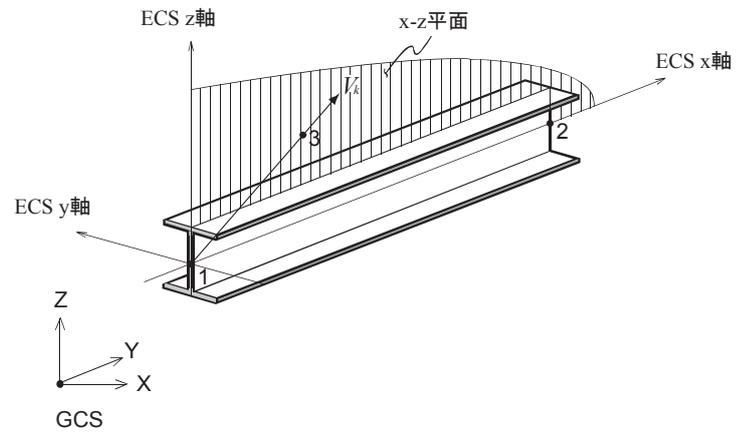


図 2.4.3 節点を使った要素座標系の定義

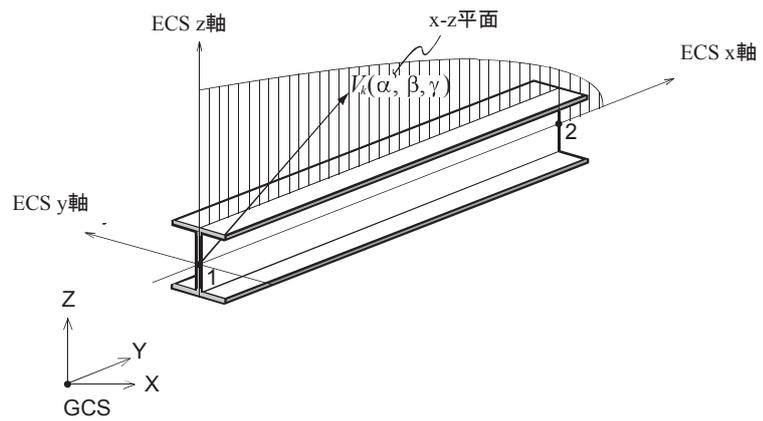


図 2.4.4 要素座標系 z 軸のベクトルを使った要素座標系の定義

2.4.2. 有限要素の定式化

梁要素の断面形状と大きさは要素全体で一定と仮定する。梁要素は、要素座標系で3つの並進変位(Translation)と3つの回轉變位(Rotation)を持つ。軸方向の変形に対する剛性はトラス要素と同じ方法で計算され、ねじり剛性も同様の方法で計算することができる。曲げとせん断剛性に対しては、ティモシェンコ梁理論またはオイラー梁理論を使う。軸方向変形に対してはトラス要素と同じ方法を適用する。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i\} \quad (2.4.5)$$

$$\mathbf{K}_{axial} = \frac{EA}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

ここで、 A は断面積、 L_e は要素の長さである。

ねじりに対しても同様の方法で、次のように剛性マトリックスを求めることができる。

$$\mathbf{u}_i = \{\theta_{xi}\} \quad (2.4.7)$$

$$\mathbf{K}_{torsional} = \frac{GI_x}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

ここで、 I_x はねじり剛性である。

せん断と曲げ剛性は相関関係にある。先にティモシェンコ梁理論に基づいてせん断変形を考慮した曲げ剛性について説明する。要素座標系の $x-z$ 平面上でせん断と曲げを表現する変位は z 方向の並進変位、 w と y 軸に対する回轉變位となる。

$$\mathbf{u}_i = \{w_i \quad \theta_{yi}\}^T \quad (2.4.9)$$

要素の軸方向に対する任意の座標 x と並進変位 w を以下のように表す。

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i x_i, \quad w = \sum_{i=1}^2 N_i w_i \quad (2.4.10)$$

また、要素座標系の y 軸に対する回轉變位は次のように2次で表現できる。

$$\theta_y = \sum_{i=1}^2 N_i \theta_{yi} + P_3 \Delta \theta_{y3} \quad (2.4.11)$$

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2}, \quad P_3 = 1-\xi^2 \quad (-1 \leq \xi \leq 1) \quad (2.4.12)$$

要素中央の仮定の節点回転角 $\Delta \theta_{y3}$ を求めるために、次のような仮定をする。

せん断力と曲げモーメントのつり合い式を満足する。

$$Q_y = -\frac{\partial M_y}{\partial x} \quad (2.4.13)$$

せん断力と曲げモーメントのつり合いによって計算される平均せん断ひずみ $\bar{\gamma}_{zx}$ は、形状関数から計算されるせん断ひずみ γ_{zx} と次のような関係を満足する。

$$\int_{L_e} (\gamma_{zx} - \bar{\gamma}_{zx}) dL = 0 \quad (2.4.14)$$

上記の仮定より、要素中央の仮想節点での回転角 $\Delta\theta_{y3}$ は次のように表すことができる。

$$\Delta\theta_{y3} = \frac{3}{2L_e(1+\phi_3)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{L_e}{2} & -1 & -\frac{L_e}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix}, \quad \phi_3 = \frac{12EI_y}{GA_{sy}L_e^2} \quad (2.4.15)$$

ここで、 A_{sy} は z 軸の有効せん断面積、 I_y は断面 2 次モーメントである。

節点変位と曲率 κ_y の関係を \mathbf{B}_{bi} を用いて次のように表す。

$$\kappa_y = \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}_{bi} \mathbf{u}_i \quad (2.4.16)$$

$$\mathbf{B}_{bi} = \left\{ \frac{3a_i}{2L_e(1+\phi_3)} \frac{\partial P_3}{\partial x} \quad \frac{3}{4(1+\phi_3)} \frac{\partial P_3}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\}, \quad a_1=1, a_2=-1 \quad (2.4.17)$$

せん断変形は $\bar{\gamma}_{zx}$ を利用して、 $\bar{\gamma}_{zx}$ と節点変位との関係は \mathbf{B}_{si} を用いて、次のように表す。

$$\bar{\gamma}_{zx} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}_{si} \mathbf{u}_i \quad (2.4.18)$$

$$\mathbf{B}_{si} = \left\{ \frac{a_i}{L_e(1+\phi_3)} \quad \frac{L_e}{2(1+\phi_3)} \right\}, \quad a_1=1, a_2=-1 \quad (2.4.19)$$

これより、せん断と曲げ剛性は次のように計算することができる。

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{L_e} (\mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_{bj} + \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{sj}) dL \quad (2.4.20)$$

$$\mathbf{D}_b = I_y \{E\}, \quad \mathbf{D}_s = A_{sy} \{G\} \quad (2.4.21)$$

$x-z$ 平面の曲げとせん断に対する剛性は、式(2.4.20)を積分して計算すると、次のマトリックスで表すことができる。

$$\mathbf{K}_{bending} + \mathbf{K}_{shear} = \frac{EI_y}{1 + \phi_3} \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} & -\frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ \frac{4}{L_e} \left(1 + \frac{\phi_3}{4}\right) & \frac{6}{L_e^2} & \frac{2}{L_e} \left(1 - \frac{\phi_3}{2}\right) & \\ \text{Symm.} & & \frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} \\ & & \frac{4}{L_e} \left(1 + \frac{\phi_3}{4}\right) & \end{bmatrix} \quad (2.4.22)$$

要素座標系の $x-y$ 平面に対する曲げとせん断剛性も同じ方法で計算することができる。

せん断変形を考慮しないオイラー梁理論の場合、せん断ひずみの仮定式(2.4.14)の代わりに次式を利用して定式化を行う。

$$\int_{L_e} \gamma_{zx} dL = 0 \quad (2.4.23)$$

これより、式(2.4.22)で $\phi_3 = 0$ とすると、曲げ剛性が求まる。

2.4.3. 荷重と質量

(1) 荷重

梁要素に適用できる荷重には、梁要素荷重、物体力、プレストレス、温度荷重などがある。物体力は、要素の自重や慣性力を表現する荷重である。梁要素荷重は、梁要素の全体または一部に作用する集中または分布荷重である。梁要素荷重は、集中荷重と分布荷重があり、要素座標系と全体座標系の方向で入力することができる。プレストレスは、梁要素に断面力として引張を与える場合に使用する。プレストレスは、要素座標系の軸方向に作用して、要素両端の 2 つ節点が拘束されている場合に入力したプレストレスが要素断面力と同じになるようにする。梁要素の温度荷重には、長さ方向の熱変形荷重と温度勾配のような曲げ荷重がある。

梁要素荷重

梁要素の 2 つ節点間に入力する集中または分布荷重である。荷重載荷区間はユーザが任意に入力することができて、解析時は等価の節点荷重に変換する。梁要素荷重は、要素断面力の計算時に部材内部の固定位置(I-端点、1/4、1/2、3/4、J-端点)で正確に計算される。図 2.4.5 で梁要素荷重の入力例を示す。

物体力

$$\mathbf{F}_i = A \int_{L_e} N_i \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} dL \quad (2.4.24)$$

ここで、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は方向別の重量密度である。

プレストレス

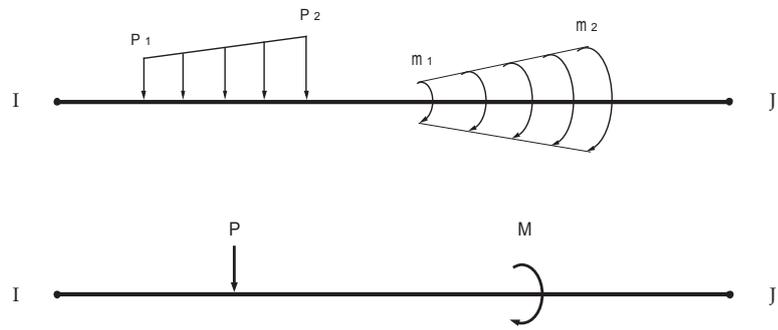
$$\mathbf{F}_i = - \int_{L_e} \mathbf{B}_i^T P dL \quad (\mathbf{B}_i : \text{トラス要素と同様}) \quad (2.4.25)$$

ここで、 P は軸方向のプレストレスである。

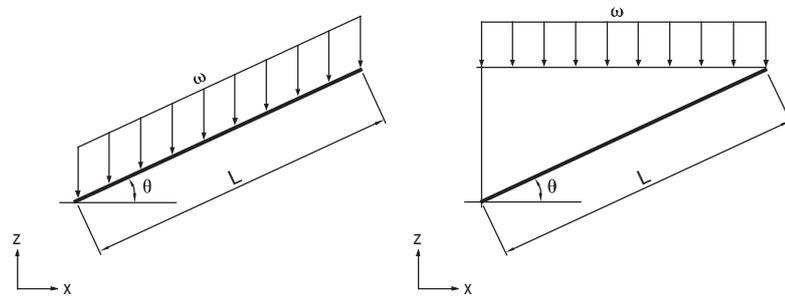
温度荷重

$$\mathbf{F}_i = \int_{L_e} \mathbf{B}_i^T E A \alpha \Delta T dL \quad (2.4.26)$$

ここで、 α は熱膨張係数、 ΔT は温度変化である。



(a) 梁要素荷重の種類(分布荷重、集中荷重)



(b) 全体座標系に対する投影可否による分布荷重の計算

図 2.4.5 梁要素荷重の入力例

(2) 質量

梁要素の質量としては集中質量だけが考慮できる。集中質量は x, y, z の並進変位に対応してトラス要素と同じく $(\rho AL)/2$ で、方向に関係なくて同じ値を持つ。

2.4.4 出力データ

解析結果としては、要素あたり 5 つの位置で要素断面力が出力され、すべての断面力は要素座標系に従う。出力位置は要素の長さ方向に、I-端点、1/4、2/4、3/4、J-端点であり、図 2.4.6 のように矢印方向が '+' 符号となる。出力される要素断面力は次の通りである。

軸力	N_x
せん断力	Q_y, Q_z
ねじりモーメント	M_x
曲げモーメント	M_y, M_z

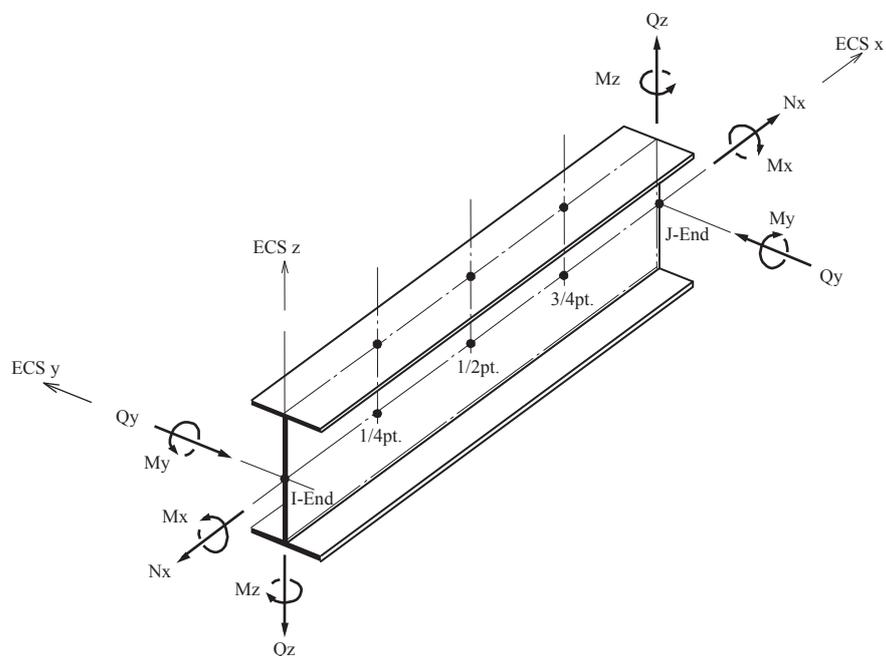


図 2.4.6 梁要素の出力データの符号規約

2.5 平面応力要素

2.5.1 概要

平面応力要素は同一平面上に位置する 3、4 つの節点で定義される 3 角形または 4 角形要素で、均一な厚さを持つ板の解析に主に使用される。要素の厚さ方向の応力は存在せず、厚さ方向のひずみはポアソン効果によって発生すると仮定する。平面応力要素は面内変形 (in-plane deformation) だけが考慮でき、静的 (線形/非線形) 解析および動的解析に使用することができる。平面応力要素の変形を定義する応力とひずみは次の通りである。

面内方向の応力とひずみ

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5.1)$$

応力とひずみの符号規約は図 2.5.1 のように定義され、矢印方向が '+' 符号となる。

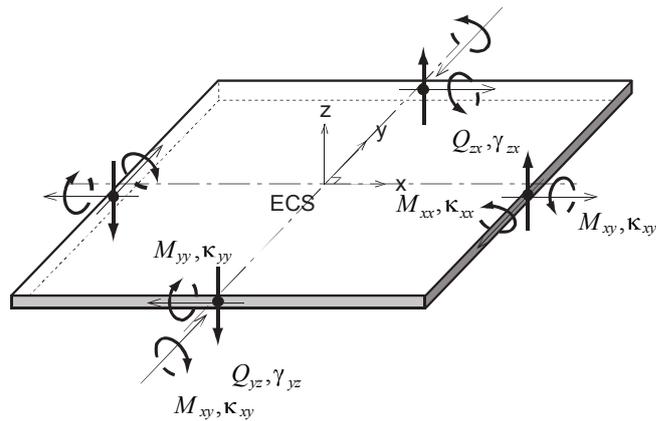


図 2.5.1 平面応力要素の応力の符号規約

要素座標系は手座標系に基づいた x, y, z 軸の直交座標系となり、方向は図 2.5.2 のように設定される。4 角形要素の場合、節点 1 と節点 4 の中央点から節点 2 と節点 3 の中央点へ向かう方向が x 軸方向となり、3 角形要素の場合、節点 1 から節点 2 へ向かう方向が x 軸方向となる。

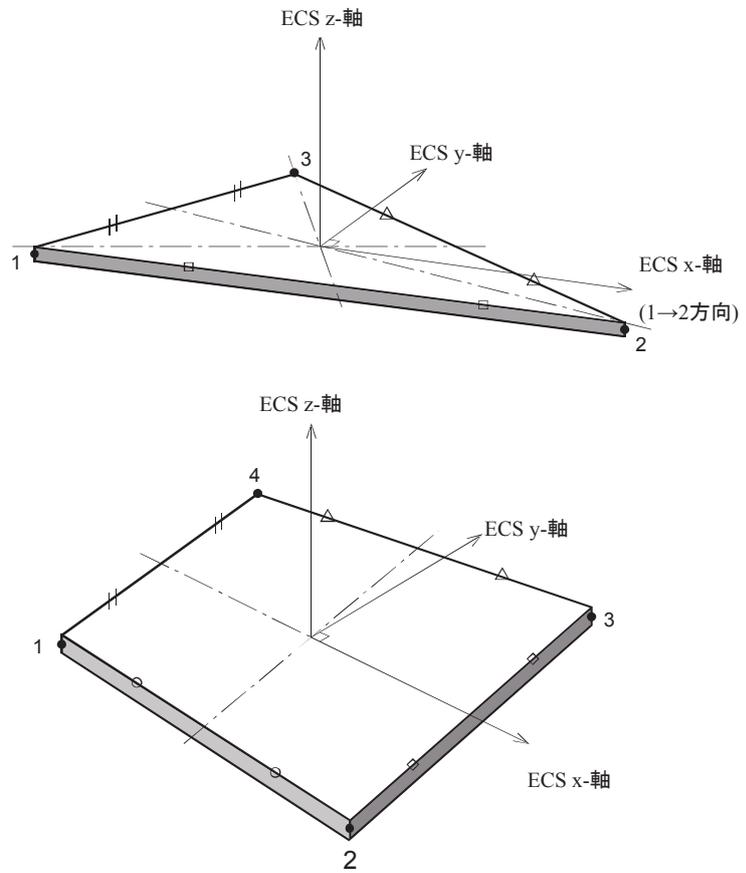


図 2.5.2 平面応力要素の要素座標系

2.5.2 有限要素の定式化

平面応力要素は全体面積に対して厚さが一定であると仮定する。平面応力要素はアイソパラメトリック要素で構成されていて、4 節点の 4 角形要素では非適合 (incompatible) モードを適用している。非適合モードを考慮しない場合、変位は要素座標系 x, y 方向の並進変位 u, v だけを持つ。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i \quad v_i\}^T \quad (2.5.2)$$

要素内の任意の座標 x, y と並進変位 u, v は次のように示すことができる。

$$x = \sum_{i=1}^N N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^N N_i y_i, \quad u = \sum_{i=1}^N N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^N N_i v_i \quad (2.5.3)$$

3 節点の 3 角形

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta \quad (2.5.4)$$

4 節点の 4 角形

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

節点変位 u とひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ との関係は、 \mathbf{B}_i によって式(2.5.8)のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.5.6)$$

マトリックス \mathbf{B}_i は形状関数の微分で次のようになる。

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.5.7)$$

マトリックス \mathbf{B}_i を用いて面内変形に関する要素マトリックスを表現すると次のようになる。

$$\mathbf{K}_{ij} = t \int_{A_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA \quad (2.5.8)$$

ここで、 t は厚さ、 A_e は要素の面積である。

等方性材料の場合、応力とひずみの関係を表すマトリックス \mathbf{D} は次のようになる。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.5.9)$$

線形解析では4節点の4角形要素に非適合モードを適用する。非適合要素は節点自由度と無関係に要素内部に付加自由度を与えて、一定曲げモーメント状態を可能にしたもので、要素の性能を良くする。

非適合モードを考慮すると節点変位以外に次のような追加の自由度を持つ。

$$\mathbf{u}_a = \{a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad b_2\}^T \quad (2.5.10)$$

座標 x, y と変位 u, v の補完式は次の通りである。

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i, \\ u &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i + a_1 P_1 + a_2 P_2, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i + b_1 P_1 + b_2 P_2 \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

一方、非適合モードを意味する形状関数は次のようになる。

$$P_1 = 1 - \xi^2, \quad P_2 = 1 - \eta^2 \quad (2.5.12)$$

ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は節点変位と非適合モードを同時に考慮して次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{B}_a \mathbf{u}_a \quad (2.5.13)$$

マトリックス \mathbf{B}_i は式(2.5.14)と同じで、非適合モードに関する \mathbf{B}_a は以下のようにになる。

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial P_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial P_2}{\partial y} \\ \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.5.14)$$

マトリックス \mathbf{B}_i と \mathbf{B}_a を用いて面内変形に関する要素の剛性マトリックスを計算すると、次のように4つのマトリックスが得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= t \int_{A_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA, \quad \mathbf{K}_{ia} = t \int_{A_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_a dA \\ \mathbf{K}_{ai} &= t \int_{A_e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i dA, \quad \mathbf{K}_{aa} = t \int_{A_e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{D} \mathbf{B}_a dA \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

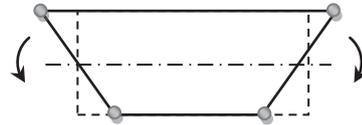
式(2.5.15)の4つの剛性マトリックスは以下の相関関係を持つ。

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{ij}] & [\mathbf{K}_{ia}] \\ [\mathbf{K}_{aj}] & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_j\} \\ \{\mathbf{u}_a\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_i\} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.5.16)$$

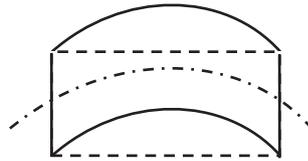
非適合モードで剛性は静的縮小法(static condensation)によって次のように消去される。

$$[\mathbf{K}_{ij}] = [\mathbf{K}_{ij}] - [\mathbf{K}_{ia}] \mathbf{K}_{aa}^{-1} [\mathbf{K}_{aj}] \quad (2.5.17)$$

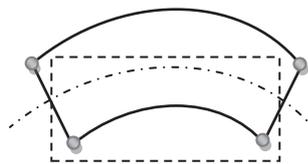
非適合モードのマトリックス \mathbf{B}_a を構成する形状関数を微分する時は、無次元の自然座標系(natural coordinate)の原点 ($\xi = \eta = 0$) から計算されたヤコビアンを利用する。非適合モードでは図 2.5.3 のような一定曲げ変形が表現できるため、要素の性能を向上させることができる。



非適合モードを適用しない4節点の4角形要素の曲げ変形



非適合モードの追加



一定曲げ変形の表現

図 2.5.3 非適合モードによる一定曲げ変形の表現

2.5.3 荷重と質量

(1) 荷重

平面応力要素に適用できる荷重には、物体力、圧力、線圧(Edge Load)、温度荷重などがある。物体力は、要素の自重や慣性力を表現する荷重である。圧力は、平面要素の面に作用する分布荷重で、線圧は圧力的一种で平面要素の辺に作用する分布荷重である。温度荷重には、節点温度、要素温度のように面内方向に対する熱変形荷重である。

物体力

$$\mathbf{F}_i = t \int_{A_e} N_i \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} dA \quad (2.5.18)$$

ここで、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は方向別の重量密度である。

圧力

$$\mathbf{F}_i = \int_{A_e} N_i \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} dA \quad (2.5.19)$$

ここで、 P_x, P_y, P_z は方向別の圧力である。

線圧

$$\mathbf{F}_i = \int_L N_i \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} ds \quad (2.5.20)$$

ここで、 P_x, P_y, P_z は方向別の線圧である。

温度荷重

$$\mathbf{F}_i = t \int_{A_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T dA \quad (2.5.21)$$

ここで、 α_x, α_y は x, y 方向別の熱膨張係数である。

(2) 質量

平面応力要素の質量は、集中質量が考慮でき、 x, y, z 方向の並進変位のみを考慮する。集中質量は要素全体の質量($\rho t A_e$)を分布質量($\mathbf{M}_{ij} = \rho t \int_{A_e} N_i N_j dA$)の対角項の比率で分配して算定する。ここで、 N_i, N_j は形状関数、 ρt は単位体積質量×要素厚さである。

2.5.4 出力データ

解析結果としては、節点での応力があり、符号と方向は要素座標系に従う。要素座標系で出力された結果は、要素座標系または出力座標系に変換して出力することができる。平面応力要素で出力される応力の種類は次の通りである。

応力成分	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$
主応力	P_1, P_2
	$P_i = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
ミーゼス応力	$\sqrt{(P_1^2 + P_2^2 - P_1 P_2)}$
平均応力	$\frac{P_1 + P_2}{2}$
最大せん断応力	$\frac{ P_1 - P_2 }{2}$

節点での応力および要素断面力は積分点で計算された結果を用いて、外挿法 (Extrapolation) によって算出する。平面応力要素の積分点は次のようになる。

- 3 節点の 3 角形要素： 1 つの積分点
- 4 節点の 4 角形要素： 4 つの積分点

応力に対する符号規約は図 2.5.1 の通りである。

2.5.5 積分点

(1) 3 節点の 3 角形要素

この要素は 1 ポイントのガウス積分を利用するため、積分に適用する積分点座標は、自然座標系(1/3, 1/3)となる。

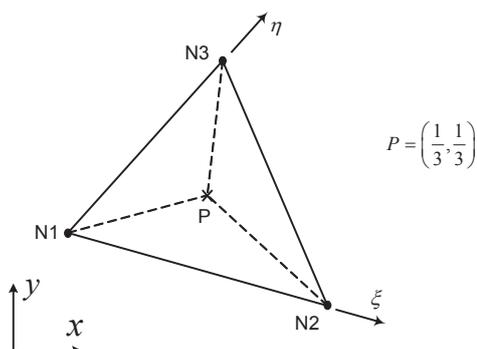


図 2.5.4 3 節点の平面応力要素の積分点位置

形状関数は $N_1 = 1 - \xi - \eta$, $N_2 = \xi$, $N_3 = \eta$ で、要素内の任意位置での座標値は形状関数を利用し、次のようになる。

$$x_p = \sum_{i=1}^N N_i x_i, \quad y_p = \sum_{i=1}^N N_i y_i \quad (2.5.23)$$

積分点座標は、 $\xi = 1/3$ 、 $\eta = 1/3$ を形状関数に代入すると、全体座標系で積分点座標を求めることができる。

$$x_p = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad (2.5.24)$$

$$y_p = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) \quad (2.5.25)$$

(2) 4 節点の 4 角形要素

この要素は 4 ポイントのガウス積分を利用する。積分点座標 P_i (自然座標系) は、次のようになる。

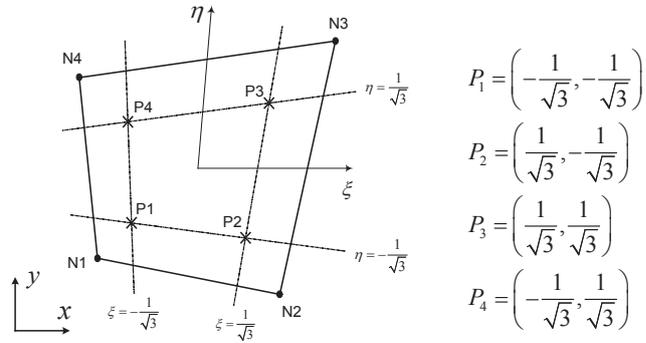


図 2.5.5 4 節点の平面応力要素の積分点位置

形状関数は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
 \end{aligned}
 \tag{2.5.26}$$

積分点座標 P_i を形状関数に代入すると、全体座標系で積分点座標を求めることができる。例えば、積分点座標 P_1 に対応する全体座標系での x 座標は以下ようになる。

$$x_{p1} = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = \frac{1}{6} \left[(2+\sqrt{3})x_1 + x_2 + (2-\sqrt{3})x_3 + x_4 \right]
 \tag{2.5.27}$$

同様に各積分点に対する全体座標系での座標を求めると次のようになる。

$$x_p = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} & 1 \\ & 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} \\ & & 2+\sqrt{3} & 1 \\ \text{symmetry} & & & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}
 \tag{2.5.28}$$

$$y_p = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} & 1 \\ & 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} \\ & & 2+\sqrt{3} & 1 \\ \text{symmetry} & & & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}
 \tag{2.5.29}$$

2.5.6 応力計算法(Extrapolation)

3 節点の 3 角形要素の場合、1 ポイントのガウス積分を行う。したがって、全ての節点に対して積分点で計算された応力を適用する。

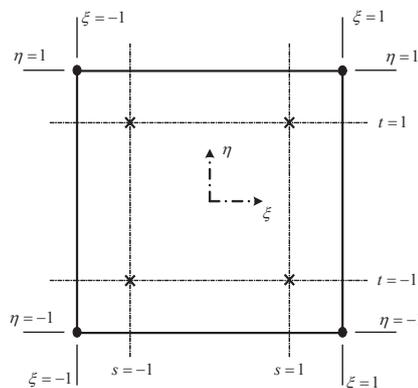


図 2.5.6.4 節点の平面応力要素の積分点周りでの応力外挿法

4 節点の 4 角形要素の場合、各積分点と要素座標系の座標節点との関係は次のようになる。

$$s = \xi\sqrt{3}, \quad t = \eta\sqrt{3} \quad (2.5.30)$$

要素内部の任意の点での応力は形状関数を利用して求めることができる。

$$\sigma_N = \sum N_i \sigma_i, \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (2.5.31)$$

例えば、節点 1 での応力を計算すると、

$$\begin{aligned} \sigma_{N1} &= \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_i = \frac{1}{4} \left[(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\sigma_1 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\sigma_2 \right. \\ &\quad \left. + (1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\sigma_3 + (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\sigma_4 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(4+2\sqrt{3})\sigma_1 - 2\sigma_2 + (4-2\sqrt{3})\sigma_3 - 2\sigma_4 \right] \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

同様に各節点での応力を求めると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{N1} \\ \sigma_{N2} \\ \sigma_{N3} \\ \sigma_{N4} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & -1 & 2-\sqrt{3} & -1 \\ & 2+\sqrt{3} & -1 & 2-\sqrt{3} \\ & & 2+\sqrt{3} & -1 \\ & & & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \quad (2.5.33)$$

2.6 板要素

2.6.1 概要

板要素は 3、4 つの節点で定義される 3 角形または 4 角形の要素で、圧力容器、土止め壁、橋梁の床版などのモデリングに使うことができる。板要素は、平面応力状態の面内変形 (In-Plane Deformation) と、曲げ、せん断の面外変形 (Out-of-Plane Deformation) を考慮することができ、静的(線形/非線形)解析および動的解析に使用することができる。板要素の変形を定義する応力とひずみは次の通りである。

➤ 面内方向の応力とひずみ

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6.1)$$

➤ 曲げモーメントと曲率

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.6.2)$$

➤ せん断力とせん断ひずみ

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{zx} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.6.3)$$

面内方向の応力とひずみの符号規約は平面応力要素と同じで、曲げモーメントとせん断力の方向は図 2.6.1 のように定義され、矢印方向が '+' 符号となる。

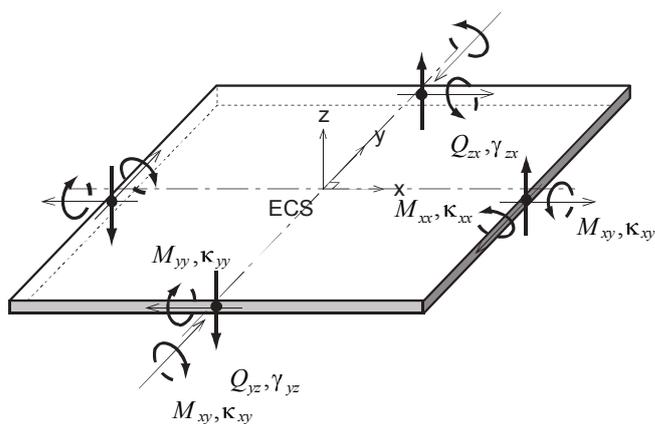


図 2.6.1 板要素の応力の符号規約

要素座標系は右手座標系に基づいた x, y, z 軸の直交座標系となり、方向は図 2.6.2 のように設定される。4 角形要素の場合、節点 1 と節点 4 の中央点から節点 2 と節点 3 の中央点へ向かう方向が x 軸方向となる。

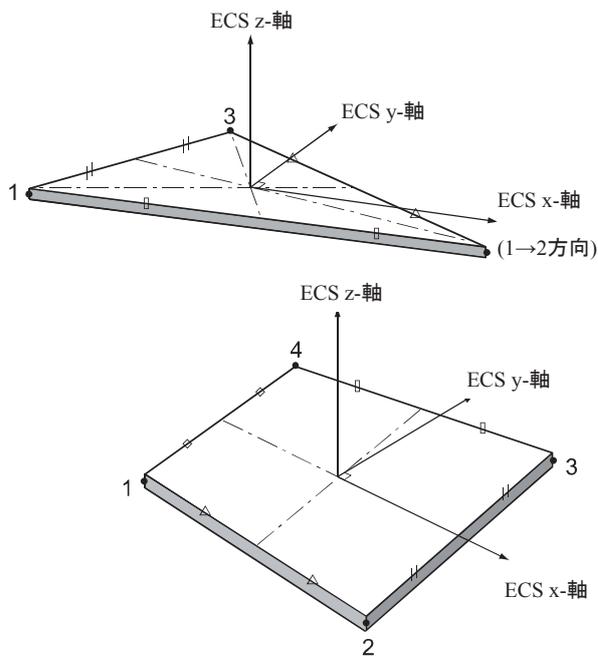


図 2.6.2 板要素の要素座標系

2.6.2 有限要素の定式化

板要素は要素座標系で 3 つの並進変位と x, y 軸に対する回転変位を持つ。平面板は面内変形と面外変形剛性を独立するが、曲面板は 3 次元の弾性理論に基づいた“continuum shell approach”法を利用している。プログラムでは平面板タイプだけが使用できる。

(1) 平面板

平面板要素で変形成分に使用できる剛性の種類は次の通りである。

面内変形

3 節点要素

アイソパラメトリック要素(平面応力要素と同様)、ドリリング自由度(面外軸周りの回転自由度)が考慮可能な要素¹(z 軸に対する回転自由度を考慮)

4 節点要素

アイソパラメトリック要素(平面応力要素と同様)、ドリリング自由度(面外軸周りの回転自由度)が考慮可能な要素(z 軸に対する回転自由度を考慮)

面外変形

3 節点要素

DKT²(Discrete Kirchhoff triangle), DKMT³(Discrete Kirchhoff Mindlin triangle)

4 節点要素

DKQ 4 (Discrete Kirchhoff quadrilateral), DKMQ 5 (Discrete Kirchhoff Mindlin Quadrilateral)

面内変形剛性で使用できる方法で、アイソパラメトリック要素は平面応力要素と同じなので、“2.5 平面応力要素”を参照する。ドリリング自由度(面外軸周りの回転自由度)が考慮可能な要素は要素座標系の x, y 方向の並進変位(Translation) u, v と z 軸に対する回転変位(Rotation) θ_z の影響を考慮する。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i, v_i, \theta_{zi}\}^T \quad (2.6.4)$$

N 個の節点数を持つ要素内の任意の座標 x, y と並進変位 u, v は、次のような関係で表すことができる。

-
- ¹ D.J. Allman, “A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis,” Comput. Struct., Vol. 19, 1-8, 1984
 - ² J.L. Batoz, K.J. Bathe and L.W. Ho, “A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, 1771-1812, 1980
 - ³ I. Katili, “A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields – Part I : An Extended DKT Element for Thick-Plate Bending Analysis,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, 1859-1883, 1993
 - ⁴ J.L. Batoz and M. Ben Tahar, “Evaluation of a New Thin Plate Quadrilateral Element,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, 1655-1678, 1982
 - ⁵ I. Katili, “A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Element Based on Mindlin-Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields-Part II : An Extended DKQ Element for Thick-Plate Bending Analysis,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 36, 1885-1908, 1993
-

$$x = \sum_{i=1}^N N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^N N_i y_i \quad (2.6.5)$$

$$u = \sum_{i=1}^N N_i u_i + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N P_i (y_j - y_i) (\theta_{z_j} - \theta_{z_i})$$

$$v = \sum_{i=1}^N N_i v_i + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^N P_i (x_j - x_i) (\theta_{z_j} - \theta_{z_i})$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad j = 2, 3, \dots, N, 1 \quad (2.6.6)$$

ここで、 θ_{z_i} は節点のドリリング自由度で、形状関数は次のようになる。

3 節点要素

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta \quad (2.6.7a)$$

$$P_1 = 4\xi(1 - \xi - \eta), \quad P_2 = 4\xi\eta, \quad P_3 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \quad (2.6.7b)$$

4 節点要素

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (2.6.8a)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad P_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2),$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad P_4 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (2.6.8b)$$

節点変位と面内ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ の関係は \mathbf{B}_i によって、式(2.6.9)のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.6.9)$$

マトリックス \mathbf{B}_i は、形状関数の微分で次のようになる。

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{(y_i - y_k) \partial P_k}{8 \partial x} - \frac{(y_j - y_i) \partial P_i}{8 \partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{(x_i - x_k) \partial P_k}{8 \partial y} - \frac{(x_j - x_i) \partial P_i}{8 \partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{(y_i - y_k) \partial P_k}{8 \partial y} - \frac{(y_j - y_i) \partial P_i}{8 \partial y} + \frac{(x_i - x_k) \partial P_k}{8 \partial x} - \frac{(x_j - x_i) \partial P_i}{8 \partial x} \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad j = 2, 3, \dots, N, 1 \quad k = N, 1, \dots, N-2, N-1 \quad (2.6.10)$$

マトリックス \mathbf{B}_i を用いて面内変形に関する要素マトリックスを表現すると次のようになる。

$$\mathbf{K}_{ij}^{(l)} = \int_{A_e} t \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA \quad (2.6.11)$$

ここで、 t は厚さ、 A_e は要素の面積である。

等方性(Isotropic)材料の応力とひずみの関係を示すマトリックス \mathbf{D} は、次のように表す。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.6.12)$$

面内変形に対してドリリング自由度を考慮した要素を使うと、要素辺に垂直な並進変位を 2 次補間する。したがって、図 2.6.3 のように曲げ変形が良く近似できて、解の精度も良くなる。

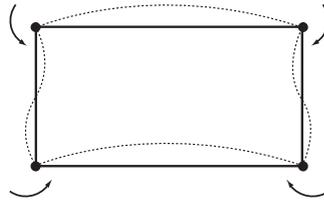


図 2.6.3 曲げとドリリング自由度との関係

面外変形に対する剛性で使用できる方法で、DKMT(3 節点)と DKMQ(4 節点)要素はせん断変形が考慮できてせん断ひずみを仮定する。そして、節点の自由度として要素座標系 z 方向の並進変位 w と x, y 軸に対する回轉變位 θ_x, θ_y を考慮する。

$$\mathbf{u}_i = \{w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}^T \quad (2.6.13)$$

要素内の任意の座標 x, y は、式(1.5.4)のように計算されて、回轉變位 θ_x, θ_y は次のように 2 次式で示すことができる。

$$\theta_x = \sum_{i=1}^N N_i \theta_{xi} + \sum_{i=1}^N P_i S_{ij} \Delta \theta_{ni}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^N N_i \theta_{yi} - \sum_{i=1}^N P_i C_{ij} \Delta \theta_{ni}$$

$$C_{ij} = -x_{ij} / L_{ij}, \quad S_{ij} = -y_{ij} / L_{ij}, \quad x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad L_{ij}^2 = x_{ij}^2 + y_{ij}^2$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad j = 2, 3, \dots, N, 1 \quad (2.6.14)$$

ここで、形状関数 N_i, P_i は式(2.6.7)、(2.6.8)となる。

要素辺の中央での仮想回転角 $\Delta\theta_{ni}$ を求めるために次のような仮定をする。

N 個の辺に沿って、せん断力と曲げモーメントのはり合い条件を満足する。

$$Q_s = -M_{s,s} + M_{ns,n} \quad (2.6.15)$$

辺に垂直な軸に対する回転変位は辺に沿って 2 次となり、接線方向の軸に対する回転変位は 1 次となる。

$$\theta_n = \left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)\theta_{ni} + \frac{s}{L_{ij}}\theta_{nj} + 4\frac{s}{L_{ij}}\left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)\Delta\theta_{ni}, \quad \theta_s = \left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right)\theta_{si} + \frac{s}{L_{ij}}\theta_{sj}$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad j = 2, 3, \dots, N, 1 \quad (2.6.16)$$

式(2.6.15)で計算されるせん断ひずみ $\bar{\gamma}_{sz}$ は、形状関数から直接計算できるせん断ひずみ γ_{sz} と次のような関係を満足する。

$$\int_0^{L_{ij}} (\gamma_{sz} - \bar{\gamma}_{sz}) ds = 0 \quad (2.6.17)$$

上記の仮定より求めた $\Delta\theta_{ni}$ を式(2.6.14)に代入すると、次のように回転変位 θ_x, θ_y を \mathbf{u}_i で表すことができる。

$$\theta_x = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_{xi}^T \mathbf{u}_i, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_{yi}^T \mathbf{u}_i \quad (2.6.18)$$

ここで、 $\mathbf{H}_{xi}, \mathbf{H}_{yi}$ は次の通りである。

$$\mathbf{H}_{xi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_i \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{3P_k S_{ki}}{2L_{ki}(1+\phi_{ki})} - \frac{3P_i S_{ij}}{2L_{i+3}(1+\phi_{ij})} \\ \frac{3P_k S_{ki} y_{ki}}{4L_{ki}(1+\phi_{ki})} + \frac{3P_i S_{ij} y_{ij}}{4L_{ij}(1+\phi_{ij})} \\ \frac{3P_k S_{ki} x_{ki}}{4L_{ki}(1+\phi_{ki})} - \frac{3P_i S_{ij} x_{ij}}{4L_{ij}(1+\phi_{ij})} \end{Bmatrix} \quad (2.6.19a)$$

$$\mathbf{H}_{yi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{3P_k C_{ki}}{2L_{ki}(1+\phi_{ki})} + \frac{3P_i C_{ij}}{2L_{ij}(1+\phi_{ij})} \\ \frac{3P_k C_{ki} y_{ki}}{4L_{ki}(1+\phi_{ki})} - \frac{3P_i C_{ij} y_{ij}}{4L_{ij}(1+\phi_{ij})} \\ \frac{3P_k C_{ki} x_{ki}}{4L_{ki}(1+\phi_{ki})} + \frac{3P_i C_{ij} x_{ij}}{4L_{ij}(1+\phi_{ij})} \end{Bmatrix} \quad (2.6.19b)$$

ここで、 $\phi_{ij} = \frac{2}{\kappa(1-\nu)} \left(\frac{t^2}{L_{ij}^2}\right)$ (等方性材料の場合)、

$i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad j = 2, 3, \dots, N, 1 \quad k = N, 1, \dots, N-2, N-1$ である。

節点変位と曲率 $\boldsymbol{\kappa}$ との関係は \mathbf{B}_{bi} によって次のように示すことができる。

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_{bi} \mathbf{u}_i \quad (2.6.20)$$

$$\mathbf{B}_{bi} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{H}_{yi}^T}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_{xi}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{H}_{xi}^T}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_{yi}^T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.6.21)$$

式(2.6.18)から計算される $\bar{\gamma}_{sz}$ を利用してせん断変形 $\boldsymbol{\gamma}$ の計算する。そして、節点変位との関係を定義するマトリックス \mathbf{B}_{si} は次のようになる。

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_{si} \mathbf{u}_i \quad (2.6.22)$$

3 節点要素

$$\mathbf{B}_{si} = \begin{bmatrix} \left(\frac{S_{jk}}{A_j} N_j - \frac{S_{ki}}{A_i} N_i\right) \frac{\phi_j}{L_{ij}(1+\phi_j)} & \left(\frac{S_{ij}}{A_i} N_i - \frac{S_{jk}}{A_k} N_k\right) \frac{\phi_{ki}}{L_{ki}(1+\phi_{ki})} \\ \left(\frac{C_{ki}}{A_i} N_i - \frac{S_{jk}}{A_j} N_j\right) \frac{\phi_j}{L_{ij}(1+\phi_j)} & \left(\frac{S}{A_k} N_k - \frac{S}{A_i} N_i\right) \frac{\phi_{ki}}{L_{ki}(1+\phi_{ki})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-y_{ij}}{2} & \frac{x_{ij}}{2} \\ -1 & \frac{-y_{ki}}{2} & \frac{x_{ki}}{2} \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, 3 \quad j = 2, 3, 1 \quad k = 3, 1, 2 \quad (2.6.23)$$

4 節点要素

$$\mathbf{B}_{si} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\phi_j}{1+\phi_j} & \frac{\partial N_k}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\phi_{ki}}{1+\phi_{ki}} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\phi_j}{1+\phi_j} & \frac{\partial N_k}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\phi_{ki}}{1+\phi_{ki}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-y_{ij}}{2} & \frac{x_{ij}}{2} \\ -1 & \frac{-y_{ki}}{2} & \frac{x_{ki}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.6.24)$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 2, 3, 4, 1 \quad k = 4, 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} & i = 1, 3 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & i = 2, 4 \end{cases}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} & i = 1, 3 \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} & i = 2, 4 \end{cases} \quad (2.6.25)$$

これより、曲げとせん断変形に関する要素剛性が以下のように求まる。

$$\mathbf{K}_{ij}^{(0)} = \int_{A_e} (\mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{bj} \frac{t^3}{12} + \mathbf{B}_{si}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{sj} t) dA \quad (2.6.26)$$

面外変形に対する剛性として使用できるもので、DKT(3 節点)要素と DKQ(4 節点)要素はせん断変形を考慮しない。この 2 つ要素は Kirchhoff-Love 仮定の離散化 (Discretization)を用いる。節点の自由度としては、式(2.6.13)ように要素座標系の z 方向

の並進変位 w と x, y 軸に対する回転変位 θ_x, θ_y を考慮する。要素内の任意座標 x, y は式(2.6.4)と同様に計算されて、回転変位 θ_x, θ_y は次のように 2 次式で表現される。

$$\theta_x = \sum_{i=1}^N N_i \theta_{xi} + \sum_{i=1}^N N_{i+N} \Delta \theta_{xi}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^N N_i \theta_{yi} + \sum_{i=1}^N N_{i+N} \Delta \theta_{yi} \quad (2.6.27)$$

3 節点要素

$$N_1 = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta), \quad N_2 = \xi(2\xi - 1), \quad N_3 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_4 = 4\xi(1 - \xi - \eta), \quad N_5 = 4\xi\eta, \quad N_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \quad (1.5.28)$$

4 節点要素

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_8, \quad N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) - \frac{1}{2}N_5 - \frac{1}{2}N_6$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}N_6 - \frac{1}{2}N_7, \quad N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) - \frac{1}{2}N_7 - \frac{1}{2}N_8$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta), \quad N_6 = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta), \quad N_8 = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (2.6.29)$$

要素辺の中央での仮想回転角 $\Delta \theta_{xi}, \Delta \theta_{yi}$ を求めるために次のような仮定をする。

Kirchhoff-Love の仮定を各節点と辺の midpoint に適用する。

$$\text{節点: } -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \text{辺の中央: } -\theta_n + \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (2.6.30)$$

面外方向の並進変位は辺に沿って 3 次となり、辺の接線方向を向かう軸に対する回転変位は 1 次となる。

$$\frac{\partial w(L_{ij}/2)}{\partial s} = -\frac{3}{2L_{ij}}w_i - \frac{1}{4}\frac{\partial w(0)}{\partial s} + \frac{3}{2L_{ij}}w_j + \frac{1}{4}\frac{\partial w(L_{ij})}{\partial s} \quad (2.6.31)$$

$$\Delta \theta_{si} = \frac{1}{2}(\theta_{si} + \theta_{sj}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad j = 2, 3, \dots, N, 1 \quad (2.6.32)$$

上記の仮定を通じて求めた $\Delta \theta_{xi}, \Delta \theta_{yi}$ を式(2.6.27)に代入すると、次のように回転変位 θ_x, θ_y を \mathbf{u}_i で表現することができる。

$$\theta_x = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_{xi}^T \mathbf{u}_i, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_{yi}^T \mathbf{u}_i \quad (2.6.33)$$

ここで、 $\mathbf{H}_{xi}, \mathbf{H}_{yi}$ は次のようになる。

$$\mathbf{H}_x = \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2}(d_{ij}N_{i+N} - d_{ki}N_{k+N}) \\ N_i - e_{ij}N_{i+N} - e_{ki}N_{k+N} \\ b_{ij}N_{i+N} + b_{ki}N_{k+N} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{yi} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2}(a_{ij}N_{i+N} - a_{ki}N_{k+N}) \\ b_{ij}N_{i+N} + b_{ki}N_{k+N} \\ N_i - c_{ij}N_{i+N} - c_{ki}N_{k+N} \end{Bmatrix} \quad (2.6.34)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, N \quad j = 2, 3, \dots, N, 1 \quad k = N, 1, \dots, N-2, N-1$$

$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_{ij}$ は、要素の幾何学的な形状によって決定される値で、次のように定義する。

$$a_{ij} = -x_{ij}/L_{ij}^2, \quad b_{ij} = \frac{3}{4}x_{ij}y_{ij}/L_{ij}^2, \quad c_{ij} = (\frac{1}{4}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}y_{ij}^2)/L_{ij}^2$$

$$d_{ij} = -y_{ij}^2/L_{ij}^2, \quad e_{ij} = (\frac{1}{4}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}x_{ij}^2)/L_{ij}^2 \quad (2.6.35)$$

節点変位と横方向の曲率 κ の関係式は式(2.6.20)と同じで、 \mathbf{B}_{bi} は式(2.6.21)と同じである。DKT と DKQ 要素の場合、せん断変形を考慮しないので、面外変形に関する要素剛性は次のようになる。

$$\mathbf{K}_{ij}^{(0)} = \int_{A_e} \mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{bj} \frac{t^3}{12} dA \quad (2.6.36)$$

4 節点平面要素は節点の座標が 1 つの平面上に存在しない場合がある。平面に存在しない要素を上記のような定式化で計算すると、要素の幾何学的な形状を正確に考慮することができない。したがって、要素座標系で定義された節点変位がねじれる場合がある。このような問題を解決するために、MacNeal⁶が提案した剛性補正法を適用する。図 2.6.4 のように $A-B-C-D$ 平面で計算された剛性マトリックス \mathbf{K}_p を実際の節点位置 1-2-3-4 に対する剛性 \mathbf{K} で変換するために変換マトリックス \mathbf{S} を利用する。

$$\mathbf{K} = \mathbf{S}^T \mathbf{K}_p \mathbf{S} \quad (2.6.37)$$

⁶ R.H. MacNeal, *Finite Elements : Their Design and Performance*, Marcel Dekker Inc., New York, 1994

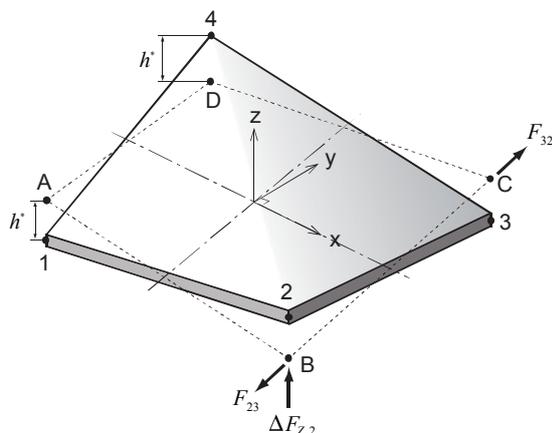


図 2.6.4 4 節点の平面板要素のねじれた形状

変換マトリックス \mathbf{S} は、平面上の点 ($A-B-C-D$) の力 \mathbf{F}_p を節点 ($1-2-3-4$) 位置の力 \mathbf{F} で変換するマトリックスである。

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}^T \mathbf{F}_p \quad (2.6.38)$$

$$\mathbf{F}_p = \{ \mathbf{F}_{p1}^T, \mathbf{F}_{p2}^T, \mathbf{F}_{p3}^T, \mathbf{F}_{p4}^T \}^T \quad (2.6.39)$$

$$\mathbf{F}_{pi} = \{ F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z \}_{pi}^T \quad (2.6.40)$$

力の変換マトリックスを計算する時に考慮する成分は、節点 ($1-2-3-4$) を連結した要素の辺が平面 ($A-B-C-D$) と成す角度によって発生する面外方向の力とモーメントである。

$$-\Delta F_{z3} = \Delta F_{z2} = h^* \left(\frac{F_{32}}{L_{23}} - \frac{F_{23}}{L_{23}} \right) \quad (2.6.41)$$

$$-\Delta M_{z3} = \Delta M_{z2} = h^* \left(\frac{M_{32}}{L_{23}} - \frac{M_{23}}{L_{23}} \right) \quad (2.6.42)$$

面外方向に発生するモーメント ΔM_{zi} は、変換マトリックス \mathbf{S} に直接適用しなく、等価の力に置換して適用する。

2.6.3 荷重と質量

(1) 荷重

板要素に適用できる荷重には、物体力、圧力、線圧(Edge Load)、温度荷重などがある。物体力は、要素の自重や慣性力を表現する荷重である。圧力は、平面要素の面に作用する分布荷重で、線圧は圧力の一種で平面要素の辺に作用する分布荷重である。温度荷重には、節点温度、要素温度のように面内方向に対する熱変形荷重と、温度勾配ように曲げを発生する荷重がある。

物体力

$$\mathbf{F}_i = \int_{A_e} tN_i \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} dA \quad (2.6.43)$$

ここで、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は方向別の重量密度である。

圧力

$$\mathbf{F}_i = \int_{A_e} N_i \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} dA \quad (2.6.44)$$

ここで、 P_x, P_y, P_z は方向別の圧力である。

線圧

$$\mathbf{F}_i = \int_{L_e} N_i \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} ds \quad (2.6.45)$$

ここで、 P_x, P_y, P_z は方向別の線圧である。

温度荷重

$$\mathbf{F}_i = \int_{A_e} t \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T dA \quad (2.6.46)$$

ここで、 α_x, α_y は x, y 方向別の熱膨張係数、 \mathbf{B}_i は面内変形のマトリックスである。

温度勾配荷重

$$\mathbf{F}_i = \int_{A_e} \frac{t^3}{12} \mathbf{B}_{bi}^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{\Delta T_z}{2H_z} dA \quad (2.6.47)$$

ここで、 $\Delta T_z / H_z$ は温度勾配である。

(2) 質量

板要素の質量は、集中質量が考慮でき、 x, y, z 方向の並進変位のみを考慮する。集中質量は要素全体の質量($\rho t A_e$)を分布質量($\mathbf{M}_{ij} = \rho t \int_{A_e} N_i N_j dA$)の対角項の比率で分配して算定する。ここで、 N_i, N_j は形状関数、 ρt は単位体積質量×要素厚さである。

2.6.4 板の厚さ/材料

平面板要素の厚さは節点別に一定であると仮定する。一方、挙動は方向別に区分して面内挙動の厚さ、曲げ挙動の厚さに分類することができる。面内挙動の厚さを t とした場合、次のように設定できる。

➤ $12I/t^3$

実際の曲げ剛性 I と面内挙動の厚さで計算した曲げ剛性の比率
(default=1.0)

材料特性は、変形成分別に設定することができる。

2.6.5 出力データ

解析結果は、節点での応力、要素断面力を出力し、符号と方向は要素座標系に従う。要素座標系で出力された結果は、要素座標系または出力座標系に変換して出力することができる。応力は z 軸に沿って、厚さの上面と下面の 2 箇所計算される。ここで、上面、下面は面内挙動に対する厚さを基準に上端が $z = t/2$ で、下端が $z = -t/2$ となる。

板要素で出力される応力、要素断面力の種類は次の通りである。

応力成分 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$

主応力 P_1, P_2

$$P_i = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

ミーゼス応力 $\sqrt{(P_1^2 + P_2^2 - P_1 P_2)}$

平均主応力 $\frac{P_1 + P_2}{2}$

最大せん断応力 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

軸力 N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}

曲げモーメント M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}

せん断力 Q_{yz}, Q_{zx}

節点での応力、および要素断面力は積分点で計算された結果を用いて、外挿法 (Extrapolation)によって算出します。板要素の積分点は次のようになる。

3 節点の 3 角形要素： 3 つの積分点

4 節点の 4 角形要素： 4 つの積分点

応力に対する符号規約は平面応力要素と同様で、曲げモーメントとせん断力の方向の方向は図 2.6.1 の通りである。図 2.6.5 は断面力から面内成分だけを示していて、矢印方向が '+' 符号となる。

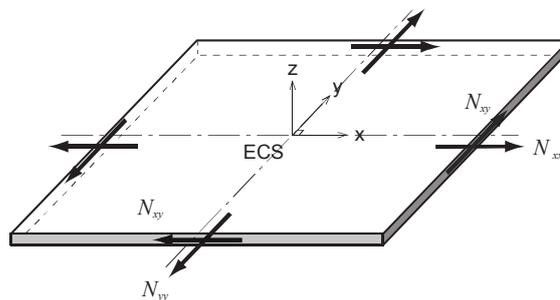


図 2.6.5 板要素の断面力の符号規約

2.6.6 積分点

2.5.5 節と同様である。

2.6.7 応力計算法(Extrapolation)

2.5.6 節と同様である。

2.7 平面ひずみ要素

2.7.1 概要

平面ひずみ要素は同一平面上に位置する 3、4 つの節点によって定義される 3 角形または 4 角形要素で、ダムまたはトンネルのように、一定の断面を維持しながら、奥行きが長い構造物の解析に利用する。要素は X-Z 平面上に位置するように入力して、要素の厚さは 1.0(単位幅)が自動設定される。要素の厚さ方向のひずみ成分は存在せず、厚さ方向の応力はポアソン効果によって存在する。平面ひずみ要素は、面内応力のみ考慮することができ、静的(線形/非線形)解析および動的解析に使用することができる。平面ひずみ要素の変形を定義する応力とひずみは次の通りである。

面内方向の応力とひずみ

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.7.1)$$

応力とひずみに対する符号規約は図 2.7.1 となり、矢印方向が '+' 符号となる。

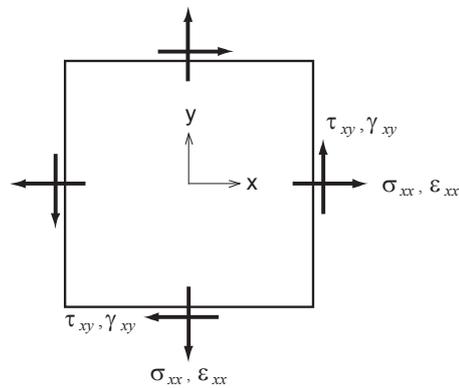


図 2.7.1 平面ひずみ要素の応力の符号規約

要素座標系は右手座標系に基づいた x, y, z 軸の直交座標系となり、方向は図 2.7.2 のように設定される。4 角形要素の場合、節点 1 と節点 4 の中央点から節点 2 と節点 3 の中央点へ向かう方向が x 軸方向となり、3 角形要素の場合は節点 1 から 2 に向かう方向が x 軸となる。

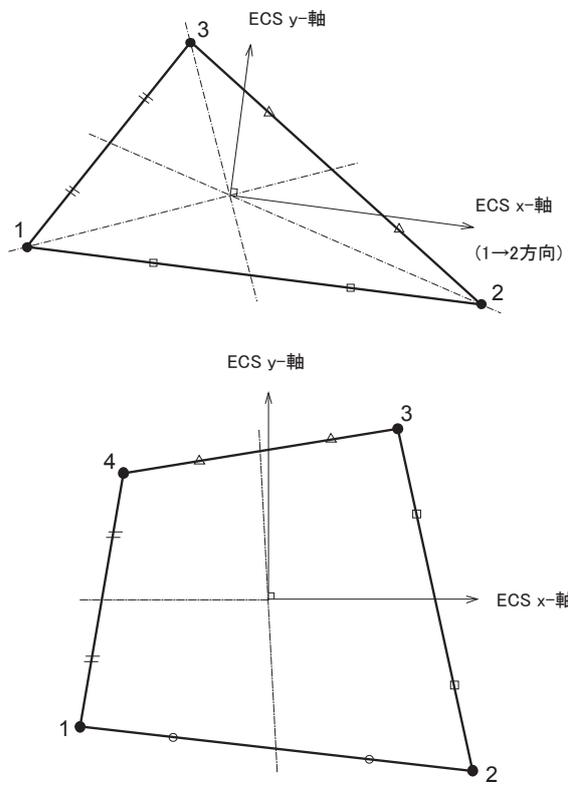


図 2.7.2 平面ひずみ要素の要素座標系

2.7.2 有限要素の定式化

平面ひずみ要素はアイソパラメトリック要素で構成されていて、4 節点の 4 角形要素の場合は非適合(Incompatible)モードを利用している。要素の定式化過程は平面応力要素と同じで、“2.5 平面応力要素”で説明している。

等方性(Isotropic)材料の場合、平面ひずみ要素の応力とひずみの関係は次の通りである。

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.7.2)$$

剛性と変形を計算する時に使用する変位はすべて面内で定義されるが、厚さ方向の応力は存在する。厚さ方向の応力は等方性材料の場合、次のように計算できる。

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.7.3)$$

2.7.3 荷重と質量

(1) 荷重

平面ひずみ要素に適用される荷重には、物体力、圧力、線圧、温度荷重などがある。物体力は、要素の自重や慣性力を表現する荷重である。圧力は、平面要素の面に作用する分布荷重で、線圧は圧力の一種で平面要素の辺に作用する分布荷重である。温度荷重には、節点温度、要素温度のように面内方向に作用する熱変形荷重がある。すべての荷重は平面応力要素と同様に計算される。

(2) 質量

平面ひずみ要素の質量は、集中質量が考慮でき、 x, y 方向の並進変位のみを考慮する。集中質量は、要素全体の質量($\rho t A_e$)を分布質量($\mathbf{M}_{ij} = \rho t \int_A N_i N_j dA$)の対角項の比率で分配して算定する。ここで、 N_i, N_j は形状関数、 ρt は単位体積質量×要素厚さである。

2.7.4 出力データ

解析結果として、節点での応力を出力する。平面ひずみ要素を利用した解析は全体座標系の $X-Y$ 、 $Y-Z$ 、 $X-Z$ 平面の中から 1 つの平面で行われるので、応力結果を全体座標系に出力する。全体座標系で出力された結果は要素座標系または出力座標系に変換して出力することができる。

以下は $X-Y$ 平面で解析を行った場合に出力される応力の種類である。

応力成分 $\sigma_{XX}, \sigma_{YY}, \sigma_{ZZ}, \tau_{XY}$

主応力 P_1, P_2, P_3

$$P_i = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{YY}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{YY}}{2}\right)^2 + \tau_{XY}^2} \text{ と } \sigma_{ZZ} \text{ の中から、}$$

大きい順に P_1, P_2, P_3

ミーゼス応力 $\sqrt{(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - P_1P_2 - P_2P_3 - P_3P_1)}$

平均主応力 $\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3}$

最大せん断応力 $\frac{\max(|P_1 - P_2|, |P_2 - P_3|, |P_3 - P_1|)}{2}$

節点での応力、要素断面力は積分点で計算された結果を利用して、外挿法 (Extrapolation) によって算出する。平面ひずみ要素の積分点は次のようになる。

3 節点の 3 角形要素： 1 つの積分点

4 節点の 4 角形要素： 4 つの積分点

応力に対する符号規約は図 2.7.3 となり、矢印方向が '+' 符号となる。

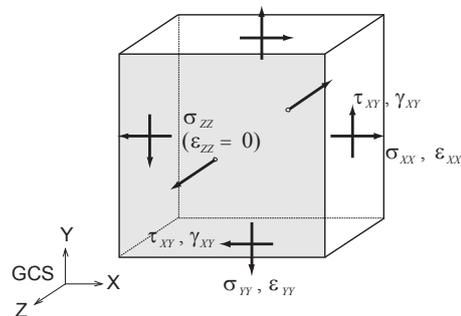


図 2.7.3 平面ひずみ要素の出力データの符号規約

2.7.5 積分点

(1) 3 節点の 3 角形要素

この要素は 1 ポイントのガウス積分を利用するので、積分に適用する積分点座標は、自然座標系(1/3, 1/3)となる。

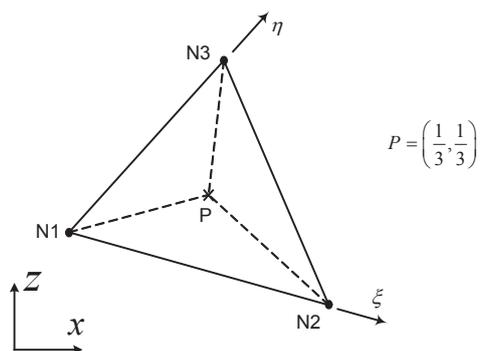


図 2.7.4 3 節点の平面要素の積分点位置

形状関数は $N_1 = 1 - \xi - \eta$ 、 $N_2 = \xi$ 、 $N_3 = \eta$ で、要素内任意の位置での座標値は形状関数を利用し、次のようになる。

$$x_p = \sum_{i=1}^N N_i x_i, \quad z_p = \sum_{i=1}^N N_i z_i \quad (2.7.4)$$

積分点座標は、 $\xi = 1/3$ 、 $\eta = 1/3$ を形状関数に代入すると、全体座標系で積分点座標を求めることができる。

$$x_p = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3) \quad (2.7.5)$$

$$z_p = \frac{1}{3} (z_1 + z_2 + z_3) \quad (2.7.6)$$

(2) 4 節点の 4 角形要素

この要素は 4 ポイントのガウス積分を利用する。積分点座標 P_i (自然座標系) は、次のようになる。

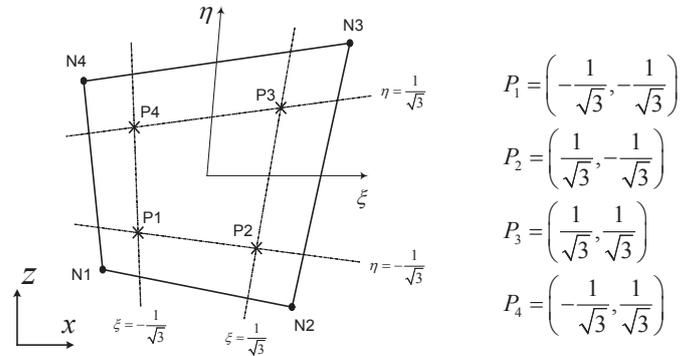


図 2.7.5 4 節点の平面変形要素の積分点位置

形状関数は、次のようになる。

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$
(2.7.7)

積分点座標 P_i を形状関数に代入すると、全体座標系で積分点の座標を求めることができる。例えば、積分点座標 P_1 に対応する全体座標系での x 座標を求めると、

$$x_{p1} = \sum_{i=1}^4 N_i x_i = \frac{1}{6} \left[(2+\sqrt{3})x_1 + x_2 + (2-\sqrt{3})x_3 + x_4 \right]$$
(2.7.8)

同様に各積分点に対する全体座標系での座標を求めると次のようになる。

$$x_p = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} & 1 \\ & 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} \\ & & 2+\sqrt{3} & 1 \\ \text{symmetry} & & & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$
(2.7.9)

2.7.6 応力計算法(Extrapolation)

3 節点の 3 角形要素の場合、1 ポイントのガウス積分を行う。したがって、全ての節点に対して積分点で計算された応力を適用する。

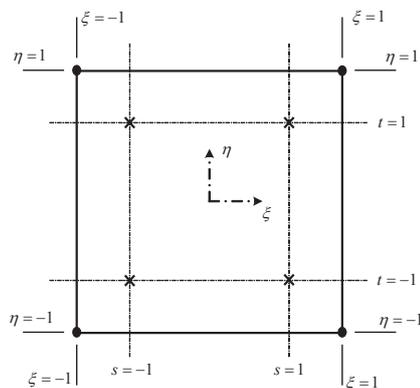


図 2.7.6 4 節点の平面応力要素の積分点周りでの応力外挿法

4 節点の 4 角形要素の場合、各積分点と要素座標系の座標節点との関係は次のようになる。

$$s = \xi\sqrt{3}, \quad t = \eta\sqrt{3} \quad (2.7.10)$$

要素内部の任意の点で応力は形状関数を利用して求めることができる。

$$\sigma_N = \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_i \quad (2.7.11)$$

例えば、節点 1 での応力に対して形状関数に ξ, η の代わりに s, t を代入し、整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_{N1} &= \sum_{i=1}^4 N_i \sigma_i = \frac{1}{4} \left[(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\sigma_1 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\sigma_2 \right. \\ &\quad \left. + (1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\sigma_3 + (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\sigma_4 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[(4+2\sqrt{3})\sigma_1 - 2\sigma_2 + (4-2\sqrt{3})\sigma_3 - 2\sigma_4 \right] \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

同様に各節点で応力を求めると、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{N1} \\ \sigma_{N2} \\ \sigma_{N3} \\ \sigma_{N4} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & -1 & 2-\sqrt{3} & -1 \\ & 2+\sqrt{3} & -1 & 2-\sqrt{3} \\ & & 2+\sqrt{3} & -1 \\ & & & 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \quad (2.7.13)$$

2.8 軸対称要素

2.8.1 概要

軸対称要素は形状、材料、荷重条件などが任意の軸に対して回転対称となる構造物（パイプ、タンク、圧力容器など）の解析に使う。軸対称要素は、静的（線形/非線形）解析で使用することができ、他の要素とは一緒に使うことができない。軸対称要素は構造物の軸対称的な特性を利用するため、円周方向のせん断変形は考慮しない。軸対称要素の変形を定義する応力とひずみは次の通りである。

面内方向の応力とひずみ、円周方向の垂直応力とひずみ

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.8.1)$$

応力とひずみの符号規約は図 2.8.1 のように定義され、矢印方向が‘+’符合となる。

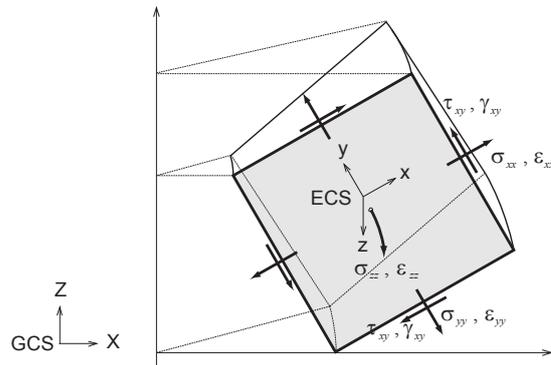


図 2.8.1 軸対称要素の応力の符号規約

要素座標系は右手座標系に基づいた x , y , z 軸の直交座標系となり、方向は図 1.7.2 のように設定される。4 角形要素の場合、節点 1 と節点 4 の中央点から節点 2 と節点 3 の中央点へ向かう方向が x 軸方向となり、3 角形要素の場合、節点 1 から 2 に向かう方向が x 軸方向となる。

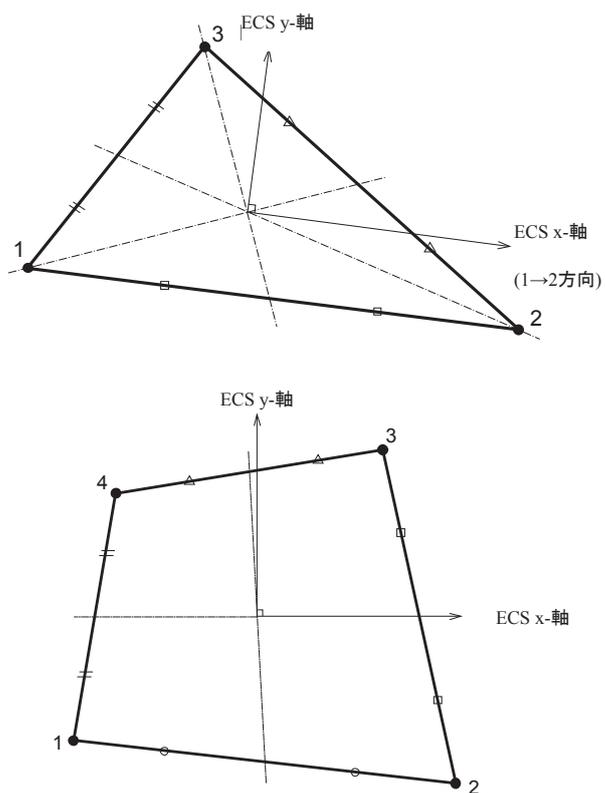


図 2.8.2 軸対称要素の要素座標系

プログラムでモデリング時は、全体座標系の Z 軸に対して対称となるように設定して、X-Z 平面上で解析する。要素の厚さは図 2.8.3 のように単位幅(1.0radian)が自動で考慮されて、円周方向に垂直応力と垂直ひずみが発生する。

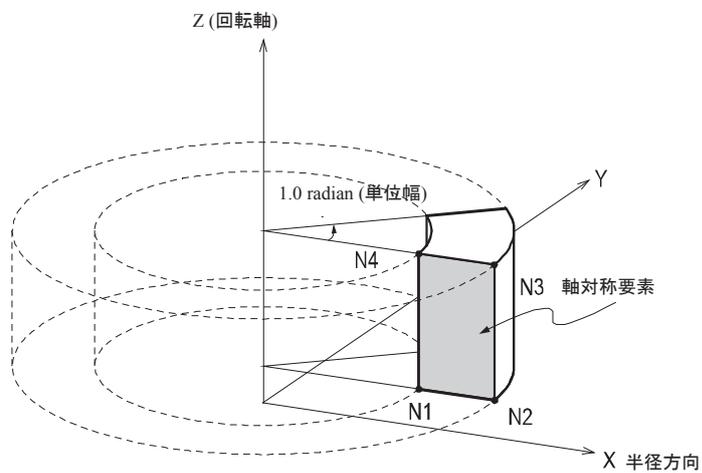


図 2.8.3 軸対称要素の単位幅

2.8.2 有限要素の定式化

軸対称要素はアイソパラメトリック要素で構成されていて、非適合モードは適用していない。また、変位としては要素座標系 x, y 方向に並進変位 u, v のみを考慮する。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i \quad v_i\}^T \quad (2.8.2)$$

要素内の任意の座標 x, y と並進変位 u, v は、次のように表すことができる。

$$x = \sum_{i=1}^N N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^N N_i y_i, \quad u = \sum_{i=1}^N N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^N N_i v_i \quad (2.8.3)$$

3 節点の 3 角形

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta \quad (2.8.4)$$

4 節点の 4 角形

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

節点変位とひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ の関係は、 \mathbf{B}_i を用いて、次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.8.6)$$

マトリックス \mathbf{B}_i は、形状関数の微分で次のようになる。

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \alpha \frac{N_i}{X} & \beta \frac{N_i}{X} \end{bmatrix} \quad (2.8.7)$$

ここで、 α は $\bar{x} \cdot \bar{X}$ 、 β は $\bar{y} \cdot \bar{X}$ である。

ここでは、要素座標系 x, y での半径として全体座標系の X を使用している。マトリックス \mathbf{B}_i を用いると、面内変形に関する要素の剛性マトリックスは次のように表すことができる。

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{A_e} X \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dA \quad (2.8.8)$$

軸対称要素の有効厚さは対称軸に対する円周方向の長さで、プログラムでは $1.0rad$ としている。等方性材料の場合、軸対称要素の応力とひずみ関係は次のようになる。

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2.8.9)$$

2.8.3 荷重

軸対称要素に適用できる荷重には、物体力、線圧、温度荷重などがある。物体力は、要素の自重や慣性力を表現する荷重である。線圧は圧力の一種で平面要素の辺に作用する分布荷重である。温度荷重には、節点温度、要素温度のような面内方向の熱荷重がある。軸対称要素で使用できる線圧は単位面積当たりの力を意味して、節点に入力された円周 ($2\pi r$) に対して積分された値と内部でみなすので、入力時に注意する必要がある。

物体力

$$\mathbf{F}_i = \int_{A_e} XN_i \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} dA \quad (2.8.10)$$

ここで、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は方向別の重量密度である。

線圧

$$\mathbf{F}_i = \int_L XN_i \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} ds \quad (2.8.11)$$

ここで、 P_x, P_y, P_z は方向別の線圧である。

温度荷重

$$\mathbf{F}_i = \int_{A_e} X\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T dA \quad (2.8.12)$$

ここで、 α_x, α_y は x, y 方向別の熱膨張係数である。

2.8.4 出力データ

解析結果としては、節点での応力を出力される。軸対称要素の解析は全体座標系 Z 軸に対する対称平面、すなわち $X-Z$ 平面上で解析を行う。したがって、応力結果は全体座標系を基準に出力される。全体座標系の結果は要素座標系または出力座標系に変換することができる。結果出力される応力は次の通りである。

応力成分 $\sigma_{XX}, \sigma_{YY}, \sigma_{ZZ}, \tau_{ZX}$

主応力 P_1, P_2, P_3

$$P_i = \frac{\sigma_{XX} + \sigma_{ZZ}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{XX} - \sigma_{ZZ}}{2}\right)^2 + \tau_{ZX}^2} \text{ と } \sigma_{YY} \text{ の中から、}$$

大きい順に P_1, P_2, P_3 となる。

ミーゼス応力 $\sqrt{(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - P_1P_2 - P_2P_3 - P_3P_1)}$

平均主応力 $\frac{P_1 + P_2 + P_3}{3}$

最大せん断応力 $\frac{\max(|P_1 - P_2|, |P_2 - P_3|, |P_3 - P_1|)}{2}$

節点での応力は要素内の積分点で計算された結果を用いて、外挿法(Extrapolation)によって算出する。軸対称要素の積分点は次のようになる。

3 節点の 3 角形要素: 1 つの積分点

4 節点の 4 角形要素: 4 つの積分点

応力に対する符号規約は図 2.8.4 となり、矢印方向が '+' 符号となる。

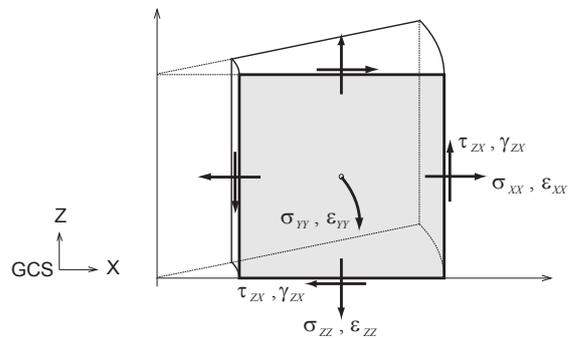


図 2.8.4 軸対称要素の出力データの符号規約

2.9 ソリッド要素

2.9.1 概要

ソリッド要素は主にコンクリート基礎、自動車エンジン、厚壁、ゴムなど、体積が大きい構造の解析に使用する。プログラムで使用できるソリッド要素には、6面体(Hexahedron)、4面体(Tetrahedron)、5面体(Pentahedron)要素があり、静的(線形/非線形)解析および動的解析に使用することができる。ソリッド要素の変形を定義する応力とひずみは次の通りである。

応力/ひずみ

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (2.9.1)$$

応力とひずみの符号規約は図 2.9.1 のように定義され、矢印方向が‘+’符号となる。

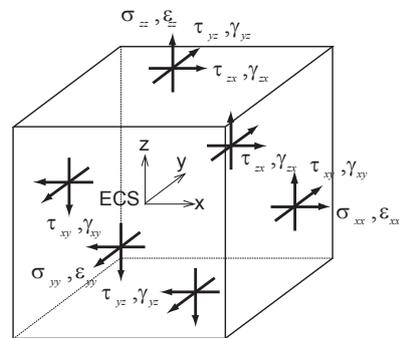


図 2.9.1 ソリッド要素の応力とひずみの符号規約

要素座標系は右手座標系に基づいた x , y , z 軸の直交座標系となり、方向は図 2.9.2 のように設定される。6 面体要素の場合、節点 1 と節点 4 の中央点から節点 2 と節点 3 の中央点へ向かう方向が x 軸方向となり、4 面体と 5 面体要素の場合は、節点 1 から 2 に向かう方向が x 軸となる。

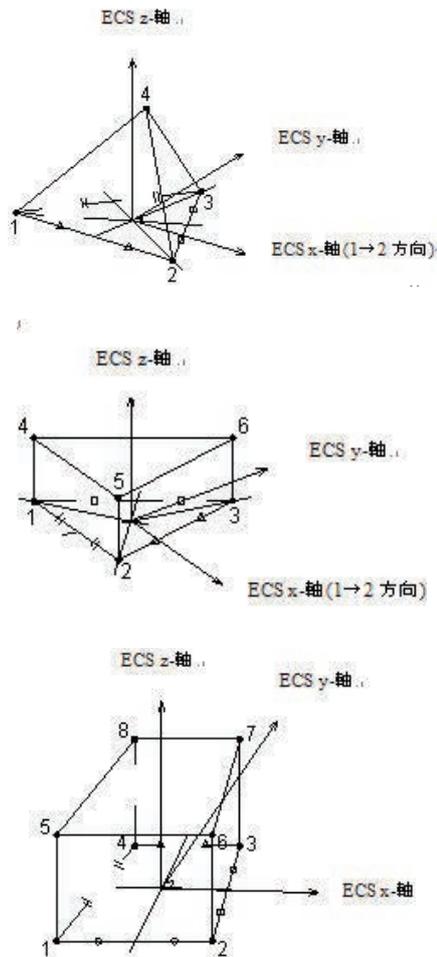


図 2.9.2 ソリッド要素の要素種類と要素座標系

2.9.2 有限要素の定式化

ソリッド要素はアイソパラメトリック要素であり、8 節点の 6 面体要素と 6 節点の 5 面体要素には非適合モードを適用している。ソリッド要素は要素座標系 x, y, z 方向の並進変位 u, v, w のみを考慮する。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i \quad v_i \quad w_i\}^T \quad (2.9.2)$$

要素内の任意の座標 x, y, z と並進変位 u, v, w は、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^N N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^N N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^N N_i z_i \\ u &= \sum_{i=1}^N N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^N N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^N N_i w_i \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

4 節点の 4 面体

$$N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta, \quad N_4 = \zeta \quad (2.9.4)$$

6 節点の 5 面体

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\lambda}{2}(1 - \zeta), \quad N_2 = \frac{\xi}{2}(1 - \zeta), \quad N_3 = \frac{\eta}{2}(1 - \zeta), \quad N_4 = \frac{\lambda}{2}(1 - \zeta) \\ N_5 &= \frac{\xi}{2}(1 + \zeta), \quad N_6 = \frac{\eta}{2}(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (2.9.5)$$

$$\lambda = 1 - \xi - \eta - \zeta$$

8 節点の 6 面体

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), \quad N_2 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), \quad N_4 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta), \quad N_6 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta), \quad N_8 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (2.9.6)$$

節点変位 u とひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ の関係は \mathbf{B}_i を用いて、次のように示すことができる。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (2.9.7)$$

マトリックス \mathbf{B}_i は形状関数の微分で次のようになる。

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.9.8)$$

マトリックス \mathbf{B}_i を用いて、面内変形に関する要素の剛性マトリックスを次のように表す。

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{V_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dV \quad (2.9.9)$$

ここで、 V_e は要素の体積、 \mathbf{D} は応力とひずみ関係のマトリックスである。

上記でマトリックス \mathbf{D} は等方性材料の場合に次のようになる。

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9.10)$$

ソリッド要素には材料座標系が設定でき、設定した材料座標系によって、マトリックス \mathbf{D} を座標変換して使うことができる。

線形解析の場合、6 節点の 5 面体要素と 8 節点の 6 面体要素には非適合モードを適用する。非適合モードを含む場合、自由度として節点変位以外に追加の自由度を持つようになる。非適合モードに関する詳細な内容は「2.5 平面応力要素」で記述している。ここでは非適合モードの形状と主なマトリックスについて示す。

6 節点の 5 面体

$$\mathbf{u}_a = \{a_1 \quad b_1 \quad c_1\}^T \quad (2.9.11)$$

$$u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i + a_1 P_1, \quad v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i + b_1 P_1, \quad w = \sum_{i=1}^6 N_i w_i + c_1 P_1 \quad (2.9.12)$$

$$P_1 = 1 - \zeta^2 \quad (2.9.13)$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial P_1}{\partial z} \\ \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_1}{\partial z} & \frac{\partial P_1}{\partial y} \\ \frac{\partial P_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial P_1}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.9.14)$$

8 節点の 6 面体

$$\mathbf{u}_a = \{a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad a_3 \quad b_3 \quad c_3\}^T \quad (2.9.15)$$

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3, \quad v = \sum_{i=1}^8 N_i v_i + b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3$$

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i w_i + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3 \quad (2.9.16)$$

$$P_1 = 1 - \xi^2, \quad P_2 = 1 - \eta^2, \quad P_3 = 1 - \zeta^2 \quad (2.9.17)$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial P_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial P_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial P_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial P_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial P_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial P_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial P_3}{\partial z} \\ \frac{\partial P_1}{\partial y} & \frac{\partial P_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial P_2}{\partial y} & \frac{\partial P_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial P_3}{\partial y} & \frac{\partial P_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_1}{\partial z} & \frac{\partial P_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial P_2}{\partial z} & \frac{\partial P_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial P_3}{\partial z} & \frac{\partial P_3}{\partial y} \\ \frac{\partial P_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial P_1}{\partial x} & \frac{\partial P_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial P_2}{\partial x} & \frac{\partial P_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial P_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.9.18)$$

2.9.3 荷重と質量

(1) 荷重

ソリッド要素に適用できる荷重には、物体力、圧力、温度荷重などがある。物体力は、要素の自重や慣性力を表現する荷重であり、圧力は平面要素の面に作用する分布荷重である。温度荷重には、節点温度、要素温度荷重がある。

物体力

$$\mathbf{F}_i = \int_{V_e} N_i \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} dV \quad (2.9.19)$$

ここで、 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は方向別の重量密度である。

圧力

$$\mathbf{F}_i = \int_{A_e} N_i \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} dA \quad (2.9.20)$$

ここで、 P_x, P_y, P_z は軸方向別の圧力である。

温度荷重

$$\mathbf{F}_i = \int_{V_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{Bmatrix} \Delta T dV \quad (2.9.21)$$

ここで、 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ は x, y, z 方向別の熱膨張係数である。

(2) 質量

ソリッド要素の質量は集中質量だけが考慮できて、 x, y, z の並進変位のみを考慮する。集中質量は、要素全体の質量(ρV_e)を分布質量($\mathbf{M}_{ij} = \rho \int_{V_e} N_i N_j dV$)の対角項の比率で分配して算定する。ここで、 N_i, N_j は形状関数、 ρ は単位体積質量である。

2.9.4 出力データ

解析結果は節点での応力があり、全体座標系を基準に出力される。全体座標系の結果は要素座標系または出力座標系に変換することができる。結果出力される応力は次の通りである。

$$\text{応力成分} \quad \sigma_{XX}, \sigma_{YY}, \sigma_{ZZ}, \tau_{XY}, \tau_{YZ}, \tau_{ZX}$$

$$\text{主応力} \quad P_1, P_2, P_3$$

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - P_i & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - P_i & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - P_i \end{bmatrix} = 0 \text{ の解の中から、大きい順に } P_1, P_2, P_3 \text{ となる。}$$

$$\text{ミーゼス応力} \quad \sqrt{(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - P_1P_2 - P_2P_3 - P_3P_1)}$$

$$\text{平均主応力} \quad \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3}$$

$$\text{最大せん断応力} \quad \frac{\max(|P_1 - P_2|, |P_2 - P_3|, |P_3 - P_1|)}{2}$$

$$\text{せん断成分} \quad \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$$

節点での応力は要素内の積分点で計算された結果を用いて、外挿法(Extrapolation)によって算出する。ソリッド要素の積分点は次のようになる。

- 4 節点の 4 面体要素 : 1 つの積分点
- 6 節点の 5 面体要素 : 6 つの積分点
- 8 節点の 6 面体要素 : 8 つの積分点

応力に対する符号規約は図 2.9.3 となり、矢印方向が '+' 符号となる。

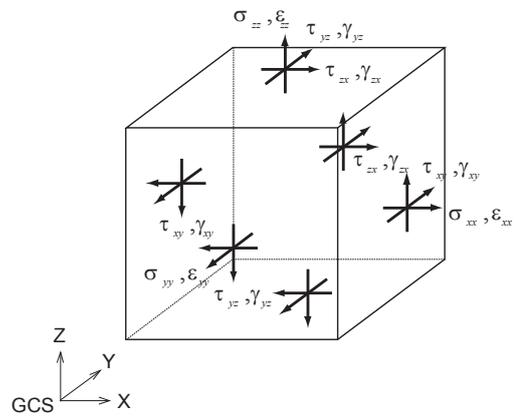


図 2.9.3 ソリッド要素の出カデータの符号規約

2.9.5 積分点

(1) 4 節点の 4 面体要素

この要素は 1 ポイントのガウス積分を利用するので、積分に適用する積分点座標は、自然座標系(1/4, 1/4, 1/4)(自然座標系)となる。

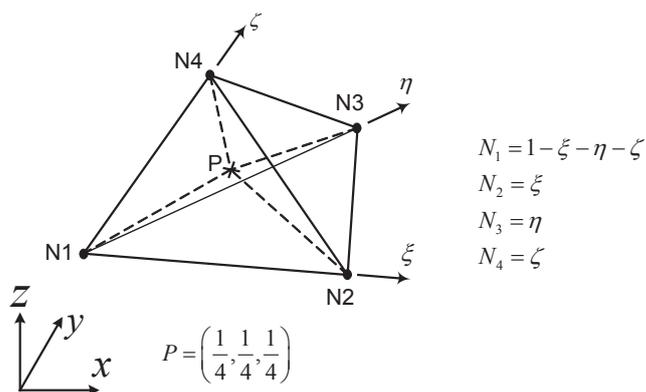


図 2.9.4 4 節点の 4 面体ソリッド要素と積分点

積分点座標 P を全体座標系に変換すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 x_p &= \sum_{i=1}^4 N_i x_i = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) x_1 + \frac{1}{4} x_2 + \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{4} x_4 \\
 &= \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)
 \end{aligned} \tag{2.9.22}$$

$$y_p = \sum_{i=1}^4 N_i y_i = \frac{1}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \tag{2.9.23}$$

(2) 6 節点の 5 面体要素

この要素は 6 ポイントのガウス積分を利用し、積分に適用する積分点座標 P_i は、自然座標系で次のようになる。

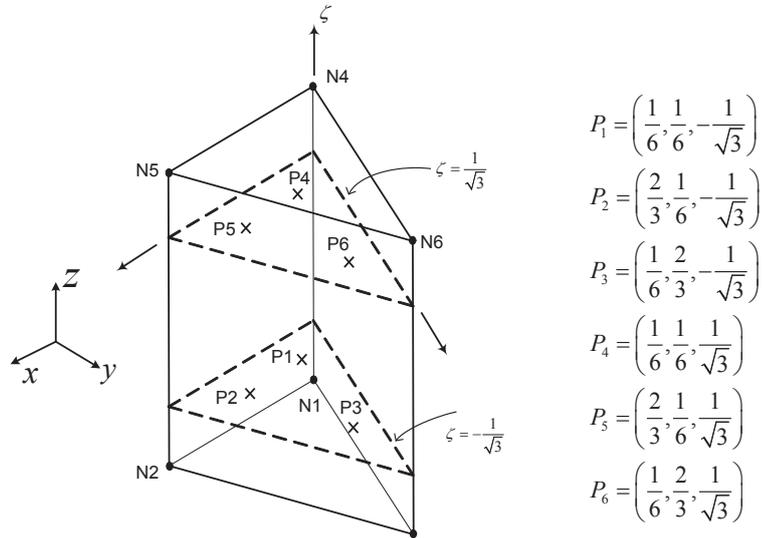


図 2.9.5 6 節点の 5 面体 ソリッド要素の積分点

形状関数は $N_1 = 1 - \xi - \eta$ 、 $N_2 = \xi$ 、 $N_3 = \eta$ で、要素内任意の位置での座標値は形状関数を利用し、次のようになる。

$$\lambda = 1 - \xi - \eta \quad (2.9.24)$$

$$N_1 = \frac{\lambda}{2}(1 - \zeta), \quad N_2 = \frac{\xi}{2}(1 - \zeta), \quad N_3 = \frac{\eta}{2}(1 - \zeta),$$

$$N_4 = \frac{\lambda}{2}(1 + \zeta), \quad N_5 = \frac{\xi}{2}(1 + \zeta), \quad N_6 = \frac{\eta}{2}(1 + \zeta) \quad (2.9.25)$$

積分点座標 P_i を全体座標系に変換すると、次のようになる。

$$x_{p1} = \sum_{i=1}^6 N_i x_i = \frac{1}{36} \left[(12 + 4\sqrt{3})x_1 + (3 + \sqrt{3})x_2 + (3 + \sqrt{3})x_3 \right. \\ \left. + (12 - 4\sqrt{3})x_4 + (3 - \sqrt{3})x_5 + (3 - \sqrt{3})x_6 \right] \quad (2.9.26)$$

同様に各積分点座標を全体座標系に変換すると、次のようになる。

$$x_p = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 12+4\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 12-4\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ & 12+4\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 12-4\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ & & 12+4\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 12-4\sqrt{3} \\ & & & 12+4\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \\ & & & & 12+4\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \\ \text{symmetry} & & & & & 12+4\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix}$$

(2.9.27)

(3) 8 節点の 6 面体要素

この要素は 8 ポイントのガウス積分を利用する。積分に適用する積分点座標 P_i (自然座標系) は次のようになる。

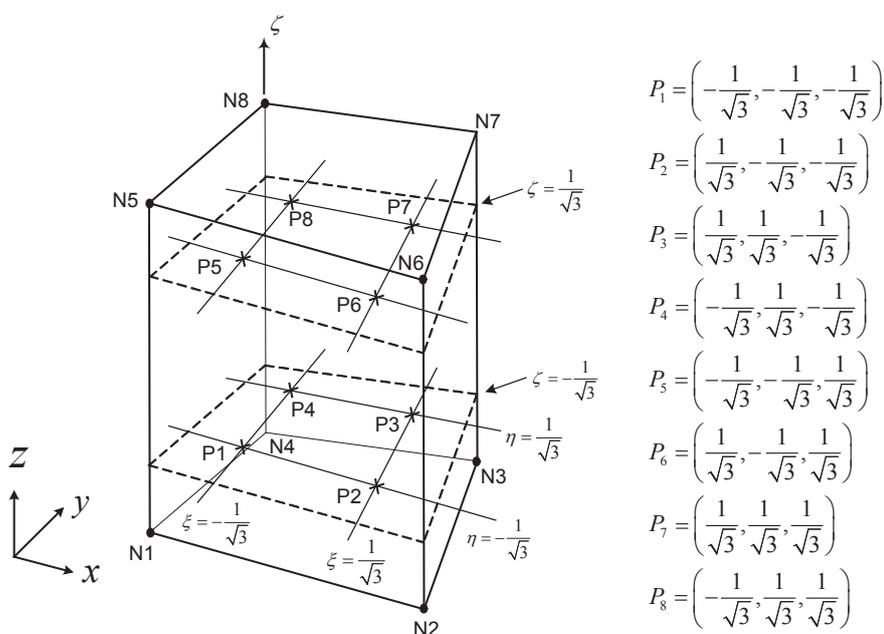


図 2.9.6 8 節点の 6 面体ソリッド要素の積分点

形状関数を次に示す。

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta), & N_2 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta), \\
N_3 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta), & N_4 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta), \\
N_5 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta), & N_6 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta), \\
N_7 &= \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta), & N_8 &= \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)
\end{aligned} \tag{2.9.28}$$

積分点座標 P_i を全体座標系に変換すると、

$$\begin{aligned}
x_{p1} = \sum_{i=1}^8 N_i x_i &= \frac{1}{36} \left[(9+5\sqrt{3})x_1 + (3+\sqrt{3})x_2 + (3-\sqrt{3})x_3 + (3+\sqrt{3})x_4 \right. \\
&\quad \left. + (3+\sqrt{3})x_5 + (3-\sqrt{3})x_6 + (9-5\sqrt{3})x_7 + (3-\sqrt{3})x_8 \right]
\end{aligned} \tag{2.9.29}$$

になる。同様に各積分点座標を全体座標系に変換すると、次のようになる。

$$x_p = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 9+5\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 9-5\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ & 9+5\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 9-5\sqrt{3} \\ & & 9+5\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 9-5\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \\ & & & 9+5\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 9-5\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \\ & & & & 9+5\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \\ & & & & & 9+5\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \\ & & & & & & 9+5\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} \\ \text{symmetry} & & & & & & & 9+5\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{Bmatrix} \tag{2.9.30}$$

2.9.6 応力計算法(Extrapolation)

4 節点の 4 面体要素の場合、1 ポイントのガウス積分を行うので、全ての節点に対して積分点で計算された応力を適用する。

6 節点の 5 面体要素の場合、各積分点と要素座標系の座標節点は、次のような関係になる。

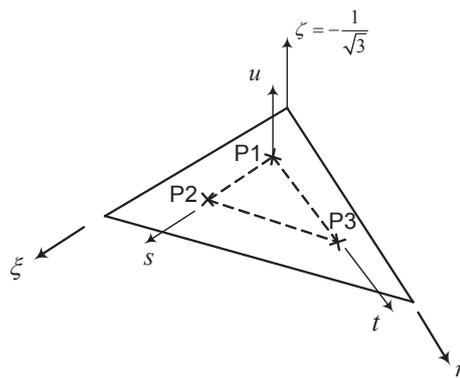


図 2.9.7 6 節点の 5 面体要素の積分点周りでの応力外挿法

6 節点の 5 面体要素の場合、各積分点と要素座標系の座標節点とは次のような関係になる。

$$\lambda = 2\left(1 - \xi - \eta - \frac{1}{6}\right), \quad s = 2\left(\xi - \frac{1}{6}\right), \quad t = 2\left(\eta - \frac{1}{6}\right), \quad u = \zeta\sqrt{3} \quad (2.9.31)$$

要素内部の任意点での応力は、形状関数を利用し求めることができる。

$$\sigma_N = \sum_{i=1}^6 N_i \sigma_i \quad (2.9.32)$$

例えば、節点 1 で応力を計算すると、

$$\sigma_{N1} = \sum_{i=1}^6 N_i \sigma_i = \frac{1}{6} \left[5(1 + \sqrt{3})\sigma_1 - (1 + \sqrt{3})\sigma_2 - (1 + \sqrt{3})\sigma_3 + 5(1 - \sqrt{3})\sigma_4 - (1 - \sqrt{3})\sigma_5 - (1 - \sqrt{3})\sigma_6 \right] \quad (2.9.33)$$

同じ方法で各節点応力を求めると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{N1} \\ \sigma_{N2} \\ \sigma_{N3} \\ \sigma_{N4} \\ \sigma_{N5} \\ \sigma_{N6} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5+5\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 5-5\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ & 5+5\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & 5-5\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ & & 5+5\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 5-5\sqrt{3} \\ & & & 5+5\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ & & & & 5+5\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ & & & & & 5+5\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.9.34)$$

8 節点の 6 面体要素の場合、各積分点と要素座標系の座標節点とは次のような関係になる。

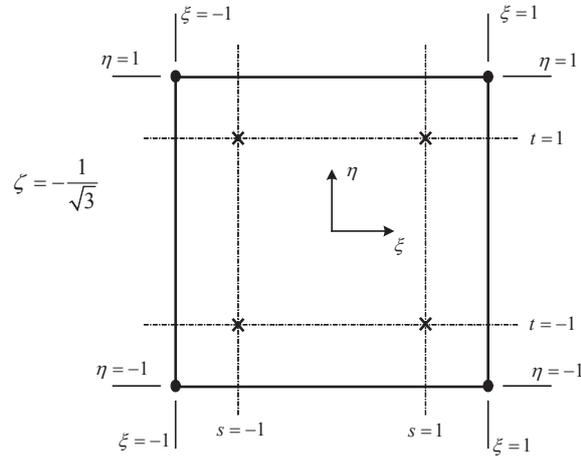


図 2.9.8 8 節点の 6 面体要素の積分点周りでの応力外挿法

$$s = \xi\sqrt{3} \quad , \quad t = \eta\sqrt{3} \quad , \quad u = \zeta\sqrt{3} \quad (2.9.35)$$

例えば、節点 1 での応力を形状関数を利用して求めると、

$$\begin{aligned}
 \sigma_{N1} &= \sum_{i=1}^8 N_i \sigma_i = \frac{1}{8} \left[(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\sigma_1 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\sigma_2 \right. \\
 &\quad + (1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\sigma_3 + (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})\sigma_4 \\
 &\quad + (1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\sigma_5 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\sigma_6 \\
 &\quad \left. + (1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\sigma_7 + (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\sigma_8 \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[(10+6\sqrt{3})\sigma_1 + (-2-2\sqrt{3})\sigma_2 + (-2+2\sqrt{3})\sigma_3 + (-2-2\sqrt{3})\sigma_4 \right. \\
 &\quad \left. + (-2-2\sqrt{3})\sigma_5 + (-2+2\sqrt{3})\sigma_6 + (10-6\sqrt{3})\sigma_7 + (-2+2\sqrt{3})\sigma_8 \right]
 \end{aligned} \tag{2.9.36}$$

同じ方法で各積分点を全体座標系に変換すると、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{N1} \\ \sigma_{N2} \\ \sigma_{N3} \\ \sigma_{N4} \\ \sigma_{N5} \\ \sigma_{N6} \\ \sigma_{N7} \\ \sigma_{N8} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5+3\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & 5-3\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ & 5+3\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & 5-3\sqrt{3} \\ & & 5+3\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 5-3\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ & & & 5+3\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & 5-3\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ & & & & 5+3\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ & & & & & 5+3\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ & & & & & & 5+3\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ & & & & & & & 5+3\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \sigma_7 \\ \sigma_8 \end{Bmatrix} \tag{2.9.37}$$

3. 要素入力時の主要な考慮事項

3.1 概要

数値解析モデルで言及したように、構造解析とは、構造物の挙動を分析するために、数値解析モデルを用いて予想される仮想的な状況に対して理論的なシミュレーションを行うことであり、実際の状況に対してどれくらい近接したモデルを作成できるかが、解析作業の優劣を左右する要因になる。

したがって、構造物の挙動を最も近接して反映できる有限要素の選択をはじめ、その入力過程がモデリングの全般にわたって、最も重要な事項といえる。

要素の選択に際しては、要素内力及び応力度の出力値を解析終了後に変換する必要なしに、設計に対してそのまま使用できるような要素を選択しておけば、より効果的である。

さらに、解析の目的が変位を求めることなのか、要素内力を求めることなのか、または固有値解析だけを行うことなのか等によって、要素の選択やモデリングの範囲、及び要素分割の程度が変わる。

つまり、変位を求めたり、固有値解析だけを行う場合には、モデルを単純化することが効果的となるが、要素内力を求めるような問題の場合には、一般的に要素を細分化することの方がより効果的となる。

例えば、構造物の全体的な挙動を把握する固有値解析の場合には、局部モードの発生を抑制するために、できるだけモデルを単純化の方が良い結果をもたらす。特に、土木、建築構造物の予備設計段階では、詳細モデルよりも、構造物の全体剛性を等価な梁要素に置換した単純モデルの方が効果的である。

数値解析モデルの入力時に考慮すべき事項は、次の通りである。

節点の位置を指定する時の主要な考慮事項は、構造物の幾何学的形状、材料、断面の種類、及び荷重状態を反映するのに必要な位置であり、次の通りである。

- 解析結果が必要となる位置
- 荷重の入力が必要となる位置
- 剛性(断面または厚さ)が切り替わる位置
- 材料が切り替わる位置
- 開口部周辺のように、応力度の変化が著しい位置
- 構造物の境界位置
- 構造物の幾何学的形状が変化する位置

解析結果に対して、線要素(トラス要素、梁要素、...等)の場合は、要素の大きさに影響を受けないが、板要素(平面応力要素、平面ひずみ要素、軸対称要素、板要素)またはソリッド要素の場合は、各要素の大きさ、形状、分割によって、大きな影響を受ける。

板要素またはソリッド要素の大きさと分割方法を決定する時は、予想される応力の分布を考慮して、応力の変化が著しい部分や厳密解が要求される部分に対しては要素を細分化し、応力度の等高線(Contour)に沿って分割することが望まれる。

一般的に要素の細分化が必要な部分は次の通りである。

- 幾何学的な不連続部分または開口部周辺
- 荷重の変化が著しい部分、及び相対的に大きな集中荷重が作用する位置の隣接部分
- 剛性または物性が変わる部分
- 不規則な境界部分
- 応力集中が予想される部分
- 精確な要素内力または応力度の結果が必要となる部分

要素の大きさ及び形状を決定する時に考慮すべき事項は次の通りである。

- 要素の大きさと形状は、できるかぎり一定にする。
- 要素の大きさを変化させる場合は、対数分割にする。
- 隣接要素に対する要素の大きさの差が $1/2$ 以下になるようにする。
- 4 節点要素(板要素)または 8 節点要素(ソリッド要素)を用いて応力度を求める場合には、要素の形状比は、 $1:1$ の場合が最適条件であり、やむを得ない場合にも $1:4$ を超えないようにする。また剛性の目的や、変位を求める場合には、 $1:10$ を超えないようにする。
- 理想的な要素の内部角度は、4 角形要素の場合が 90° で、3 角形要素の場合は 60° である。
- やむを得ない場合であっても、4 角形要素の内部角度は、できるかぎり 45° 以上かつ 135° 以下にし、3 角形要素の内部角度は、 30° 以上かつ 150° 以下にする。
- 4 角形要素の場合、各節点はできるかぎり同一平面上に位置するようにし、やむを得ない場合にも長辺に対する高低差が $1/100$ を超えないようにする。

3.2 トラス要素、引張専用要素、圧縮専用要素

この要素は、立体トラス、ケーブル、ブレース部材などのように、材軸方向のみの力を受ける部材や接触面のモデリングに使用する。

例えば、トラス要素は材軸方向に圧縮力及び引張力を受けるトラス構造のモデルに使用し、引張専用要素は、サグを無視できるケーブルまたはブレース部材で、その細長比が大きく、圧縮力をほとんど伝達できない耐風ブレースのような部材に使用する。

圧縮専用要素は、構造体間の接触面や引張力を受けることができない地盤境界条件などを考慮するのに応用できる。プレストレスを受ける場合には、初期荷重が利用する。

この要素は、回転剛性がなく、両端の構成節点において回転変位に対する自由度を持たないため、これらの要素またはその他の回転自由度がない要素に接合する節点では、解析過程で特異性エラー(Singular Error)が発生する。

プログラムでは、このような場合、該当節点の回転自由度を自動拘束させることによって、特異性エラーの発生を防ぐようにしている。

しかし、これらの要素が回転方向の剛性を有する梁要素と連結するときには、別途に特異性エラーを防止するための措置は必要ない。

図 3.2.1 のようにトラス要素を連結して用いる場合には、不安定構造とならないように注意しなければならない。

図 3.2.1(a)の場合は、水平方向に荷重が作用するとき、荷重を伝達できる回転剛性が存在しないため、不安定構造になる。図 3.2.1(b), (c)の場合は、Y-Z 平面に対しては安定構造になっているが、荷重の作用方向である X-Z 平面内の挙動に対しては、不安定構造になる。

圧縮専用要素や引張専用要素を使用する場合には、荷重の大きさによっては要素の剛性が発現しない可能性もあるため、(例:引張専用要素が圧縮力を受ける場合)注意する必要がある。

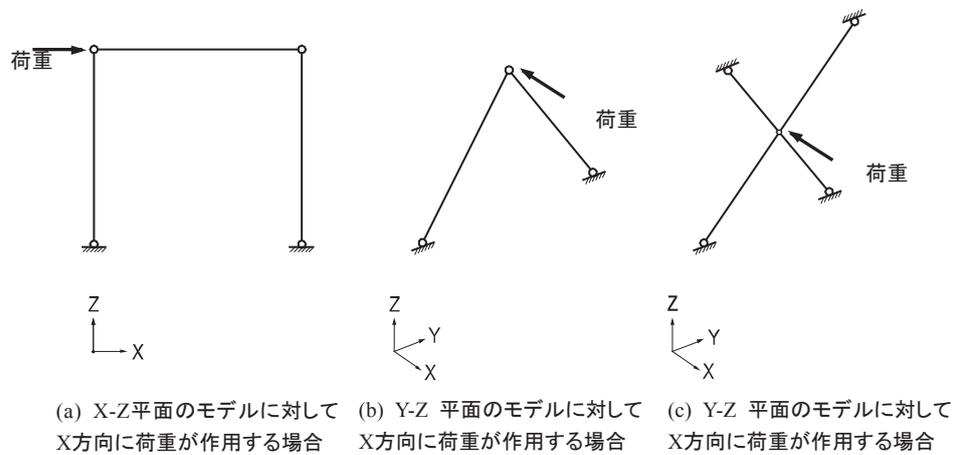


図 3.2.1 トラス要素(引張または圧縮専用要素)で構成された代表的な不安定構造体の例

3.3 梁要素

断面のサイズに比べて、長さが長い等断面の骨組部材やテーパード断面部材 (Tapered Member) のモデリングや、及び互い異なる節点自由度を持つ要素間を連結するときの荷重伝達用の要素として主に使用する。

梁要素に載荷できる荷重の種類は、骨組部材に作用する中間集中荷重、分布荷重、温度勾配荷重などであり、さらにプレストレスが考慮できる。

梁要素は、引張、圧縮、せん断、曲げ及びねじれに対する剛性を有するため、各節点当たり 6 個の自由度を持つ。また、せん断変形を無視する場合は、断面性能の入力時にせん断断面積を入力しない。

梁要素の定式化は、チモシェンコ梁理論(中立軸に対して垂直な断面は変形後に平面を保持するが、中立軸に対して垂直である必要はない)によるものであり、梁のせん断変形が考慮できる。ただし、長さに対して断面せいの比が、1/5 よりも大きくなる場合には、せん断変形による影響が大きくなるため、板要素を用いて、適切なメッシュ (Fine Meshes) が形成されるように、モデリングすることが望まれる。

梁要素の断面性能の中で、ねじれ剛性 (Torsional Resistance) は、断面極 2 次モーメント (Polar Moment of Inertia) ではなく (円型またはパイプ型の断面の場合は同一)、実験的な方法によって定式化されたものであるため、ねじれ変形の影響が大きい場合には注意する必要がある。

🔊 プログラムの"数値解析モデル>要素の剛性データ"を参照

梁要素(またはトラス要素)は、線要素 (Line Element) として理想化されているため、断面方向の大きさが小さいものとして仮定している。つまり、断面性能が両節点間を連結する中立軸に集中しているものとして見なされるため、部材間のパネルゾーン(柱と梁部材の接合部)効果や中立軸の不一致に伴う影響は考慮しない。したがって、パネルゾーン効果や中立軸の不一致に伴う効果を考慮する場合には、剛域長さ (Beam End Offset) を用いたり、幾何学的な拘束条件を用いてモデリングする必要がある。

🔊 プログラムの"数値解析モデル>境界条件>剛域長さ"を参照

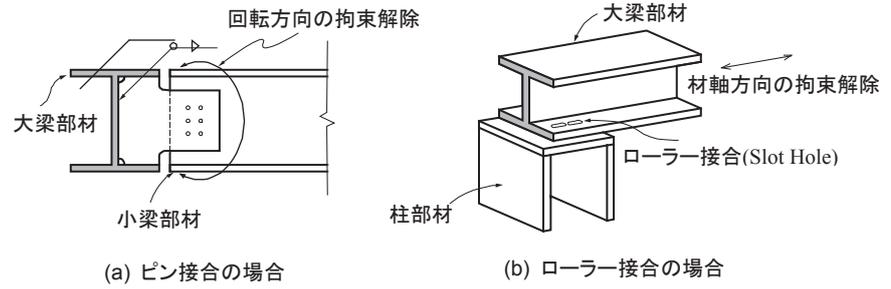
部材の断面が非均一断面 (Non-prismatic Section) の場合には、テーパード断面を用います。曲がり梁の場合には、適切に分割してモデリングすることが望まれる。

🔊 On-line Manual の"モデル>材料&断面>断面"を参照

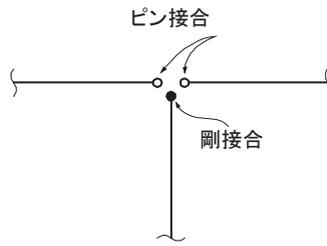
梁要素の両端部をピン接合 (Pin Connection) またはローラー接合 (Slot Hole) 等によって連結する場合には、梁要素の端部拘束解除条件 (Beam End Release) を用いて、モデルに反映する。

🔊 On-line Manual の"モデル>梁要素>端部拘束解除条件"を参照

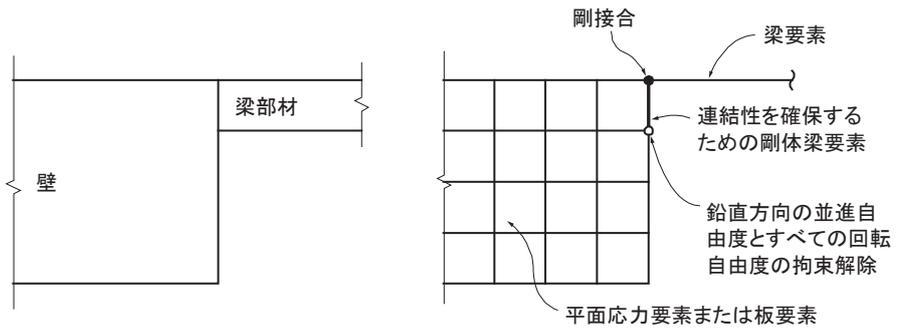
この時、1つの節点の任意自由度に対して、端部拘束解除条件を重複して与えた場合には、特異性エラーが発生する可能性がある。やむを得ない場合には、該当自由度の方向に微小量のバネ要素(または弾性連結要素)を追加する必要がある。



複数の梁要素が1つの節点にピン接合される場合に特異性エラーを避けるため、1つの要素の端部には端部拘束解除条件を与えずに、残りの要素のみに端部拘束解除条件 (End-release) を与える。



(c) 複数の梁要素が、1つの節点にピン接合される場合



(d) 節点の自由度が互い異なる要素で連結される場合

図 3.3.1 端部拘束解除条件 (End-release) の適用例

剛体梁要素の入力は、該当要素の弾性係数を相対的に大きくすることより可能で、一般的には計算エラーを考慮して、隣接した要素の弾性係数に比べて、約 $10^5 \sim 10^8$ 倍程度の値を用いる。

図 3.3.1(d)で、壁と梁部材が連結する場合に、壁を平面応力要素または板要素でモデリングし、梁部材を梁要素で入力した時、平面応力要素(または板要素、ソリッド要素)は、節点において回転剛性を持たないため、梁要素を連結しても梁要素の回転自由度に対する連結性が確保されず、ピン接合したことと同じ結果になる。したがって、連結性を確保するために剛体梁要素を使用する。その時の剛体梁要素に対する材端条件は、梁要素と連結する端部に対しては、拘束解除条件を与えず、他端に対してのみ、回転自由度と軸方向に対する変位自由度を解除する方法を採りする。

3.4 平面応力要素

引張または圧縮を受ける平板構造のように面内方向の荷重だけを伝達できる構造物の部材に使用する。

平面応力要素は、各辺の垂直方向に圧力荷重を受けることができる。

平面応力要素は、4 角形または 3 角形要素として、面内方向の引張、圧縮、及びせん断剛性を持つ。

要素の特性上、4 角形要素(4 節点要素)は、変位及び応力度に対して精度の良い結果をもたらす。一方、3 角形要素(3 節点要素)の場合は、変位に対しては比較的精度の良い結果をもたらしますが、応力度に対しては、若干、精度が落ちる傾向がある。したがって、厳密な解析結果が必要な部位では、なるべく 3 角形要素の使用を避け、主に要素の大きさを変化させてメッシュ分割をするときに、大きさの異なる 4 角形要素間を補間するような場合に使用されることを推奨する。(図 3.4.1 参照)

平面応力要素は、回転剛性がなく、構成節点において回転変位に対する自由度がないために、他の回転自由度がない要素と連結する節点では、解析過程で特異性エラーが発生する。

プログラムでは、このような場合に、該当節点の回転自由度を自動拘束させることによって特異性エラーの発生を防止している。

また、回転剛性を有する梁要素や板要素などと連結するときは、剛体連結条件(代表節点、従属節点の機能)を用いたり、剛体梁要素などを用いて、要素間の曲げ剛性に対する連続性を保持することが望まれる。

要素の適正な形状比(Aspect Ratio)は、要素タイプ、幾何学的形状、構造形状等によって異なる。しかし、一般的には要素形状比は、できるかぎり 1.0 に近くなるようにし、4 角形要素の場合は、各節点における内部角度が 90° になるようにすることが望まれる。

やむを得ず、そのような条件にモデリングすることが困難な場合であっても、応力度の変化が大きい部分や厳密解が要求される部分だけでも、できるかぎり正方形になるようにメッシュ分割することを推奨する。

また、要素の大きさが相対的に小さくなるほど解の収束性が良くなる。

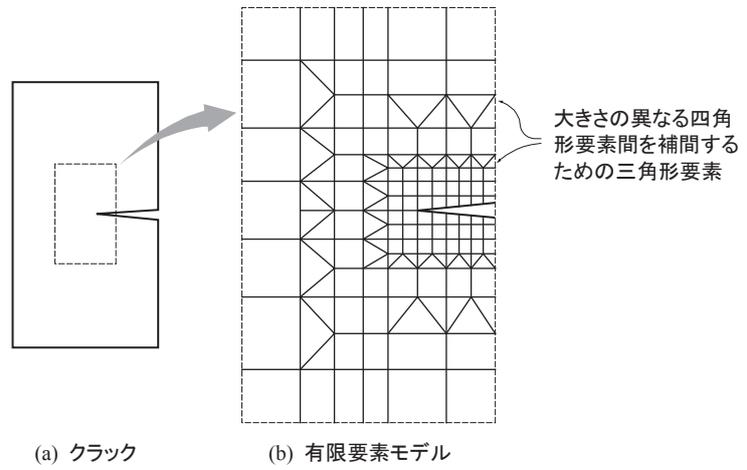


図 3.4.1 クラックを持つ板のモデルに対して 3 角形/4 角形要素を用いた例

3.5 平面ひずみ要素

平面ひずみ要素は、ダム(Dam)またはトンネル(Tunnel)などのように、一定の断面を持ちながら、長さが長い構造物の解析に使用し、他の要素タイプとの混用はできない。

平面ひずみ要素は、各辺の垂直方向に圧力荷重を受けることができる。

この要素は線形静的解析に対してのみ使用することができます。また、面内方向のみにひずみが生じると仮定しているため、厚さ方向のひずみは存在しない。ただし、厚さ方向の応力度成分は、ポアソン効果(Poisson Effect)により存在すると仮定している。

平面ひずみ要素は 4 角形または 3 角形要素として、面内方向の引張、圧縮、及びせん断剛性、さらに厚さ方向の引張と圧縮剛性を持つ。

平面ひずみ要素は、平面応力要素と同様に、3 角形要素よりも 4 角形要素を用いる方が好ましく、要素の形状比もできるかぎり 1.0 となるようにすることが望まれる。

🔊 プログラムの"数値解析モデル>要素タイプと主要考慮事項>平面応力要素"を参照

3.6 軸対称要素

軸対称要素は、形状、材料、荷重条件等が、任意軸に対して回転対称となる構造体(パイプ、タンク、圧力容器等)の解析に使用し、他の要素タイプとの混用はできない。

軸対称要素は、各辺の垂直方向に圧力荷重を受けることができる。

この要素は線形静的解析に対してのみ使用することができます。また、構造物の軸対称性を基にしているため、円周方向に対する変位、せん断ひずみ、及びせん断応力度はゼロと仮定している。

🔊 プログラムの"数値解析モデル>要素タイプと主要考慮事項>平面応力要素"を参照

軸対称要素は、平面応力要素と同様に、3 角形要素よりも 4 角形要素を用いる方が好ましく、要素の形状比もできるかぎり 1.0 となるようにすることが望まれる。🔊

3.7 板要素

面内方向の荷重、及び面外方向の曲げを受ける圧力容器、擁壁、橋梁のデッキ、建物の床、及び基礎スラブなどのモデリングに使用する。

板要素は、全体座標系または要素座標系を基準にして、要素面上に対する任意方向の圧力荷重を受けることができる。

板要素は 4 角形または 3 角形要素として、面内方向の圧縮、引張、及びせん断剛性、さらに面外方向の曲げ剛性とせん断剛性を持つ。

プログラムで使用する板要素には、DKT, DKQ 要素(Discrete Kirchhoff Element)と DKMT, DKMQ 要素(Discrete Kirchhoff-Mindlin Element)の2つがある。DKT, DKQ 要素の場合は、薄板理論(Kirchhoff Plate Theory)によって定式化されたものである。

一方、DKMT, DKMQ 要素は、厚板理論(Mindlin-Reissner Plate Theory)によって定式化されたもので、適切なせん断ひずみを仮定することによって薄板から厚板までに対して優秀な性能を示す要素である。板要素の面内剛性は、3 角形要素の場合は、LST(Linear Strain Triangle)理論を使用し、4 角形要素の場合には、非適合モードを有するアイソパラメトリック要素として定式化(Isoparametric Plane Stress Formulation with Incompatible Modes)される。

板要素の厚さの入力は、面内剛性(In-plane Stiffness)、及び面外剛性(Out-of-Plane Stiffness)をそれぞれ別途に入力できる。自重や質量の計算には、面内剛性用に入力した厚さが使用されますが、面外剛性用の厚さだけしか入力されていない場合には、その厚さが使用される。

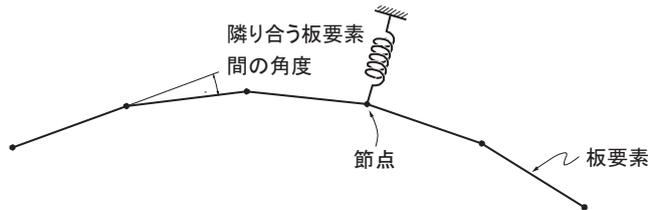


図 3.7.1 球形または円筒形のモデルに使われた板要素の例

板要素も平面応力要素と同様に、できるかぎり 4 角形要素を使用することが望まれる。また、板要素でシェル構造(曲率を有する板)をモデリングするときには、隣り合った要素間の角度が 10° を超えないようにし、さらに厳密解が要求される部分では、 $2\sim 3^\circ$ を超えないようにすることを推奨する。

応力度の変化が大きい部分や厳密解が要求される部分に対しては、できるかぎり正方形に近い 4 節点要素でメッシュ分割することを推奨する。

3.8 ソリッド要素

ソリッド構造物のモデリングに使用し、三角錐、三角柱、及び六面体等の立体形状を持つ。

要素の各面の垂直方向、及び全体座標系 X, Y, Z 方向に圧力荷重を入力できる。

要素の特性上、六面体要素(8 節点要素)は、変位及び応力度に対して精度の良い結果をもたらす。一方、三角錐要素(4 節点要素)と三角柱要素(6 節点要素)の場合は、変位に対しては比較的精度の良い結果をもたらしますが、応力度に対しては、若干、精度が落ちる傾向がある。

したがって、厳密な解析結果が必要な部位ではなるべくその使用を避け、主に要素の大きさを変化させてメッシュ分割するときに、大きさの異なる六面体要素間を補間するような場合に使用されることを推奨する。

ソリッド要素は、回転剛性がなく、構成節点において回転変位に対する自由度がないため、他の回転自由度がない要素と連結する節点では、解析過程で特異性エラーが発生する。プログラムでは、このような場合に、該当節点の回転自由度を自動拘束させることによって特異性エラーの発生を防止している。

要素の適正な形状比(Aspect Ratio)は、要素タイプ、幾何学的形状、構造形状等によって異なる。しかし、一般的には要素形状比は、できるかぎり 1.0 に近くなるようにし、六面体要素の場合は、頂角が 90° になるようにすることが望まれる。やむを得ず、そのような条件にモデリングすることが困難な場合であっても、応力度の変化が大きい部分や厳密解が要求される部位だけでも、できるかぎり正六面体になるようにメッシュ分割することを推奨する。

また、要素の大きさが相対的に小さくなるほど解の収束性が良くなる。

3-9 直交異方性材料

物体の物理的性質が方向に左右されない場合を等方性材料(Isotropic)といい、方向によって性質が異なる場合を異方性材料(Anisotropic)という。異方性の中で互いに直交する三つの面に対して対称の性質を持つと直交異方性材料(Orthotropic)という。例えば、繊維補強されたプラスチック(FRP)のような複合材料は直交異方性材料である。

直交異方性材料は互いに直交する三つの面に対する弾性係数と線膨脹係数、そして直交する三つの面に対するせん断弾性係数とポアソン比を持つ。物性値としては該当材料の実験値又はメーカーで提供する値を使用する。

直交異方性材料の使用時の主要な考慮事項は以下の通りである。

- 材料の方向は要素座標系を基準とする。したがって、要素座標系と直交異方性材料の方向が一致するようにモデル化する必要がある。
- 適用する弾性係数の成分は要素の種類別に以下ようになる。
 - 1 次元要素 (トラス、梁) : 要素座標系-x
 - 2 次元要素 (板、平面) : 要素座標系-x、要素座標系-y
 - 3 次元要素(ソリッド) : 要素座標系-x、要素座標系-y、要素座標系-z
- 異方性材料に入力する弾性係数とポアソン比は以下の条件を満足しなければならない。

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}, \quad \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z}$$

直交異方性材料は主に以下の場合に使用する。

- 鉄筋の配筋で要素の要素座標系-x と要素座標系-y の剛性が異なる壁
- 補強板などで要素の要素座標系-x と要素座標系-y の剛性が異なる床版

4. 要素の剛性データ

4.1 概要

要素の剛性を計算するには、材料データと断面(または厚さ)データを使用する。
材料データは材料を通して入力し、断面データは断面または厚さを通して入力する。
各要素タイプに必要なコマンドは、表 4.1.1.の通りである。

表 4.1.1 要素タイプ別の要素剛性データのコマンド

要素タイプ	材料データ	断面または厚さデータ	備考
トラス要素	材料	断面	④ ¹
引張専用要素	材料	断面	④ ¹
圧縮専用要素	材料	断面	④ ¹
梁要素	材料	断面	④ ²
平面応力要素	材料	厚さ	④ ³
板要素	材料	厚さ	④ ³
平面ひずみ要素	材料	-	④ ⁴
軸対称要素	材料	-	④ ⁴
ソリッド要素	材料	-	④ ⁵

- ④¹ トラス要素の解析には、断面積だけで十分ですが、設計作業及び部材形状をモデル画面上に表示するために、断面形状を入力する必要がある。
- ④² 梁要素が SRC 柱として使用する場合、鉄骨とコンクリートの合成による等価剛性は、プログラム内部で自動計算される。
- ④³ 板要素の場合は、厚さのみを入力する。
- ④⁴ 平面ひずみ要素と軸対称要素の場合は、それぞれ単位幅(1.0)及び単位角度(1.0 ラジアン)の厚さが、プログラム内部で自動的に与えられるため、別途に断面データを入力する必要はない。
- ④⁵ ソリッド要素は、要素を構成する各節点の座標から要素の大きさが定まるため、別途に断面データを入力する必要はない。

線要素の断面性能に対する指定及び計算方法は、次の通りである。

線要素(トラス要素、梁要素、...等)の断面性能を直接計算して入力するときには、それぞれの断面性能が構造的な挙動に及ぼす影響を十分に把握して入力する必要がある。

また、部材の腐食や摩耗などによる部材断面の欠損がある場合には、これらを反映して断面性能を計算する必要がある。

プログラムでは、以下の3つの方法を用いて、断面性能が入力できるようになっている。

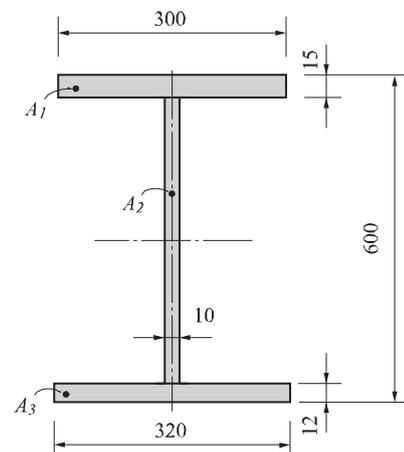
1. 断面の主要サイズだけを入力して、midas Civil の内部で自動計算する方法
2. すべての断面性能をユーザーが直接計算して入力する方法
3. JIS,AISC,KS の規格に登録されている断面を鋼材リストから選択して入力する方法

等断面(Prismatic Section)、テーパード断面(Tapered Section)、組立断面(Combined Section)及び SRC 断面の場合には、断面データをそれぞれ固有の断面番号を用いて入力できるが、合成断面(Construction Section)の場合には、あらかじめ入力された2つの断面データを用いて入力する。合成断面は、鉄骨とコンクリートの合成断面として構成され、構造物の施工プロセス(コンクリートの打設及び養生)によって、断面性能が変化する場合に使用する。

4.2 断面積 (Area : Cross Sectional Area)

断面積(Cross Sectional Area)は、部材が軸力(Axial Force)を受ける場合、これに抵抗する軸剛性(Axial Stiffness)の計算、及び部材に発生した応力度を計算するのに使用し、その計算方法は図 4.2.1 の通りである。

プログラムの内部で、断面積を計算したりデータベースから入力される場合には、接合部のボルト穴またはリベット穴などによる断面積の欠損は考慮しないため、必要な場合には、前述した方法 2.を用いて、ユーザーの判断により適宜に補正した断面積を入力する。



$$\begin{aligned}
 Area &= \int dA = A_1 + A_2 + A_3 \\
 &= (300 \times 15) + (573 \times 10) + (320 \times 12) = 14070
 \end{aligned}$$

図 4.2.1 断面積の計算例

4.3 有効せん断面積(A_{sy} , A_{sz} : Effective Shear Area)

せん断変形用の有効せん断面積(Effective Shear Area)は、部材断面の要素座標系 y 軸または z 軸方向に作用するせん断力(Shear Force)に抵抗するせん断剛性(Shear Stiffness)の計算に使用する。

もし、有効せん断面積が入力されなかった場合には、該当方向のせん断変形が無視される。

プログラム内部で断面性能を自動計算したり、データベースから入力した場合には、せん断変形用の有効せん断面積が自動計算され、その計算方法は図 4.3.1 のようになる。

A_{sy} : 要素座標系 y 軸方向に作用するせん断力に対する有効せん断面積

A_{sz} : 要素座標系 z 軸方向に作用するせん断力に対する有効せん断面積

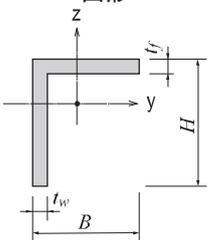
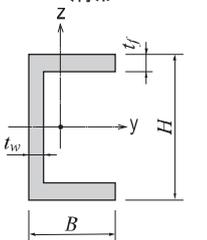
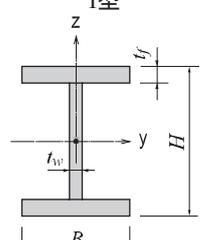
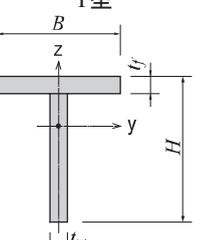
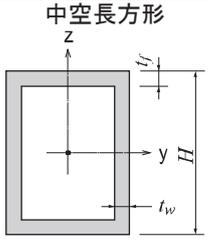
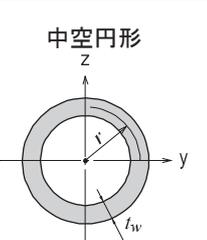
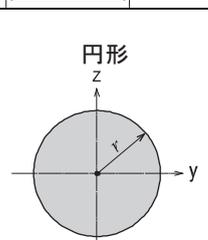
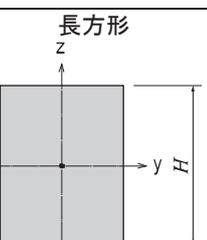
断面形状	有効せん断面積	断面形状	有効せん断面積
山形 	$A_{sy} = \frac{5}{6} B \times t_f$ $A_{sz} = \frac{5}{6} H \times t_w$	溝形 	$A_{sy} = \frac{5}{6} (2 \times B \times t_f)$ $A_{sz} = H \times t_w$
I型 	$A_{sy} = \frac{5}{6} (2 \times B \times t_f)$ $A_{sz} = H \times t_w$	T型 	$A_{sy} = \frac{5}{6} B \times t_f$ $A_{sz} = H \times t_w$
中空長方形 	$A_{sy} = 2 \times B \times t_f$ $A_{sz} = 2 \times H \times t_w$	中空円形 	$A_{sy} = \pi \times r \times t_f$ $A_{sz} = \pi \times r \times t_w$
円形 	$A_{sy} = 0.9\pi r^2$ $A_{sz} = 0.9\pi r^2$	長方形 	$A_{sy} = \frac{5}{6} BH$ $A_{sz} = \frac{5}{6} BH$

図 4.3.1 各断面の有効せん断面積

4.4 ねじれ剛性 (I_{xx} : Torsional Resistance)

ねじれ剛性は、ねじれモーメントに抵抗する剛性で、次のように定義される。

$$I_{xx} = \frac{T}{\theta} \quad (4.4.1)$$

ここで、

I_{xx} : ねじれ剛性(Torsional Resistance)

T : ねじれモーメント(Torsional Moment or Torque)

θ : ねじれ角度(Angle of Twist)

ねじれ剛性は、上式によって定義されたねじれに対して抵抗する剛性であり、ねじれによるせん断応力度を求める断面極2次モーメント(Polar Moment of Inertia)とは異なる。(ただし、円形断面または厚肉円筒断面の場合には、ねじれ剛性と断面極2次モーメントは同じである。)

断面形状が開断面(Open Section)なのか、閉断面(Closed Section)なのかによって、ねじれ剛性の計算方法が異なる。また、断面が厚肉なのか薄肉なのかによっても、計算方法が異なるため、あらゆる種類の断面に共通して適用できる一般式はない。

開断面のねじれ剛性の計算は、開断面を長方形断面に分割して下式を用いて計算し、その値を総和することによって近似的に求めることができる。

$$I_{xx} = \sum i_{xx}$$

$$i_{xx} = ab^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right] \quad \text{ただし、} a > b \quad (4.4.2)$$

ここで、

i_{xx} : 分割断面(長方形)のねじれ剛性

$2a$: 分割断面の長辺の長さ

$2b$: 分割断面の短辺の長さ

また、薄肉閉断面に対するねじれ剛性の計算式は次の通りである。(図 4.4.1 参照)

$$I_{xx} = \frac{4A}{\oint d_s t} \quad (4.4.3)$$

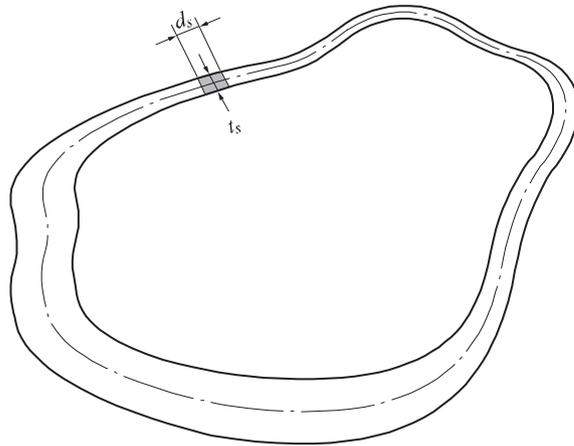
ここで、

A : 断面積

d_s : 任意位置における中立線の微小長さ

t : 任意位置における厚さ

また、橋梁の箱型断面のように、厚肉閉断面に対するねじれ剛性は、上記の式(4.3.1)と式 (4.4.3)の和から求めることができる。



$$\text{ねじり剛性: } I_{xx} = \frac{4A^2}{\int d_s/t_s}$$

$$\text{任意位置におけるせん断応力度: } \tau_T = \frac{T}{2At_s}$$

t_s : 任意位置における厚肉閉断面の厚さ

図 4.4.1 厚肉閉断面のねじれ剛性及びせん断応力度

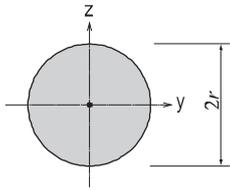
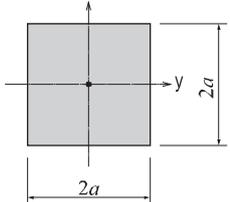
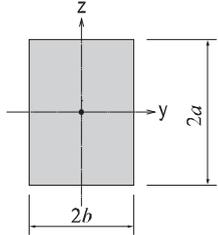
断面形状	ねじり剛性	断面形状	ねじり剛性
	$I_{xx} = \frac{1}{2} \pi r^4$		$I_{xx} = 2.25a^4$
	$I_{xx} = ab^3 \left[\frac{16}{3} - 3.36 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$ <p>(ただし、$a \geq b$)</p>		

図 4.4.2 ソリッド断面のねじり剛性

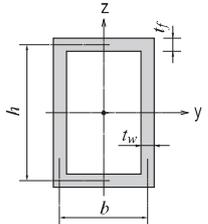
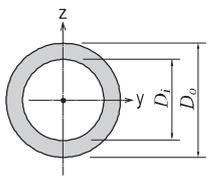
断面形状	ねじり剛性	断面形状	ねじり剛性
	$I_{xx} = \frac{2(b \times h)^2}{\left(\frac{b}{t_f} + \frac{h}{t_w} \right)}$		$I_{xx} = \frac{1}{2} \pi \left[\left(\frac{D_o}{2} \right)^4 - \left(\frac{D_i}{2} \right)^4 \right]$

図 4.4.3 厚さが薄肉い閉鎖型断面のねじり剛性

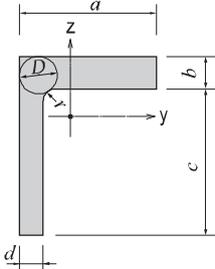
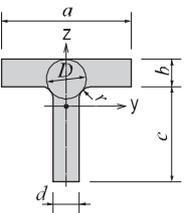
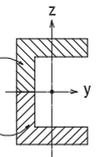
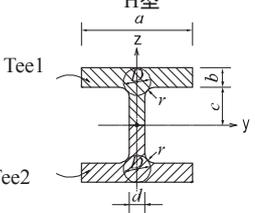
断面形状	ねじり剛性
<p>山形</p> 	$I_{xx} = I_1 + I_2 + \alpha D^4$ $I_1 = ab^3 \left[\frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$ $I_2 = cd^3 \left[\frac{1}{3} - 0.105 \frac{d}{c} \left(1 - \frac{d^4}{192c^4} \right) \right]$ $\alpha = \frac{d}{b} \left(0.07 + 0.076 \frac{r}{b} \right)$ $D = 2 \left[d + b + 3r - \sqrt{2(2r+b)(2r+d)} \right]$ <p>(ただし、$b < 2(d+r)$)</p>
<p>T型</p>  <p>IF $b < d : t = b, t_1 = d$ IF $b > d : t = d, t_1 = b$</p>	$I_{xx} = I_1 + I_2 + \alpha D^4$ $I_1 = ab^3 \left[\frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$ $I_2 = cd^3 \left[\frac{1}{3} - 0.105 \frac{d}{c} \left(1 - \frac{d^4}{192c^4} \right) \right]$ $\alpha = \frac{t}{t_1} \left(0.15 + 0.10 \frac{r}{b} \right)$ $D = 2 \frac{(b+r)^2 + rd + \frac{d^2}{4}}{(2r+b)}$ <p>(ただし、$b < 2(d+r)$)</p>
<p>溝形</p> 	<p>2つの Angle 断面で分割し、各 Angle 断面に対するねじり剛性を組み合わせる。</p>
<p>H型</p>  <p>IF $b < d : t = b, t_1 = d$ IF $b > d : t = d, t_1 = b$</p>	$I_{xx} = 2I_1 + I_2 + 2\alpha D^4$ $I_1 = ad^3 \left[\frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b^4}{12a^4} \right) \right]$ $I_2 = \frac{1}{3} cd^3$ $\alpha = \frac{t}{t_1} \left(0.15 - 0.10 \frac{r}{b} \right)$ $D = \frac{(b+r)^2 + rd + \frac{d^2}{4}}{(2r+b)}$ <p>(ただし、$d < 2(d+r)$)</p>

図 4.4.4 厚肉開断面のねじり剛性

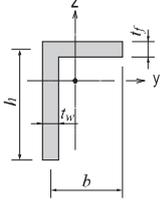
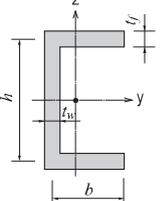
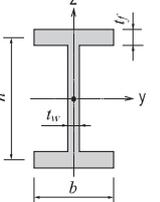
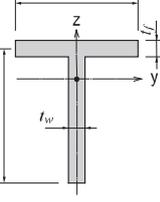
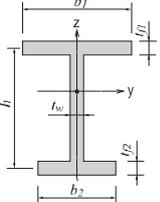
断面形状	ねじり剛性
<p>山形</p> 	$I_{xx} = \frac{1}{3}(h \times t_w^3 + b \times t_f^3)$
<p>溝形</p> 	$I_{xx} = \frac{1}{3}(h \times t_w^3 + 2 \sim b \times t_f^3)$
<p>I形</p> 	$I_{xx} = \frac{1}{3}(h \times t_w^3 + 2 \times b \times t_f^3)$
<p>T型</p> 	$I_{xx} = \frac{1}{3}(h \times t_w^3 + b \times t_f^3)$
<p>H形</p> 	$I_{xx} = \frac{1}{3}(h \times t_w^3 + b_1 \times t_{f1}^3 + b_2 \times t_{f2}^3)$

図 4.4.5 薄肉開断面のねじり剛性

2 つ以上の形鋼を組合わせて1つの断面にすると、場合によっては閉断面と開断面の両方が存在することがある。このような場合のねじれ剛性の計算は、閉断面部分と開断面部分に分けて計算した後、それぞれの値の和をとる。

例えば、ダブル H 断面(Double H-Section)の場合、図 4.4.6 (a)のように断面の中央には閉断面が形成され、フランジ両端は開断面になる。

— 閉断面の部分(ハッチングされた部分)のねじれ剛性

$$I_c = \frac{2(b_1 \times h_1)^2}{\left(\frac{b_1}{t_f} + \frac{h_1}{t_w}\right)} \quad (4.4.4)$$

— 開断面の部分(フランジの突出した部分)のねじれ剛性

$$I_o = 2 \left[\frac{1}{3} (2b - b_1 - t_w) \times t_w^3 \right] \quad (4.4.5)$$

— 全断面に対するねじれ剛性

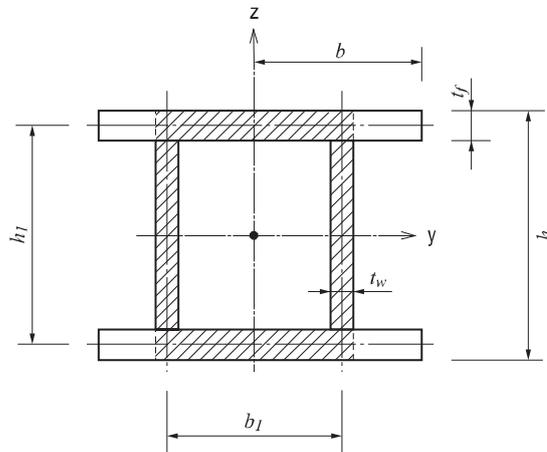
$$I_{xx} = I_c + I_o \quad (4.4.6)$$

H 型断面を 2 枚のプレートで補強する場合、図 4.4.6(b)のように閉断面が 2 つ存在し、このときのねじれ剛性は次のように計算する。

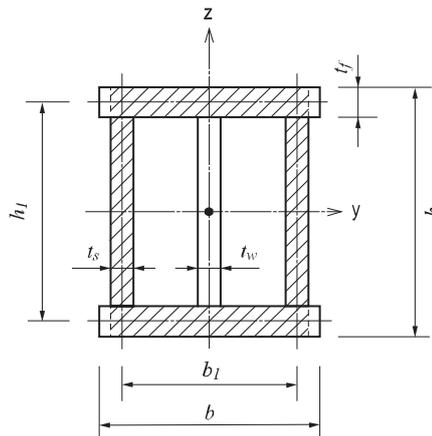
フランジ両端の開断面の部分に対するねじれ剛性が、全断面のねじれ剛性に対して無視できる程小さな値の場合には、H 型断面の上下フランジと 2 枚の補強プレートによって形成される外周の閉断面に対して、下式のようにねじれ剛性を計算する。

$$I_c = \frac{2(b_1 \times h_1)^2}{\left(\frac{b_1}{t_f} + \frac{h_1}{t_s}\right)} \quad (4.4.7)$$

また、全断面を構成する断面要素の中で、開断面としてのねじれ剛性が無視できない場合には、開断面に対するねじれ剛性を計算して加える。



(a) 閉断面と開断面が共に存在する場合



(b) 閉断面が2つ以上存在する場合

図 4.4.6 2つ以上の形鋼を組合わせた断面のねじれ剛性

4.5 断面 2 次モーメント (I_{yy} , I_{zz} : Area Moment of Inertia)

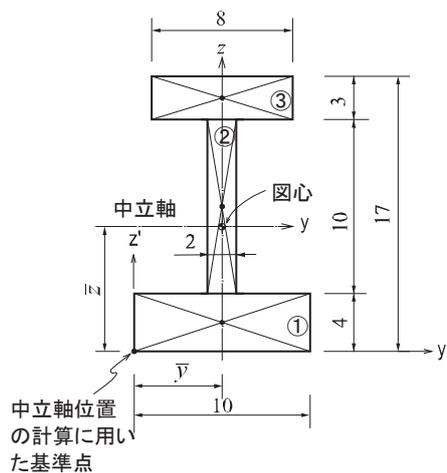
断面2次モーメント(Area Moment of Inertia)は、曲げモーメント(Bending Moment)に抵抗する剛性(Flexural Stiffness)を計算するのに使用し、該当断面の中立軸に対して、次式のように計算する。

要素座標系 y 軸に対する断面2次モーメント

$$I_{yy} = \int z^2 dA \quad (4.5.1)$$

要素座標系 z 軸に対する断面2次モーメント

$$I_{zz} = \int y^2 dA \quad (4.5.2)$$



断面要素	b	h	A_i	\bar{z}_i	Q_{yi}	\bar{y}_i	Q_{zi}
①	10	4	40	2	80	5	200
②	2	10	20	9	180	5	100
③	8	3	24	15.5	372	5	120
Total	-	-	84	-	632	-	420

A_i : 面積

\bar{z}_i : 基準点から図心までの z 軸方向の距離

\bar{y}_i : 基準点から図心までの y 軸方向の距離

Q_{yi} : y 軸に対する断面 1 次モーメント

Q_{zi} : z 軸に対する断面 1 次モーメント

➤ 中立軸位置の計算 (\bar{z} 、 \bar{y})

$$\bar{Z} = \frac{\int \bar{z} dA}{Area} = \frac{Q_z}{Area} = \frac{632}{84} = 7.5238, \quad \bar{Y} = \frac{\int \bar{y} dA}{Area} = \frac{Q_y}{Area} = \frac{420}{84} = 5.0000$$

➤ 断面2次モーメントの計算 (I_{yy} , I_{zz})

断面要素	A_i	$\bar{Z} - \bar{z}_i$	I_{y1}	I_{y2}	I_{yy}	$\bar{Y} - \bar{y}_i$	I_{z1}	I_{z2}	I_{zz}
①	40	5.5328	1224.5	53.3	1277.8	0	0	333.3	333.3
②	20	1.4672	43.1	166.7	209.8	0	0	6.7	6.7
③	24	7.9762	1526.9	18.0	1544.9	0	0	128.0	128.0
<i>Total</i>			2794.5	238.0	3032.5		0	468.0	468.0

$$I_{y1} = A_i \times (\bar{Z} - \bar{z}_i)^2, \quad I_{y2} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{yy} = I_{y1} + I_{y2}$$

$$I_{z1} = A_i \times (\bar{Y} - \bar{y}_i)^2, \quad I_{z2} = \frac{bh^3}{12}, \quad I_{zz} = I_{z1} + I_{z2}$$

図 4.5.1 断面2次モーメントの計算例

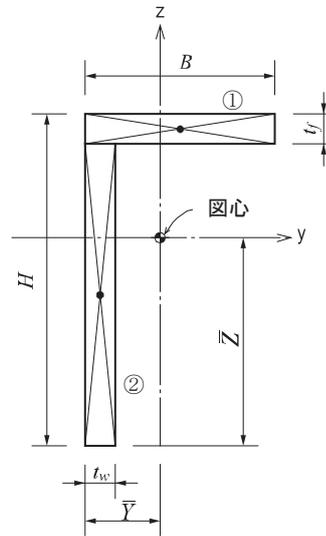
4.6 断面相乗モーメント(I_{yz} :Area Product Moment of Inertia)

断面相乗モーメント(Area Product Moment of Inertia)は、主に非対称断面の応力度分布を計算するのに使用し、次のように定義される。

$$I_{yz} = \int y \cdot z dA \quad (4.6.1)$$

H型、円筒型、箱型、溝形、及びT型断面のように、要素座標系 y 軸または z 軸に対して対称であるため $I_{yz}=0$ となる。一方、山形断面のように、要素座標系 y, z 軸の両軸に対して非対称であるため $I_{yz} \neq 0$ となり、応力度分布の計算において I_{yz} の値を考慮する必要があることを意味する。

山形断面の断面相乗モーメントの計算方法は、図 4.6.1 の通りである。



断面要素	A_i	e_{yi}	e_{zi}
①	$B \times t_f$	$B/2 - \bar{Y}$	$(H - t_f/2) - \bar{Z}$
②	$(H - t_f) \times t_w$	$t_w/2 - \bar{Y}$	$(H - t_f/2) - \bar{Z}$

$$\begin{aligned}
 I_{yz} &= \sum A_i \times e_{yi} \times e_{zi} \\
 &= (B \times t_f) \times (B/2 - \bar{Y}) \times \{(H - t_f/2) - \bar{Z}\} \\
 &\quad + \{(H - t_f) \times t_w\} \times (t_w/2 - \bar{Y}) \times \{(H - t_f/2) - \bar{Z}\}
 \end{aligned}$$

図 4.6.1 山形断面の断面相乗モーメントの計算

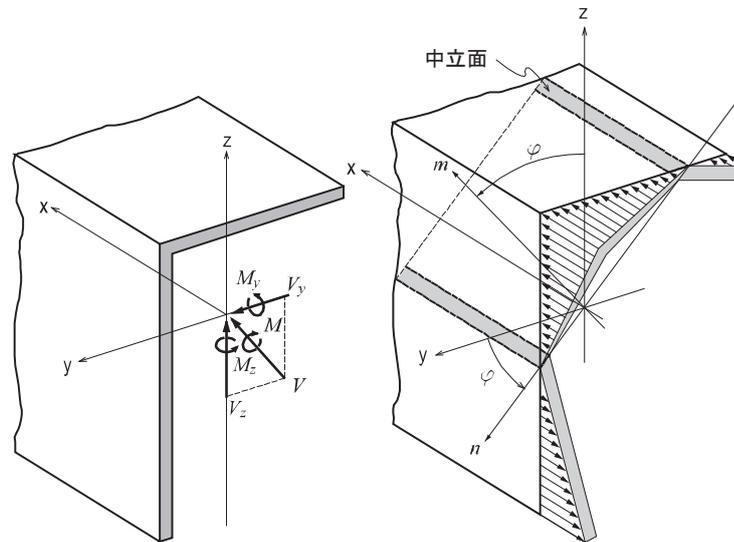


図 4.6.2 非対称断面の曲げ応力度の分布図

中立軸(Neutral Axis)は、曲げモーメントによる部材内の曲げ応力度がゼロとなる点を結ぶ軸のことを差す。図 4.6.2 の右側の図において n-軸が中立軸になる。m-軸は、n-軸に対して垂直な軸である。

中立軸では、曲げモーメントによる応力度がゼロになるため、次の方程式から中立軸の方向を求めることができる。

$$(M_y \times I_{zz} + M_z \times I_{yz}) \times z - (M_z \times I_{yy} + M_y \times I_{yz}) \times y = 0$$

$$\tan \phi = \frac{y}{z} = \frac{(M_y \times I_{zz} + M_z \times I_{yz})}{(M_z \times I_{yy} + M_y \times I_{yz})} \quad (4.6.2)$$

曲げモーメントによる断面の応力度を計算するための一般式は次の通りである。

$$f_b = \frac{M_y - M_z \left(\frac{I_{yz}}{I_{zz}} \right)}{I_{yy} - \left(\frac{I_{yz}^2}{I_{zz}} \right)} \cdot z + \frac{M_z - M_y \left(\frac{I_{yz}}{I_{yy}} \right)}{I_{zz} - \left(\frac{I_{yz}^2}{I_{yy}} \right)} \cdot y \quad (4.6.3)$$

もし、H 型断面の場合には、 $I_{yz} = 0$ となるので

$$f_b = \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot z + \frac{M_z}{I_{zz}} \cdot y = f_{by} + f_{bz} \quad (4.6.4)$$

ここで、

I_{yy} : 要素座標系 y 軸に対する断面2次モーメント

I_{zz} : 要素座標系 z 軸に対する断面2次モーメント

I_{yz} : 断面相乗モーメント

y : 断面の中立軸から曲げ応力度を計算する位置までの要素座標系 y 軸方向距離

z : 断面の中立軸から曲げ応力度を計算する位置までの要素座標系 z 軸方向距離

M_y : 要素座標系 y 軸回りの曲げモーメント

M_z : 要素座標系 z 軸回りの曲げモーメント

要素座標系 y 軸及び z 軸方向に作用するせん断力に対する応力度を計算するための一般式は次の通りである。

$$\begin{aligned}\tau_y &= \frac{V_y}{b_y \times (I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2)} \times (I_{yy} \cdot Q_z - I_{yz} \cdot Q_y) \\ &= \left(\frac{I_{yy} \cdot Q_z - I_{yz} \cdot Q_y}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \right) \times \left(\frac{V_y}{b_y} \right)\end{aligned}\quad (4.6.5)$$

$$\begin{aligned}\tau_z &= \frac{V_z}{b_z \times (I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2)} \times (I_{zz} \cdot Q_y - I_{yz} \cdot Q_z) \\ &= \left(\frac{I_{zz} \cdot Q_y - I_{yz} \cdot Q_z}{I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{yz}^2} \right) \times \left(\frac{V_z}{b_z} \right)\end{aligned}\quad (4.6.6)$$

ここで、

V_y : 要素座標系 y 軸方向に作用するせん断力

V_z : 要素座標系 z 軸方向に作用するせん断力

Q_y : 要素座標系 y 軸に対する断面1次モーメント

Q_z : 要素座標系 z 軸に対する断面1次モーメント

b_y : せん断応力度を計算する位置での要素座標系 y 軸方向の断面幅

b_z : せん断応力度を計算する位置での要素座標系 z 軸方向の断面幅

4.7 断面 1 次モーメント (Q_y, Q_z : First Moment of Area)

断面 1 次モーメント(First Moment of Area)は、断面の任意位置でのせん断応力度を計算するのに使用し、次のように計算する。

$$Q_y = \int z dA \quad (4.7.1)$$

$$Q_z = \int y dA \quad (4.7.2)$$

断面が y 軸または z 軸に対して対称である場合、任意位置でのせん断応力度は次のように計算する。

$$\tau_y = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_{zz} \cdot b_z} \quad (4.7.3)$$

$$\tau_z = \frac{V_z \cdot Q_y}{I_{yy} \cdot b_y} \quad (4.7.4)$$

ここで、

V_y : 要素座標系 y 軸方向に作用するせん断力

V_z : 要素座標系 z 軸方向に作用するせん断力

I_{yy} : 要素座標系 y 軸に対する断面 2 次モーメント

I_{zz} : 要素座標系 z 軸に対する断面 2 次モーメント

b_y : せん断応力度を計算する位置での要素座標系 y 軸方向の断面幅

b_z : せん断応力度を計算する位置での要素座標系 z 軸方向の断面幅

4.8 せん断係数(Q_{yb} , Q_{zb} : Shear Factors of Shear Stress due to Bending)

せん断係数は、せん断力によるせん断応力度を計算するのに使用し、部材断面においてせん断応力度を計算する位置に対する断面 1 次モーメントを計算位置での断面幅で除した値である。

$$\tau_y = \frac{V_z \cdot Q_z}{I_{zz} \cdot b_z} = \frac{V_z}{I_{zz}} \left(\frac{Q_z}{b_z} \right) = \frac{V_z}{I_{zz}} Q_{zb}, \quad Q_{zb} = \frac{Q_z}{b_z} \quad (4.8.1)$$

$$\tau_z = \frac{V_y \cdot Q_y}{I_{yy} \cdot b_y} = \frac{V_y}{I_{yy}} \left(\frac{Q_y}{b_y} \right) = \frac{V_y}{I_{yy}} Q_{yb}, \quad Q_{yb} = \frac{Q_y}{b_y} \quad (4.8.2)$$

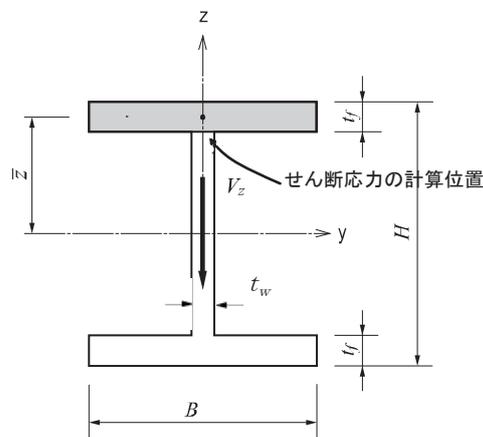


図 4.8.1 せん断係数の計算例

4.9 合成断面の剛性の計算

プログラムで、鉄骨-鉄筋コンクリートの合成部材の剛性は、コンクリート断面(鉄筋の断面はコンクリート断面に含まれる)と鉄骨断面が構造的に完全に合成されるものと仮定し、等価換算断面性能(Equivalent Sectional Properties)の形で考慮する。

等価換算断面性能の計算で、鋼材の弾性係数(E_s)とコンクリートの弾性係数(E_c)は、鉄骨-鉄筋コンクリート規準(SSRC79(Structural Stability Research Council, 1979, USA))に明記された数値を使用し、 E_c の値は EUROCODE 4 により 20%だけ低減した値を使用する。

等価換算断面積

$$Area_{eq} = A_{st1} + \frac{0.8E_c}{E_s} A_{con} = A_{st1} + 0.8 \frac{A_{con}}{REN} \quad (4.9.1)$$

等価換算有効せん断面積

$$As_{eq} = As_{st1} + \frac{0.8E_c}{E_s} As_{con} = As_{st1} + 0.8 \frac{As_{con}}{REN} \quad (4.9.2)$$

等価換算断面2次モーメント

$$I_{eq} = I_{st1} + \frac{0.8E_c}{E_s} I_{con} = I_{st1} + 0.8 \frac{I_{con}}{REN} \quad (4.9.3)$$

ここで、

A_{st1} : 鉄骨の断面積

A_{con} : コンクリートの断面積

As_{st1} : 鉄骨の有効せん断面積

As_{con} : コンクリートの有効せん断面積

I_{st1} : 鉄骨の断面2次モーメント

I_{con} : コンクリートの断面2次モーメント

REN : コンクリートの弾性係数(E_c)に対する鉄骨の弾性係数(E_s)の比(E_s/E_c)

5. 境界条件

5.1 境界条件

プログラムの境界条件は、次のように節点に対する境界条件と要素に対する境界条件に区分できる。

-
- 節点に対する境界条件
 - 自由度拘束("自由度拘束条件"を参照)
 - 弾性バネ要素("節点バネ支持","汎用バネ剛性入力","汎用バネ支持"参照)
 - 弾性連結要素("弾性連結要素"を参照)
 - 要素に対する境界条件
 - 要素の端部拘束解除条件(Element Release)
 - 剛域長さ("梁要素の端部剛域長さ"を参照)
 - 剛体連結機能("剛体連結"を参照)
-

5.2 自由度拘束条件

On-line Manual の "モデル > 境界条件 > 支持条件" を参照

自由度拘束(Constraint)機能は、任意節点の変位を拘束したり、自由度が異なる要素(トラス要素、平面応力要素、板要素等)同士を接合するときに、該当自由度の成分を拘束するのに使用する。

自由度拘束条件は、任意節点に全体座標系(Global Coordinate System)または節点座標系(Node Local Coordinate System)を基準に、6 個の自由度に対して入力する。

例えば、図 5.2.1 と同じ平面骨組モデルに、自由度拘束条件を与える方法は次の通りである。

2 次元問題を扱うときには、解析モデルの基本設定を用いれば便利です。

このモデルは、全体座標系 X-Z 平面内のみの挙動を許容する 2 次元モデルであるため、"支持条件"により、すべての節点に対する全体座標系 Y 軸方向の変位自由度、及び X、Z 軸回りの回転自由度を拘束する必要がある。

さらに固定端条件である N1 節点に対しては、"支持条件"で全体座標系 X、Z 軸方向の変位自由度と Y 軸回りの回転自由度を追加で拘束する。

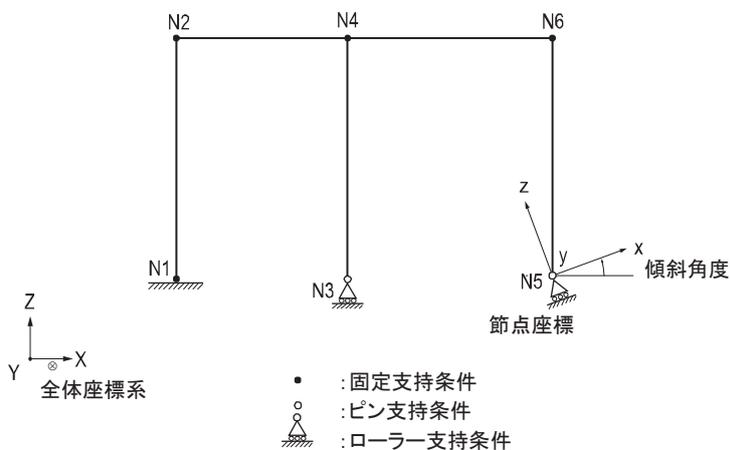


図 5.2.1 自由度の拘束条件を考慮した平面骨組モデル

また、ローラー支持条件である節点 N3 に対しては、Z 軸方向の変位自由度を追加で拘束する。

On-line Manual の "モデル > 境界条件 > 節点座標系" を参照

節点座標系によるローラー支持条件が与えられた節点 N5 に対しては、全体座標系 X 軸に対して傾斜角だけ回転した節点座標系を設定した後、"支持条件"で全体座標系 Z 軸方向の変位自由度を拘束する。

節点座標系が設定されている節点に入力した拘束条件は、節点座標系に基づいて拘束する。

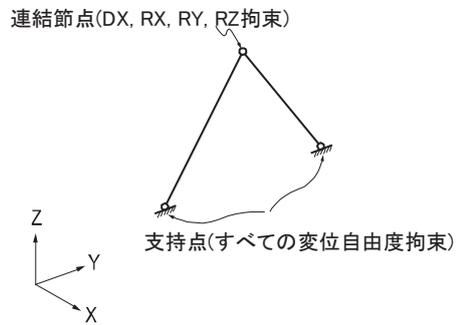
節点変位を拘束する機能は、変位を無視できる支点(Supports)などに対して主に利用され、任意の節点に対して拘束条件を与えると、その節点で反力が発生する。

節点での反力は、全体座標系を基準に出力し、節点座標系が設定されていた場合には、節点座標系に基づいて反力を出力する。

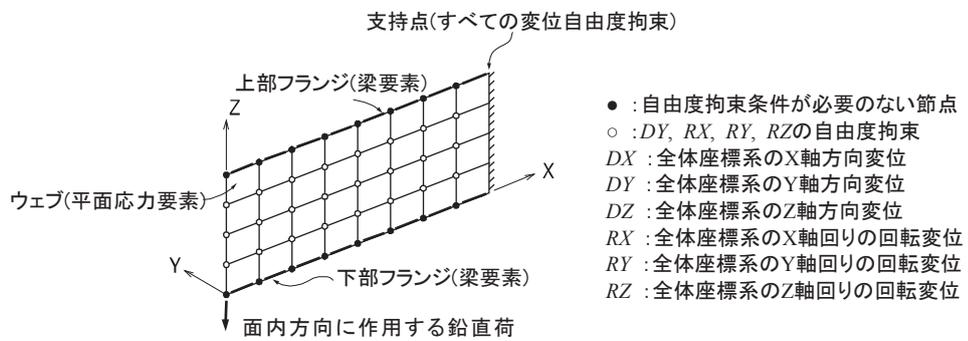
図 5.2.2 は、支持条件により不足する自由度の拘束に使用した例である。

図 5.2.2(a)の場合は、トラス要素が軸方向の変位自由度だけを持つため、各節点での X 方向の変位自由度とすべての回転自由度を拘束している。

図 5.2.2(b)の場合は、上・下フランジを梁要素にした例であり、梁要素が節点当たり 6 個の自由度を持つため、梁要素上の節点に対しては、別途に拘束条件は必要ない。一方、平面応力要素間の節点については、平面応力要素が面内の挙動に対する自由度のみを持つだけであるため、面外方向、すなわち Y 方向の変位自由度とすべての回転自由度を拘束する必要がある。



(a) トラス要素で構成した場合



(b) H型断面の片持ち梁の上/下フランジを梁要素でモデリングし、ウェブを平面応力要素でモデリングした場合

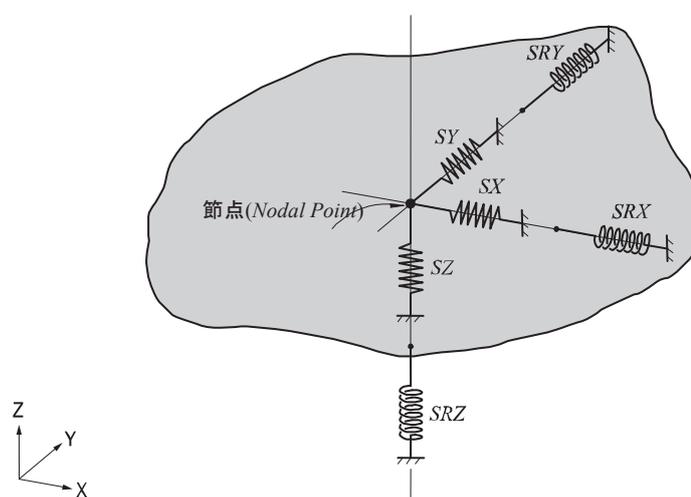
図 5.2.2 自由度拘束条件の使用例

5.3 弾性バネ要素(1 節点バネ)

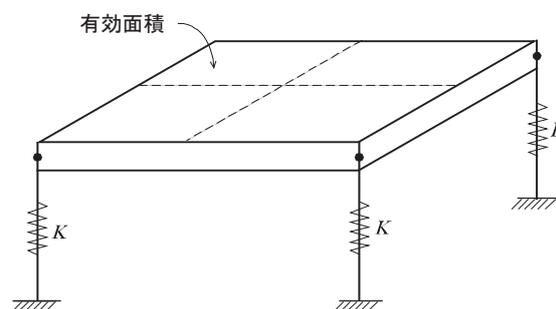
弾性バネ要素は、モデルの境界部分に位置した隣接構造や地盤などの剛性を考慮する時、または節点自由度の少ない要素(トラス要素、平面応力要素、板要素等)を相互接合する時に接合節点で発生する特異性エラー(Singular Error)を防止するのに使用する。

On-line Manual の"
モデル>境界条件>
節点バネ支持"を参照

弾性バネ要素は、節点当たり全体座標系で 6 個の自由度(並進方向 3 個、回転方向 3 個)に対して入力できる。並進方向の弾性バネは、単位長さ当たりの力で入力し、回転方向の弾性バネは単位角度(ラジアン)当たりのモーメントで入力する。



(a) 節点バネ支持を用いた境界条件の入力



$$K = \text{地盤反力係数} \times \text{有効面積}$$

(b) 面分布バネを用いた境界条件の入力

図 5.3.1 弾性境界要素の入力例

並進方向の弾性バネ要素は、解析対象の構造物下部の柱や杭または地盤の剛性を反映するのに使用する。地盤をモデリングするときは、地盤反力係数(Modulus of Subgrade Reaction)に該当節点の有効面積(Tributary Area)を乗じた値を使用する。

この時、地盤は圧縮力に対しては抵抗できますが、引張力に対しては抵抗できないために注意する必要があります。プログラムでは、地盤に接する面の境界条件を容易にモデリングできるように面分布バネ支持の機能を用意している。

面分布バネ支持で、節点バネを選択して単位面積当たり地盤反力係数を入力すれば、節点が占めている有効面積と地盤反力係数の積から剛性を計算して節点バネ支持の境界条件として考慮される。また、圧縮力のみ抵抗する地盤の特性を考慮した解析を実行する場合は、置換形式で弾性連結要素(圧縮専用)を選択して地盤反力係数を入力すれば、圧縮力のみ抵抗する弾性連結要素の境界条件として考慮される。

On-line Manual の "モデル > 境界条件 > 面分布バネ支持" を参照

表 5.3.1 は、実務設計において一般的に使用する土質の分類による地盤反力係数を整理したものである。表の上限と下限の値を用いて、それぞれ解析を実行した後、不利な方の値を用いて設計に適用する。

モデリング対象の構造物に接合する柱や杭の軸剛性を考慮する場合には、弾性境界要素の剛性は EA/H から求める。ここで、 E は支持部材の弾性係数、 A は有効断面積、 H は有効長さである。

表 5.3.1 土質の分類別の代表的な地盤反力係数 ("解析制御データ"を参照)

土質の分類	地盤反力係数 (tf/m ³)
軟らかい粘土	1200 ~ 2400
中位の粘土	2400 ~ 4800
硬い粘土	4800 ~ 11200
ゆるい砂	480 ~ 1600
中位の砂	960 ~ 8000
中位のシルト質砂	2400 ~ 4800
粘土質砂礫	4800 ~ 9600
中位の粘土質砂	3200 ~ 8000
密な砂	6400 ~ 13000
非常に密な砂	8000 ~ 19000
シルト質砂礫	8000 ~ 19000

回転方向の弾性バネは、主にモデリング対象の構造物に隣接する境界部分の回転剛性を反映するのに使用し、境界部分が柱の場合には、 $\alpha EI/H$ の値を用います。ここで、 α は柱の連結状態によって定まる回転剛性用の弾性係数で、 I は有効断面2次モーメント、 H は、柱の有効長さである。

節点バネは一般的に各自由度方向別に独立した形で入力しますが、さらに精密な解析の場合には、他の自由度方向と組合わされた剛性までを考慮する必要がある。すなわち、並進変位が生ずる場合、それに従属して生じる回転変位を考慮するためには、適切に組合わされた剛性を考慮した弾性バネが必要となる。

🔊 On-line Manual の"
モデル>境界条件>
汎用バネ支持"を参照

例えば、構造物の基礎に用いる杭を、弾性バネとしてモデリングする場合には、各方向別の剛性以外に組合わされた剛性を追加で入力して、より精密な解析をすることができる。🔊

節点バネは、一般的に全体座標系で入力しますが、節点に節点座標系を定義した場合には、節点座標系に基づいて入力する。

解析段階で、剛性マトリックの構成後に特定自由度に対して剛性成分がない時に発生する特異性エラー(Singular Error)を避けるために、意図的に回転方向の弾性係数を入力することがあります。その時の弾性係数としては、使用単位系によって差はあるが、主に 0.0001 から 0.001 までの値を適用する。

🔊 On-line Manual の"
解析>解析制御デー
タ"を参照

プログラムでは、このような特異性エラーを防止するために、解析結果にほとんど影響がない程度の剛性を自動で与える機能を内蔵している。🔊

5.4 分布タイプバネ(Winkler Spring)

地盤と構造物の相互作用を考慮するための最も簡単な方法は、地盤の剛性を複数の節点バネに置換して解析することである。特に弾性地盤上の基礎をモデリングするのに最も広く使用されてバネはウインクラー(Winkler)モデルである。

midas Civil ではメインメニューの”境界条件タブ> バネ支持グループ> 面分布バネ支持”機能で分布タイプを選択すると、ウインクラーバネモデルを使用することができる。

このモデルの基本前提は、基礎が剛性のある構造物と弾性地盤で構成されており、地盤が個別のバネで表現されるために要素間で相互作用せず独立的に作用するというものである。

このようなウインクラーバネ条件は、梁や板又はソリッドの面に同じ方法で設定することができる。梁には有効幅を持つ長さ、板やソリッドの場合には、面に分布していることを前提に剛性を計算する。

以下に梁を基準にウインクラーバネの定式化を説明する。

仮想仕事の原理に基づいて内部の仮想ひずみエネルギーは次のように表現できる。

$$\delta U = \int [\delta \varepsilon]^T [\sigma] dV = \int [\delta v] k_v [v] dV$$

ここで、

δU : 内部の仮想ひずみエネルギー

$\delta \varepsilon$: 仮想ひずみ

σ : 応力

V : 体積

δv : 仮想変位

k_v : 鉛直地盤反力係数

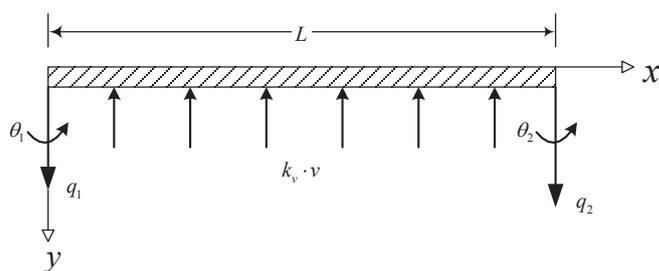


図 1.6.4 弾性支持上の梁

内部の仮想仕事と外部の仮想仕事は同じであり、以下のように式展開できる。

$$\int [\delta q]^T [f]^T k_v [f] [q] dV = [\delta q]^T \cdot [P]$$

$$k_v \int [f]^T [f] dV \cdot [q] = [P]$$

$$[K_r] \cdot [q] = [P]$$

$$[K_r] = k_v \int [f]^T [f] dV$$

ここで、

P : 梁要素に掛かる外部荷重

f : 変形の形状関数

q : 節点変位

K_r : 弾性地盤上の梁要素のための地盤剛性マトリックス

要素の長さが L である弾性地盤上にある梁に対する分布バネ剛性は、バネ剛性と要素剛性を加えて要素の剛性マトリックスを構成する。

$$[K_r] = \frac{k_v L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

梁要素の内部変位に応じてバネの力が作用するので、梁の部材力を補正する必要がある。この力を求めるための梁要素の任意の位置 x における内部変位は節点変位 q と θ を基準にて次のように計算する。

$$v = y(x) = \frac{1}{L^3} \left[\begin{aligned} & (2x^3 - 3Lx^2 + L^3)q_1 + (-Lx^3 + 2L^2x^2 - L^3x)\theta_1 \\ & + (-2x^3 + 3Lx^2)q_2 + (-Lx^3 + L^2x^2)\theta_2 \end{aligned} \right]$$

分布バネによるせん断力とモーメントは梁要素の内部変位と地盤反力係数を用いて、次式のように求める。梁の部材力にこの分布バネの内力を加えると、最終的な部材力が求まる。

$$\begin{aligned} V(x') &= k_v \int_0^{x'} y(x) dx \\ &= \frac{k_v}{L^3} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}x^4 - Lx^3 + L^3x \right) q_1 + \left(-\frac{L}{4}x^4 + \frac{2L^2}{3}x^3 - \frac{L^3}{2}x^2 \right) \theta_1 \\ & + \left(-\frac{1}{2}x^4 + Lx^3 \right) q_2 + \left(-\frac{L}{4}x^4 + \frac{L^2}{3}x^3 \right) \theta_2 \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x') &= k_v \int_0^{x'} y(x)(x' - x) dx = k_v x' \int_0^{x'} y(x) dx - k_v \int_0^{x'} y(x) \cdot x dx \\ &= \frac{k_v}{L^3} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}x^5 - Lx^4 + L^3x^2 \right) q_1 + \left(-\frac{L}{4}x^5 + \frac{2L^2}{3}x^4 - \frac{L^3}{2}x^3 \right) \theta_1 \\ & + \left(-\frac{1}{2}x^5 + Lx^4 \right) q_2 + \left(-\frac{L}{4}x^5 + \frac{L^2}{3}x^4 \right) \theta_2 \end{aligned} \right] \\ &= \frac{k_v}{L^3} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{2}{5}x^5 - \frac{3L}{4}x^4 + \frac{L^3}{2}x^2 \right) q_1 + \left(-\frac{L}{5}x^5 + \frac{2L^2}{4}x^4 - \frac{L^3}{3}x^3 \right) \theta_1 \\ & + \left(-\frac{2}{5}x^5 + \frac{3L}{4}x^4 \right) q_2 + \left(-\frac{L}{5}x^5 + \frac{L^2}{4}x^4 \right) \theta_2 \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

5.5 弾性連結要素(2 節点バネ)

弾性連結要素は、2つの節点をユーザーが入力した剛性で連結し、要素のように挙動できるようにする機能である。2つの節点をトラス要素や梁要素を用いて連結することもできるが、ユーザーの望む大きさや方向性をもった剛性としてモデリングするのは一般的に困難であるため効率的ではない。

弾性連結要素の入力は、各々3方向の並進及び回転方向の剛性で構成され、方向は要素座標系に従う。

弾性連結要素の剛性の大きさは、並進方向は単位長さ当たりの力として、また回転方向は単位角度(ラジアン)当たりのモーメントとして入力し、要素座標系の方向は以下の図 5.5.1 のようになる。

🔊 On-line Manual の"
モデル>境界条件>
弾性連結要素"を参照

弾性連結要素には、引張専用または圧縮専用として与えることもでき、このような場合には、要素座標系 x 軸方向にのみ弾性係数を入力する。弾性連結要素の使用例としては、橋梁構造物の橋桁と下部の橋脚部を連結する弾性軸受などがある。また、弾性連結要素を圧縮専用として地盤の境界条件に使用することもできる。さらに、剛体連結を選択して2節点を無限剛性に連結する機能もある。🔊

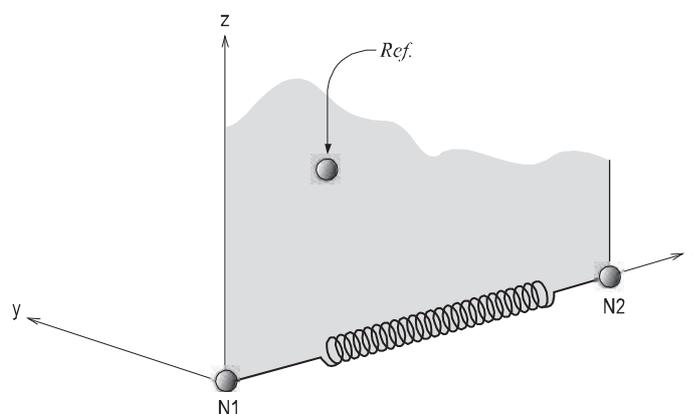


図 5.5.1 2 節点を連結する弾性連結要素の要素座標系

5.6 汎用リンク要素(境界非線形要素)

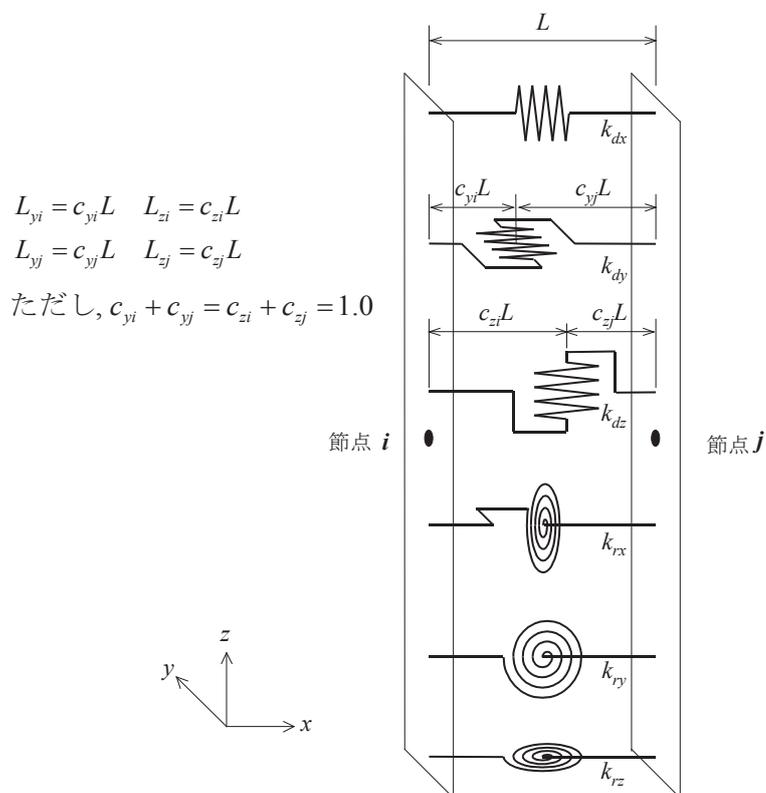


図 5.6.1 汎用リンク要素の構成

汎用リンク要素は制震装置、免震装置、圧縮または引張専担要素、非弾性ヒンジ、地盤バネなどをモデリングするときに使用する。汎用リンク要素は、図 5.6.1 のように 2 つの節点間を結ぶ 6 つのバネで構成され、要素座標軸はトラス要素と同じ体系で、様々な座標軸の設定が可能である。

汎用リンク要素の要素自由度は要素座標系または全体座標系に関わらず、節点当たり 3 つの変位成分と回転成分を持ち、6 つの変位成分は 1 つの軸変形、2 つのせん断変形、1 つのねじり変形と 2 つの曲げ変形成分に区分できる。6 つの変位成分はそれぞれ独立された 6 つのバネに表現され、一部のバネだけを選択し属性を与えることができる。

汎用リンク要素の属性は、プログラムの**モデル> 境界条件> 汎用リンク要素のプロパティ**から定義でき、適用方法によって要素タイプとカタイプに分かれる。

要素タイプの汎用リンク要素にはバネ、線形ダッシュポット、バネと線形ダッシュポットの 3 つのタイプがある。バネは 6 つの成分別に線形弾性の剛性だけを持ち、線形ダッシュポットは 6 つの成分別に線形粘性の減衰だけを持つ。バネと線形ダッシュポットはバネと線形ダッシュポットが並列に繋がった形となる。

要素タイプの汎用リンク要素は基本的に線形のプロパティだけを持つ線形要素である。ただし、バネだけは非弾性ヒンジのプロパティを与えることで、動的フレーム解析時に非線形要素として使用することができる。詳しくは、「9.3 動的フレーム解析」の「9.3.6 非線形要素」で紹介する。非線形バネは主に構造物で部分的に発生する塑性ヒンジや地盤の非線形性を考慮するために使用する。

カタイプの汎用リンク要素には制震装置で利用される粘弾性ダンパー、弾塑性ダンパー、免震装置に利用される鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置、滑り振り子型免震装置、圧縮専担要素のギャップと引張専担要素のフックタイプがあり、境界非線形の時刻歴解析で使用できる（「9.2 境界非線形の時刻歴解析」を参照）。プロパティは線形プロパティとして有効剛性と有効減衰を持ち、選択した成分別に非線形のプロパティを適用することができる。

カタイプの汎用リンク要素は、静的解析、応答スペクトル解析では有効剛性だけの線形要素として解析でき、有効減衰は無視される。線形の時刻歴解析では有効剛性を持つ線形要素として解析される。非線形の時刻歴解析(境界非線形の時刻歴解析)では有効剛性が仮想の線形剛性の役割をし、要素剛性を更新せず、非線形属性によって計算された部材力を外部荷重に付加することで間接的に非線形性を考慮する。

汎用リンク要素の線形プロパティの減衰(要素タイプ)、有効減衰(カタイプ)は解析種類によって次のように考慮される。

1. 静的解析では無視される。
2. 応答スペクトル解析では、構造物の減衰をひずみエネルギー比例にした場合にだけモード減衰定数を通じて考慮でき、要素の節点力の計算時は無視される。
3. モード重ね合わせ法では、構造物の減衰をひずみエネルギー比例にした場合にだけモード減衰定数を通じて考慮でき、要素の節点力の計算時にも減衰、有効減衰を考慮する。
4. 直接積分法では、構造物の減衰をレーリー減衰、または要素別レーリー減衰にした場合、要素の減衰マトリックスを通じて解析に反映される。汎用リンク要素に要素剛性または要素質量に比例する減衰が指定されている場合は、次のように汎用リンク要素の属性で指定された減衰あるいは有効減衰を足して解析を行う。

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + C_{eff}\dot{u} + K_S u = p \quad (5.6.1)$$

ここで、

M : 質量マトリックス

C : 減衰マトリックス

C_{eff} : 減衰あるいは有効減衰

K_S : 弾性要素の剛性マトリックス

u, \dot{u}, \ddot{u} : 節点の変位、速度及び加速度応答

p : 節点への動的荷重

また、ひずみエネルギー比例を選択した場合は、汎用リンク要素の減衰または有効減衰を反映したモード減衰定数を利用して、全体構造物の減衰マトリックスを構成する。ただし、要素の節点力の計算時は減衰または有効減衰を無視される。

上記で説明した汎用リンク要素の適用規則を整理すると、表 5.6.1 のようになる。

表 5.6.1 汎用リンク要素の適用規則

適用タイプ	要素タイプ				カタイプ	
	バネ	線形ダッシュポット	バネと線形ダッシュポット			
プロパティタイプ	剛性	減衰	剛性	減衰	有効剛性	有効減衰
線形プロパティ	弾性	-	弾性	-	弾性	-
静的解析	弾性	-	弾性	-	弾性	-
応答スペクトル解析	弾性	線形 ¹⁾	弾性	線形 ¹⁾	弾性	線形 ¹⁾
線形動的	モード重ね合わせ法	弾性	線形 ¹⁾	弾性	線形 ¹⁾	弾性
	直接積分法	弾性	線形 ²⁾	弾性	線形 ²⁾	弾性
非線形動的	モード重ね合わせ法	弾性	線形 ¹⁾	弾性	線形 ¹⁾	弾性(仮想)
	直接積分法	弾性	線形 ²⁾	弾性	線形 ²⁾	弾性(仮想)

1) ひずみエネルギー比例に選択した場合だけモード減衰定数を通じて解析に反映

2) レーリー減衰、または要素別レーリー減衰に選択した場合、要素の減衰マトリクスを通じて解析に反映され、ひずみエネルギー比例にした場合はモード減衰定数を通じて解析に反映

汎用リンク要素の線形プロパティとして入力される減衰(要素タイプ)、または有効減衰(カタイプ)は次のように剛性比例型で計算することが一般的である。

$$C_{eff} = \frac{2\xi}{\omega} K \quad (5.6.2)$$

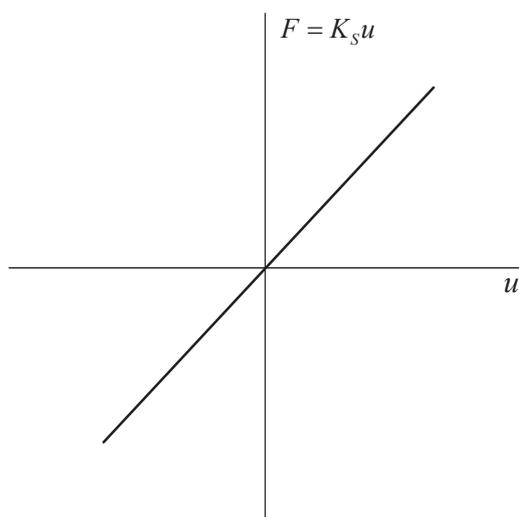
ここで、

C_{eff} : 減衰あるいは有効減衰

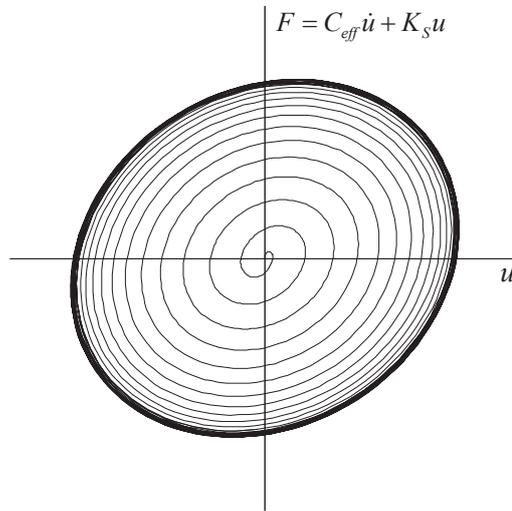
K : 汎用リンク要素の剛性

ξ : 汎用リンク要素の減衰定数

ω : 汎用リンク要素の固有振動数



(a) 減衰または有効減衰を考慮しない場合の要素節点力と変形



(b) 減衰または有効減衰を考慮した場合の要素節点力と変形

図 5.6.2 汎用リンク要素の要素節点力と変形

表 5.6.2 減衰または有効減衰による汎用リンク要素の要素節点力の計算方法

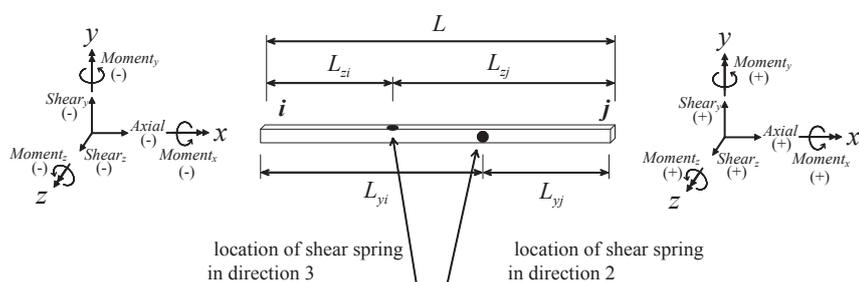
	減衰手法	減衰または有効減衰を指定しない場合の要素力	減衰または有効減衰を指定する場合の要素力
静的解析	-	$F = K_S u$	$F = K_S u$
応答スペクトル	モード減衰	$F = K_S u$	$F = K_S u$
	レーリー減衰		
	ひずみエネルギー比例減衰		
モード重ね合わせ法	Modal	$F = K_S u$	$F = K_S u$
	レーリー減衰		$F = K_S u$
	ひずみエネルギー比例減衰		$F = C_{eff} \dot{u} + K_S u$
直接積分法	モード減衰	$F = K_S u$	$F = K_S u$
	レーリー減衰		$F = C_{eff} \dot{u} + K_S u$
	ひずみエネルギー比例減衰		$F = K_S u$
	要素別レーリー減衰		$F = C_{eff} \dot{u} + K_S u$

要素内力は節点当りに1つの軸力、2つのせん断力、1つのねじりモーメント、2つの曲げモーメントとなり、符号規約は梁要素と等しい。要素節点力と変形の関係は、減衰または有効減衰の考慮可否によって図 5.6.2 のように計算され、要素節点力の計算方法は表 5.6.1 を基準にし、解析種類と減衰方法によって表 5.6.2 のように表現される。ただし、要素質量または要素剛性の比例減衰による節点力は無視される。

汎用リンク要素の自重は**モデル> 境界条件> 汎用リンク要素のプロパティ**の自重の総重量から入力する。入力値は静的荷重として**荷重>自重**で指定した荷重に付加的な節点荷重として作用し、節点質量に変換される。一方、質量を指定する場合は、**モデル> 境界条件> 汎用リンク要素のプロパティ**の質量の総質量から入力する。この場合は、

総重量を節点質量に変換する代わりに、入力された総質量をそのまま使用する。入力された質量は固有値解析と動的解析に考慮される。ただし、**モデル>解析モデルの基本設定>モデルの自重を質量に変換する方向**で“変換しない”を選択した場合は、総重量を節点質量に変換した値と総質量に直接入力した値、共に固有値解析および動的解析に考慮されない。

せん断バネは、部材の I 端（一番目の節点）からの距離を部材長に対する比率で指定し位置を指定する。せん断バネの位置は解析時に次のように考慮される。



L_{yi}, L_{yj} : i, j-節点から y-軸方向せん断バネまでの距離
 L_{zi}, L_{zj} : i, j-節点から z-軸方向せん断バネまでの距離

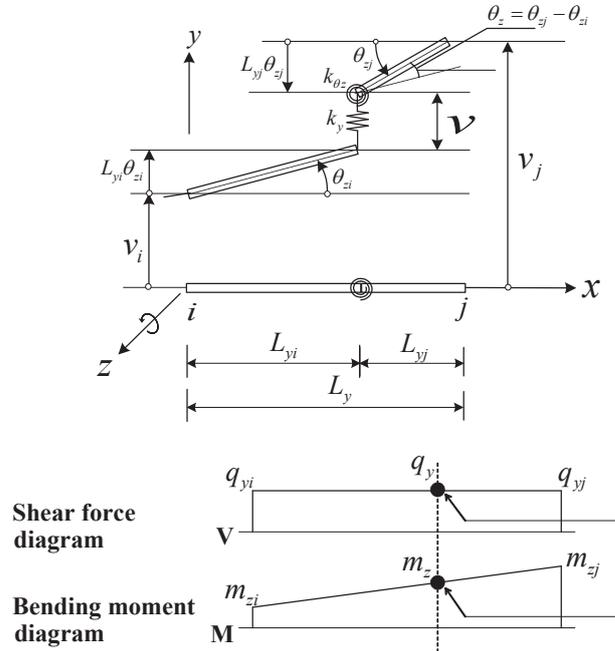
図 5.6.3 汎用リンク要素の要素座標系とせん断バネの位置

1. せん断バネの位置を指定しない場合

せん断バネ位置を指定しないと、曲げとせん断が連成しなく、それぞれのバネが独立に存在することになる。この場合はせん断力がモーメントの微分という一般的なせん断力-モーメント関係が成り立たない。したがって、せん断力が作用しても両端のモーメントは同じである。

2. せん断バネの位置を指定する場合

せん断バネの位置を指定すると、図 5.6.4 のように曲げとせん断が連成し、せん断力が作用すると端部に異なる曲げモーメントが発生する。曲げ変形はバネにだけ発生し、部材の節点と曲げバネの間は剛体挙動する。バネ位置によってモーメントが変わるため、バネ位置は回転変形に影響を及ぼすことになる。部材に荷重が作用しない場合はせん断力が部材全体で同じであるが、両端のモーメントの差はせん断力と指定したせん断バネ位置の積で表現される。



$$\begin{aligned} v &= (v_j - L_{yj}\theta_{zj}) - (v_i + L_{yi}\theta_{zi}) \\ &= (v_j - v_i) - (L_{yj}\theta_{zj} + L_{yi}\theta_{zi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_y &= k_y v \\ &= k_y \left\{ (v_j - v_i) - (L_{yj}\theta_{zj} + L_{yi}\theta_{zi}) \right\} \\ &= q_{yj} = -q_{yi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_z &= k_{\theta_z} \theta_z \\ &= k_{\theta_z} (\theta_{zj} - \theta_{zi}) \\ &= m_{zj} - L_{yj} q_{zj} \\ &= -(m_{zi} + L_{yi} q_{zi}) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} q_{yi} = -\frac{m_{zj} - m_{zi}}{L} \\ q_{yj} = \frac{m_{zj} - m_{zi}}{L} \end{array} \right)$$

$$m_{zi} = -m_z - L_{yi} q_{yi}$$

$$m_{zj} = m_z + L_{yj} q_{yj}$$

図 5.6.4 せん断バネの位置を指定した場合のせん断力とモーメント

5.7 要素の端部拘束解除条件

一般的に要素と要素を接合すると、要素らはそれぞれが持っている節点自由度方向の剛性を保持しながら互いに連結される。要素の端部拘束解除条件は、このような剛結を解除する場合に使用する。端部拘束解除条件を入力できる要素は、梁要素と板要素で、各要素の端部拘束解除条件の入力方法とその機能は次の通りである。

梁要素の端部拘束解除条件は、構成節点のすべての自由度方向に対して与えることができるが、半剛接合(Partial Fixity)を考慮する係数を入力して、繋がれた要素の全体剛性から一部のみ適用することもできる。梁要素の構成節点の回転方向に対して端部拘束解除条件を入力すれば、構造的にトラス要素と同じ挙動をするようになる。

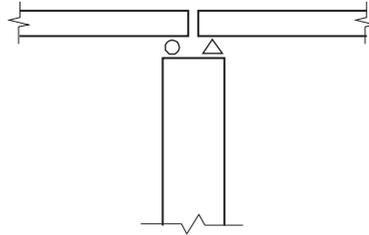
🔊 On-line Manual の"
モデル>境界条件>
梁要素の端部拘束解
除"を参照

板要素の端部拘束解除条件は、要素を構成節点に対して、要素座標系 z 軸まわりの回転自由度を除く、すべて自由度に対して入力できる。板要素のすべての構成節点において、面外方向の曲げに対する端部拘束解除条件を入力すれば、構造的に平面応力要素と同じ挙動をするようになる。

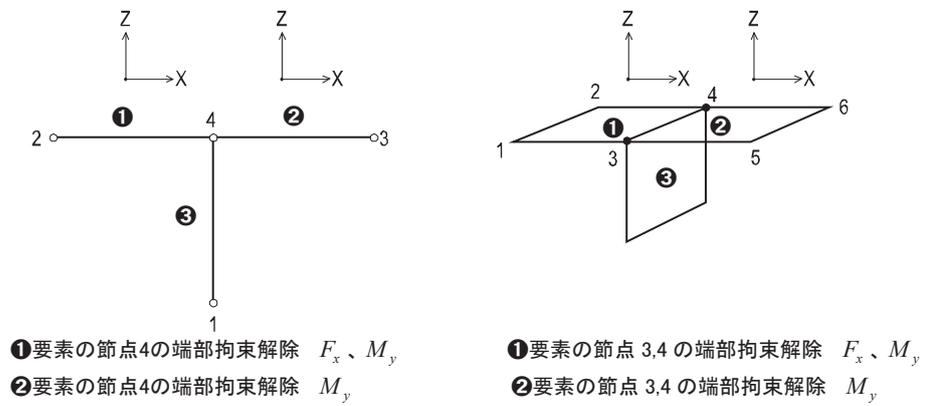
🔊 On-line Manual の"
モデル>境界条件>
板要素の端部拘束解
除"を参照

端部拘束解除条件を適用する方向は要素座標系に従うため、全体座標系の方角に対して拘束を解除する場合には、要素座標系との関係に注意する必要がある。また、要素の端部拘束解除による剛性の変化のために、解析実行において特異性エラーが発生する可能性があるため、全体構造物の挙動に対する十分な理解が必要になる。

図 5.7.1 では、梁要素及び板要素に対して端部拘束解除条件を適切に使用して、橋梁の橋脚とデッキの連結部の境界条件をモデリングする方法を示している。



(a) 橋梁の橋脚とデッキの連結部



(b) 梁要素でモデリングした場合(c) 板要素でモデリングした場合

図 5.7.1 梁要素及び板要素に対して端部拘束解除条件を使用したモデリング

5.8 剛域長さ

骨組部材で構成された土木や建築構造物では、骨組部材の中心間距離を要素の長さとしてモデリングするため、実際よりも若干大きい変位となり、また端部及び中央部の曲げモーメントも大きくなる。プログラムでは、このような端部の偏心及び柱と梁接合部の剛域を考慮するために2つの方法を用意している。(図 5.8.1 参照)

On-line Manual の"
モデル>境界条件>
剛域の考慮"を参照

On-line Manual の"
モデル>境界条件>
梁要素の端部剛域設
定"を参照

1. 柱と梁接合部のすべてに対して剛域長さを自動考慮するようにする方法
2. 梁要素の両端に剛域長さを直接入力する方法

プログラムでは、梁要素(またはテーパー断面梁要素)にのみ剛域が設定できる。

(1) 剛域による剛性を自動考慮する方法

剛域において曲げ変形やせん断変形が生じないと仮定すれば、骨組部材の曲げ変形とせん断変形に対する有効長さは、下式のように表現できる。

$$L_I = L - (R_i + R_j) \quad (5.8.1)$$

ここで、 L は柱部材の中心間距離(梁要素の両節点間距離)で、 R_i 及び R_j は両端の剛域長さである。ここで、要素の長さを上式の L_I とすると、剛域の変形を無視しているため、若干の誤差が生じる。

プログラムでは、このような誤差をユーザーが補正できるように剛域長さの補正係数を用意している。

$$L_I = L - Z_F(R_i + R_j) \quad (5.8.2)$$

ここで、 Z_F は剛域長さの補正係数である。

剛域長さの補正係数は、0 から 1.0 までの値を入力する。接合方法やスチフナの有無などを考慮して適切な値を入力する必要がある。

剛域長さの補正係数は、軸方向の変形(Axial Deformation)及びねじれ変形(Torsional Deformation)に対しては影響を与えない。これらの変形の計算には、要素の全体長さ(L)が適用される。

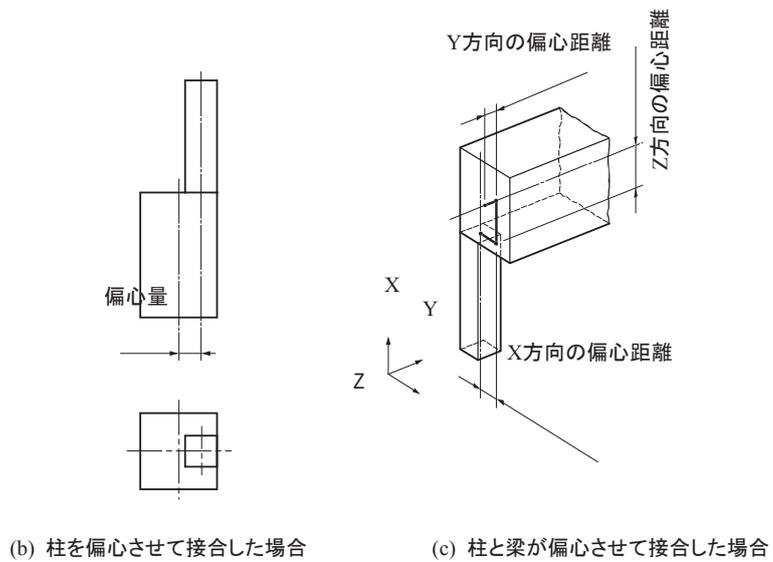
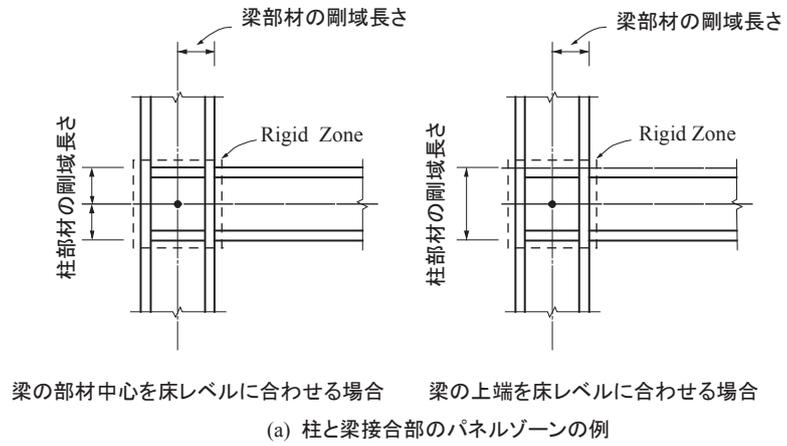


図 5.8.1 梁要素間の中立軸のずれによる偏心距離の例

🔊 On-line Manual の"
モデル>解析モデル
の基本設定"を参照

プログラムでパネルブーン効果を考慮するようにすると、全体座標系 Z 軸が重力の反対方向に自動設定され、剛域長さも自動考慮される。🔊

剛域長さは、柱と梁接部にのみ考慮される。

ここで、柱部材とは Z 軸に平行な梁要素を意味し、梁部材とは全体座標系 X-Y 平面に平行な梁要素を意味する。

剛域の考慮のダイアログで、“剛域長さを自動計算”を指定した場合に、“断面力の計算位置”で“補正剛域端”を選択すると、要素の剛性、自重、及び分布荷重、さらに断面力の計算位置が補正係数によって補正された剛域長さに応じて変化する。

“フェイス”を選択すると、要素の剛性の計算に用いる要素の長さだけが補正係数によって補正される。“フェイス”を選択した時の自重と分布荷重の計算方法、及び断面力の計算位置は、フェイス位置(梁の場合は柱の外側、柱の場合は梁の上面及び下面の位置)に固定される。

因みに、剛域長さの補正係数を 1.0 とした場合には、計算位置で“フェイス”と“剛域端”のどちらを選択しても、同じ条件になる。また、剛域長さの補正係数を 0 とし、計算位置で“補正剛域端”を選択した場合には、剛域長さを考慮しないことと同じ条件になる。

剛域長さの自動計算を選択した場合には、計算位置の選択によって自重と分布荷重の計算方法や断面力の計算位置が変化するため、次の事項に留意する必要がある。

● 要素の剛性の計算

要素の剛性を計算するとき、軸剛性とねじれ剛性については、両節点間の長さを適用し、せん断剛性と曲げ剛性については、計算位置の選択に関係なく、補正した剛域長さを考慮して($L_1=L-Z_F(R_i+R_j)$)を適用する。(図 5.8.2 参照)

● 分布荷重の計算

計算位置を“フェイス”とした場合、節点からフェイスまでの区間の分布荷重は、節点のせん断力としてのみ考慮し、残り区間に載荷された分布荷重は、図 5.8.3 のように、せん断力と曲げモーメントに置換して考慮します。計算位置を“剛域端”とした場合には、剛域長さの補正係数が考慮された位置(剛域長さの調整位置)を用いて計算する。

● 自重の計算

梁部材で、計算位置が“フェイス”のときは、両フェイス間の距離($L_1=L-(R_i+R_j)$)を自重の計算に適用し、計算位置が“補正剛域端”のときは、両補正剛域端を除いた長さ($L_1=L-Z_F(R_i+R_j)$)を適用する。このようにして計算された自重は、前述した分布荷重の計算と同様に、せん断力と曲げモーメントに置換して解析に考慮する。

● 断面力の計算位置

柱及び梁部材の断面力は、計算位置が“フェイス”であれば、両フェイス間を4等分した位置に対して計算する。計算位置が“補正剛域端”であれば、梁部材の場合は、両補正剛域端間の区間を4等分した位置に対して計算する。因みに、計算位置が“フェイス”とした場合と、剛域長さの補正係数を1.0として計算位置を“補正剛域端”とした場合の断面力の計算位置は同じになる。

● 端部拘束解除条件を使用した時の剛域長さ

柱及び梁部材の片側または両側がピン接合により端部拘束解除条件が与えられた場合、その節点に対しては、剛域長さを考慮しない。

● 柱部材の剛域長さの計算方法

柱部材の全長は、隣接する層間距離である。プログラムでは、梁の部材中心を床レベルに合わせる場合と、梁の上端を床レベルに合わせる場合の2つから選択する。その選択によって柱部材の剛域長さが異なる。梁の部材中心を床レベルに合わせた場合には、柱頭及び柱脚においてそれぞれ剛域長さを計算し、梁の上端を床レベルに合わせた場合には、柱頭においてのみ剛域長さを計算する。(図 5.8.2 参照)

柱梁接合部で、柱部材の剛域長さは、接合する梁部材の断面せい(Depth)と方向により定まり、図 5.8.2 のように柱部材と梁部材が接合する場合、柱部材の剛域長さは要素座標系 y 軸と z 軸方向に対して別々に剛域長さを計算する。

柱部材に対して3方向から梁部材が接合する場合、各方向別の剛域長さの算定方法は次の通りである。(図 5.8.3 参照)

$$RC_x = BDx \cos^2 \theta \quad RC_z = BDx \sin^2 \theta$$

RC_y : 柱頭の要素座標系 y 軸方向の剛域長さ

RC_z : 柱頭の要素座標系 z 軸方向の剛域長さ

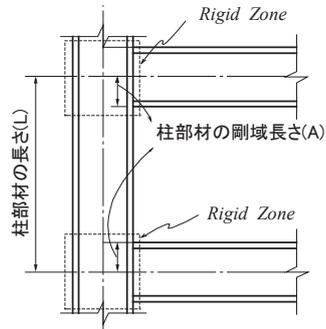
BD : 柱部材に接合する梁部材の断面せい(Depth)

θ : 柱部材の要素座標系 z 軸と梁部材との角度

柱部材の各方向別の剛域長さは、柱部材に接合する梁部材に対して各方向別の剛域長さを求めた後、その中の最大値を採用する。

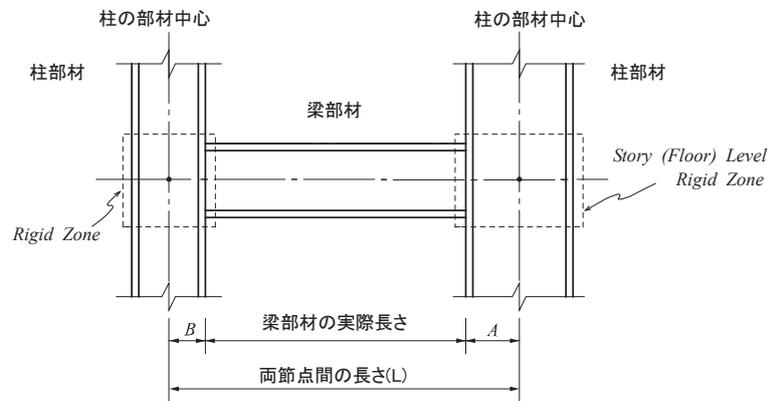
🔊 On-line Manual の
“モデル>解析モデル
の基本設定>剛域の
考慮や画面表示で梁
上端が層高さ(X-Y 平
面)に一致するように
整列”を参照

柱の部材中心(z軸と平



梁の部材中心を床レベルに合わせる場合

(a) 柱部材の剛域長さ

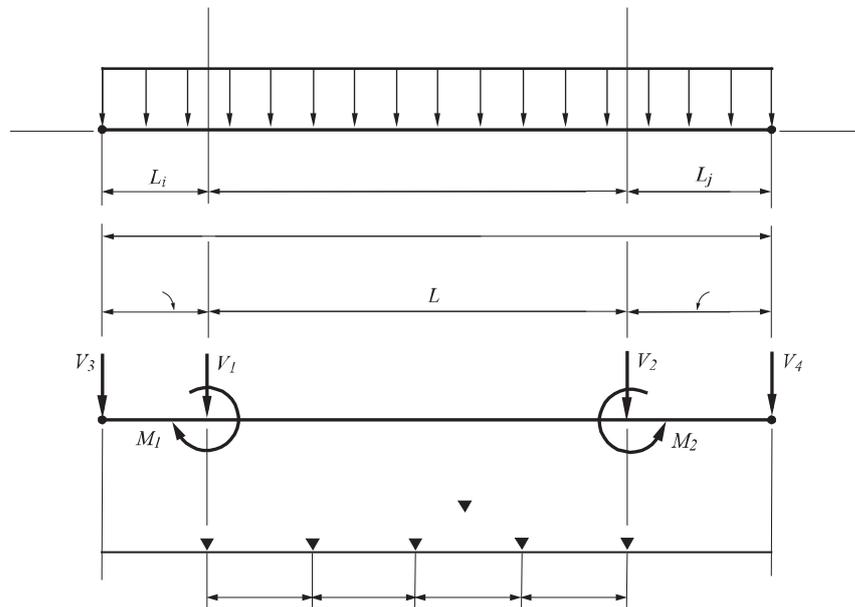


(b) 梁部材の剛域長さ

剛域長さの補正係数	剛性の計算長さ
1.00	$L - 1.00 \times (A + B)$
0.75	$L - 1.00 \times (A + B)$
0.50	$L - 1.00 \times (A + B)$
0.25	$L - 1.00 \times (A + B)$
0.00	$L - 1.00 \times (A + B)$

(c) 剛性の計算長さ

図 5.8.2 剛域の考慮による剛域長さの自動計算を指定した時、
梁要素の曲げ/せん断剛性の計算に適用する長さ



$L_i = 1.0 \times R_i$ (断面力の出力位置が
フェイスの場合)

$L_j = 1.0 \times R_j$ (断面力の出力位置が
フェイスの場合)

$L_i = Z_F \times R_i$ (断面力の出力位置が
補正剛域端の場合)

$L_j = Z_F \times R_j$ (断面力の出力位置が
補正剛域端の場合)

R_i : i端の剛域長さ

R_j : j端の剛域長さ

Z_F : 剛域長さの補正係数

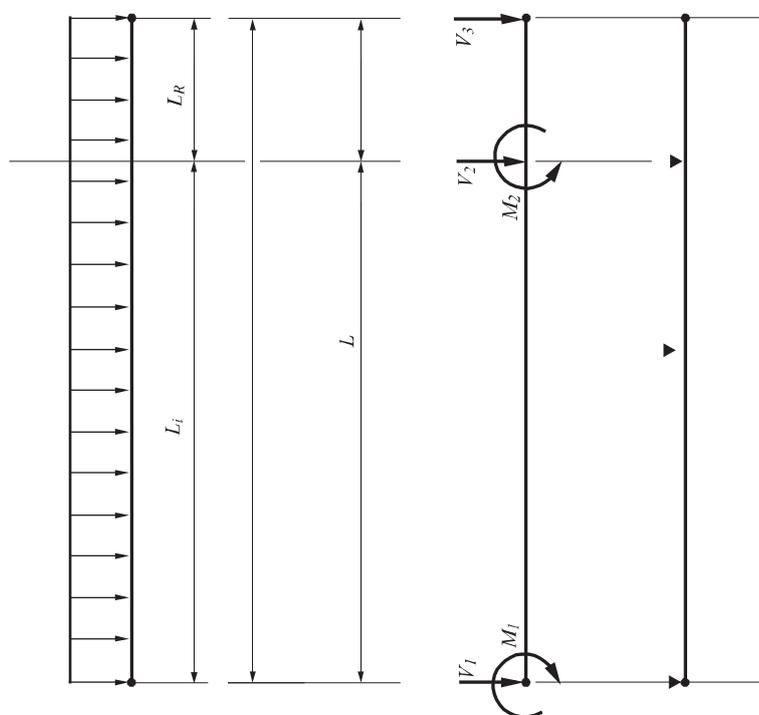
V_1 、 V_2 : 両補正剛域端間の分布荷重による曲げせん断力

M_1 、 M_2 : 両補正剛域端間の分布荷重による曲げモーメント

V_3 、 V_4 : 補正剛域端から節点までの区間の分布荷重によるせん断力

(a) 梁部材

図 5.8.3 剛域長さの自動計算を指定した時の分布荷重の計算方法及び
断面力の計算位置



$$L_R = 1.0 \times R \quad (\text{断面力の出力位置がフェイスの場合})$$

$$L_R = Z_F \times R$$

ここでRは剛域長さの補正係数

V_1 、 V_2 : 下端節点から上部補正剛域端までの区間の分布荷重によるせん断力

M_1 、 M_2 : 下端節点から上部補正剛域端までの区間の分布荷重による曲げモーメント

V_3 : 上端節点から上部補正剛域端までの区間の分布荷重によるせん断力

(b) 柱部材

図 5.8.4 剛域長さの自動計算を指定した時の分布荷重の計算方法及び断面力の計算位置

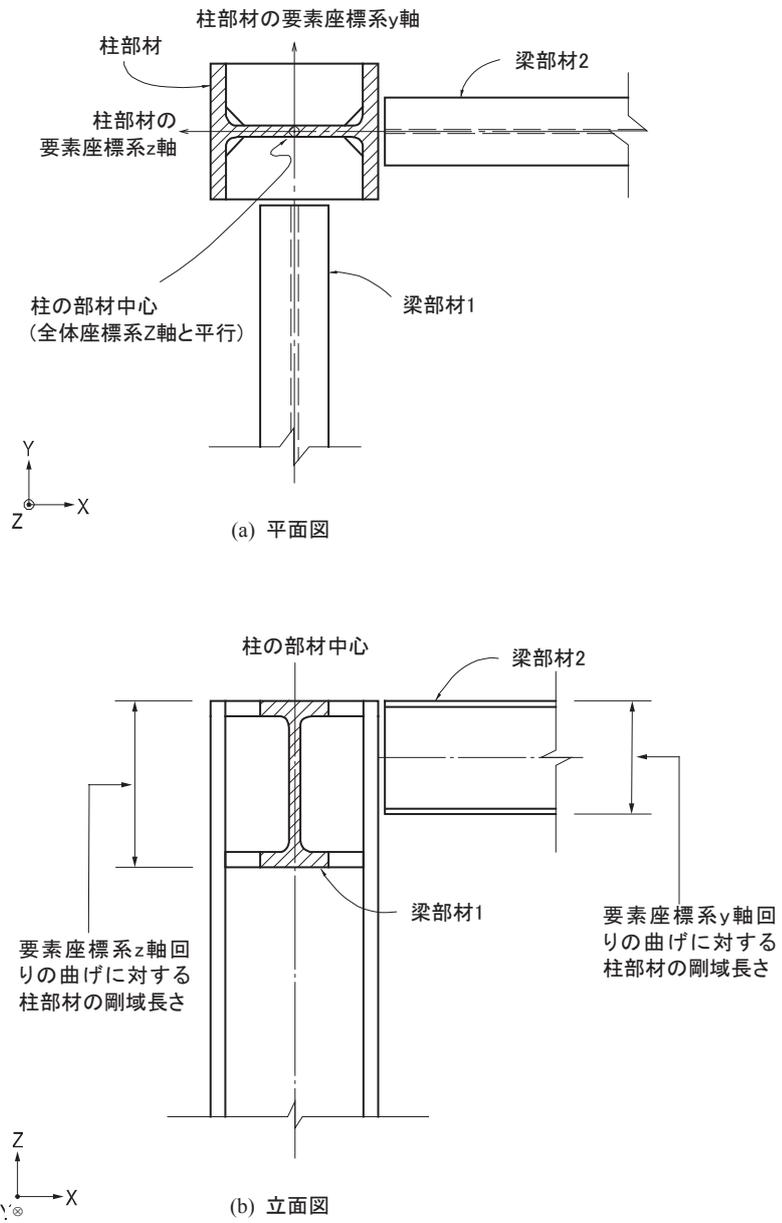
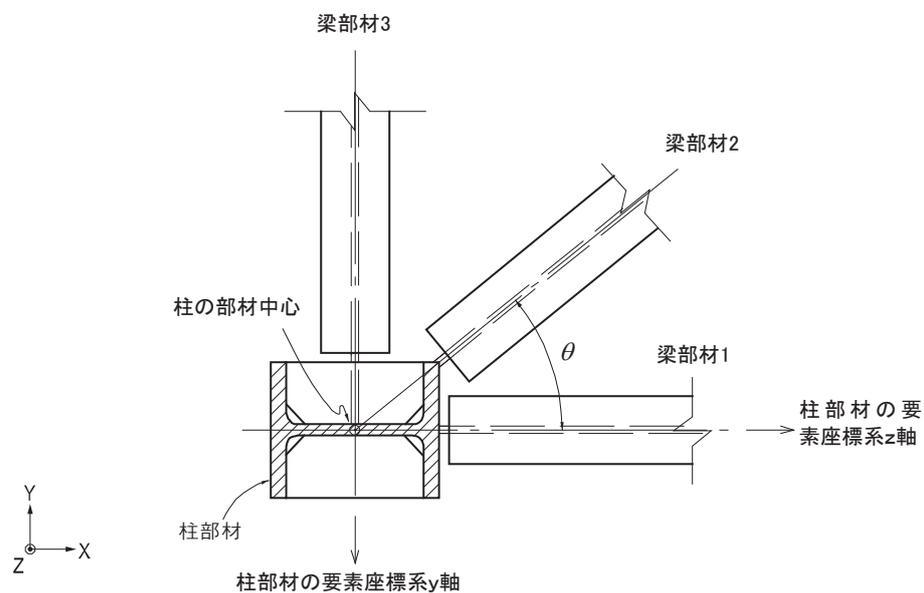


図 5.8.5 剛域長さの自動計算によって柱部材の剛域長さ



$$\text{梁部材1: } BD = 250 \quad \theta = 0^\circ \quad RC_z = 250 \times \sin^2 0^\circ = 0.0 \quad RC_y = 250 \times \cos^2 0^\circ = 250.0$$

$$\text{梁部材2: } BD = 200 \quad \theta = 40^\circ \quad RC_z = 200 \times \sin^2 40^\circ = 82.6 \quad RC_y = 200 \times \cos^2 40^\circ = 117.4$$

$$\text{梁部材3: } BD = 150 \quad \theta = 90^\circ \quad RC_z = 150 \times \sin^2 90^\circ = 150.0 \quad RC_y = 150 \times \cos^2 90^\circ = 0.0$$

柱部材の剛域長さ:

$$RC_y = \text{MAX}(250.0, 117.4, 0.0) = 250.0 \quad RC_z = \text{MAX}(0.0, 82.6, 150.0) = 150.0$$

ここで BD : 梁せい

RC_z : 弱軸曲げに対する剛域長さ

RC_y : 強軸曲げに対する剛域長さ

図 5.8.6 剛域長さの自動計算によって柱部材の剛域長さの計算例

● 梁部材

梁部材の剛域長さは、梁部材の両端に対する柱部材の断面せい(Depth)と幅(Width)により定まり、計算式は次の通りである。

—各方向別の剛域長さの計算式(図 5.8.7 参照)

$$RB = \frac{Depth \times \cos^2 \theta}{2} + \frac{Width \times \sin^2 \theta}{2}$$

Depth: 柱部材の要素座標系 z 軸方向の断面せい

Width: 柱部材の要素座標系 y 軸方向の断面幅

θ : 柱部材の要素座標系 z 軸と梁部材との角度

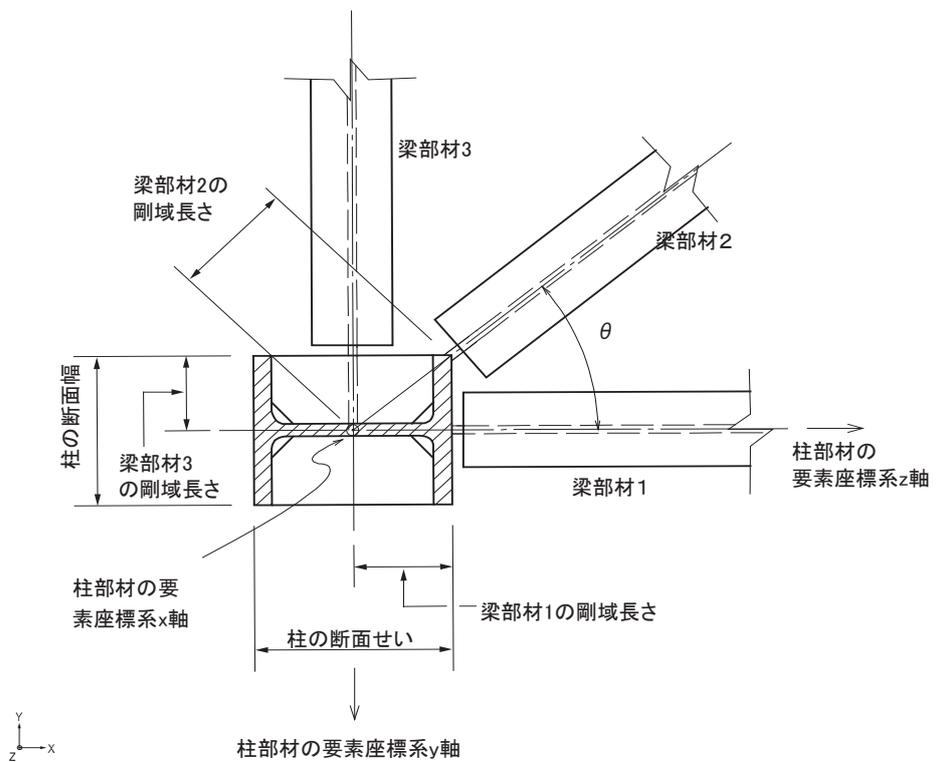
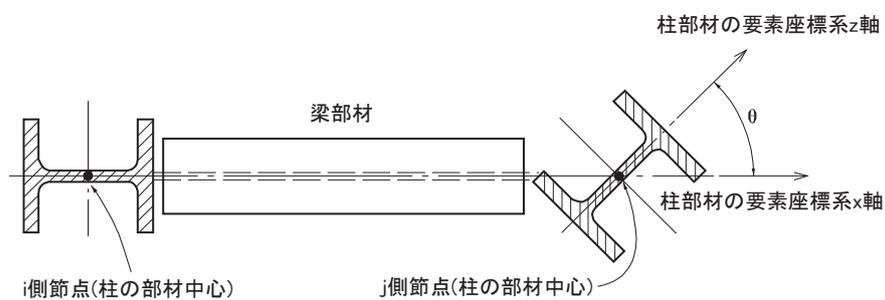


図 5.8.7 剛域長さの自動計算による梁部材の剛域長さ



柱の断面せい = 150、柱の断面幅 = 100、 $\theta = 40^\circ$ の場合

$$i \text{ 側の剛域長さ} = \frac{150 \times \cos^2 0^\circ}{2} + \frac{100 \times \sin^2 0^\circ}{2} = 75.0$$

$$j \text{ 側の剛域長さ} = \frac{150 \times \cos^2 40^\circ}{2} + \frac{100 \times \sin^2 40^\circ}{2} = 64.7$$

図 5.8.8 剛域長さの自動計算による梁部材の剛域長さ

(2) "梁要素の端部剛域設定"を用いて梁要素の両端に剛域長さを直接入力する方法

🔊 On-line Manual の"
モデル>境界条件>
梁要素の端部剛域設
定"を参照

梁要素の端部剛域設定では、次の2つの方法により梁要素の両端に剛域長さを直接入力する。🔊

-
1. 両節点での剛域長さを全体座標系 X, Y, Z 軸方向の距離で入力
 2. 両節点での剛域長さを要素座標系 x 軸方向の距離で入力
-

1の方法は、主に柱と梁が偏心で接合する場合の偏心量を入力するのに使用し、要素の剛性を計算したり分布荷重または自重を計算する時に考慮する距離は、両剛域端間の距離を適用する。断面力の計算位置及び端部拘束解除条件についても、剛域端を基準にして適用する。(図 5.8.2(b), (c)参照)

2の方法は、軸方向の剛域長さを入力するのに使用する。この方法は、要素の剛性、断面力の計算位置、及び端部拘束解除条件に対しては、剛域の考慮で剛域長さの補正係数を 1.0 として計算位置を"フェイス"とした場合と同じになるが、分布荷重に対しては補正剛域端間の距離ではなく、両節点間の距離を適用する。

5.9 代表節点と従属節点(剛体連結機能)

On-line Manual の"
モデル>境界条件>
剛体連結"を参照

剛体連結機能(機構拘束機能、Rigid Link)は、構造物の相対的な移動を拘束する機能である。

幾何学的な相対移動の拘束は、任意節点の自由度に対して、1つまたはそれ以上の節点の自由度を従属させることによって行い、ここで任意節点を代表節点(Master Node)とし、従属する節点を従属節点(Slave Node)と定義する。

剛体連結機能には、次の4つがある。

1. **Rigid Body Connection**
2. **Rigid Plane Connection**
3. **Rigid Translation Connection**
4. **Rigid Rotation Connection**

Rigid Body Connection は、代表節点と従属節点が、剛体的に連結させて相互移動を拘束する方法で、各節点間の距離が一定に維持され、拘束条件の連立方程式は次の通りである。

$$U_{Xs} = U_{Xm} + R_{Ym}\Delta Z - R_{Zm}\Delta Y,$$

$$U_{Ys} = U_{Ym} + R_{Zm}\Delta X - R_{Xm}\Delta Z$$

$$U_{Zs} = U_{Zm} + R_{Xm}\Delta Y - R_{Ym}\Delta X$$

$$R_{Xs} = R_{Xm}$$

$$R_{Ys} = R_{Ym}$$

$$R_{Zs} = R_{Zm}$$

ここで、 $\Delta X = X_m - X_s$, $\Delta Y = Y_m - Y_s$, $\Delta Z = Z_m - Z_s$

上式で、添字 m と s は、それぞれ代表節点及び従属節点を意味し、 U_X , U_Y , U_Z は、全体座標系 X , Y , Z 方向の変位を表します。 R_X , R_Y , R_Z は、全体座標系 X , Y , Z 方軸回りの回転変位を表す。 X_m, Y_m, Z_m は代表節点の座標を、 X_s, Y_s, Z_s は、従属節点の座標を表す。この機能は、他の構造部材よりも剛性が非常に大きく、変形が無視できる部材のモデリングや Stiffened Plate で、Plate と Stiffener を相互連結するのに活用できる。

Rigid Plane Connection は、代表節点と従属節点が、 X - Y 平面、 Y - Z 平面および Z - X 平面等と平行した平面上で、平面剛体で連結したように、相互移動が拘束される方法であり、平面上に投影された各節点間の距離が一定に維持され、拘束条件の連立方程式は次の通りである。

X-Y 平面内の移動に対して **Rigid Plane Connection** を与える場合

$$U_{Xs} = U_{Xm} - R_{Zm}\Delta Y$$

$$U_{Ys} = U_{Ym} + R_{Zm}\Delta X$$

$$R_{Zs} = R_{Zm}$$

Y-Z 平面内の移動に対して **Rigid Plane Connection** を与える場合

$$U_{Ys} = U_{Ym} - R_{Xm}\Delta Z$$

$$U_{Zs} = U_{Zm} + R_{Xm}\Delta Y$$

$$R_{Xs} = R_{Xm}$$

Z-X 平面内の移動に対して **Rigid Plane Connection** を与える場合

$$U_{Zs} = U_{Zm} - R_{Ym}\Delta X$$

$$U_{Xs} = U_{Xm} + R_{Ym}\Delta Z$$

$$R_{Ys} = R_{Ym}$$

この機能は、主に平面内の相対移動が無視できる剛床板のモデリングに使用する。

Rigid Translation Connection は、代表節点と従属節点の X 軸、Y 軸及び Z 軸方向の移動を相互拘束する方法で、拘束条件の方程式は次の通りである。

X 軸方向の移動に対して相互拘束する場合

$$U_{Xs} = U_{Xm}$$

Y 軸方向の移動に対して相互拘束する場合

$$U_{Ys} = U_{Ym}$$

Z 軸方向の移動に対して相互拘束する場合

$$U_{Zs} = U_{Zm}$$

Rigid Rotation Connection は、代表節点と従属節点の X 軸、Y 軸または Z 軸回りの回転移動を相互拘束する方法で、拘束条件の方程式は次の通りである。

X 軸回りの回転移動に対して相互拘束する場合

$$R_{Xs} = R_{Xm}$$

Y 軸回りの回転移動に対して相互拘束する場合

$$R_{Ys} = R_{Ym}$$

Z 軸回りの回転移動に対して相互拘束する場合

$$R_{Zs} = R_{Zm}$$

以下は、剛体連結機能の理解を深めるために、**Rigid Plane Connection** 機能を建物の床板モデルに適用した例を概念的に述べたものである。

一般的に、建物が水平力を受けるとき、床板内のあらゆる位置での水平方向の相対変位は、他の構造部材(柱、壁、ブレース部材)の相対変位に比べて、ほとんど無視する程小さくなる。このような床板の剛床作用(Rigid Diaphragm Action)は、床板内のあらゆる面内移動を相互拘束することによって考慮することができる。

この時の面内移動は、床板の面内の並進変位成分 2 個と Z 軸回りの回転変位成分となる。

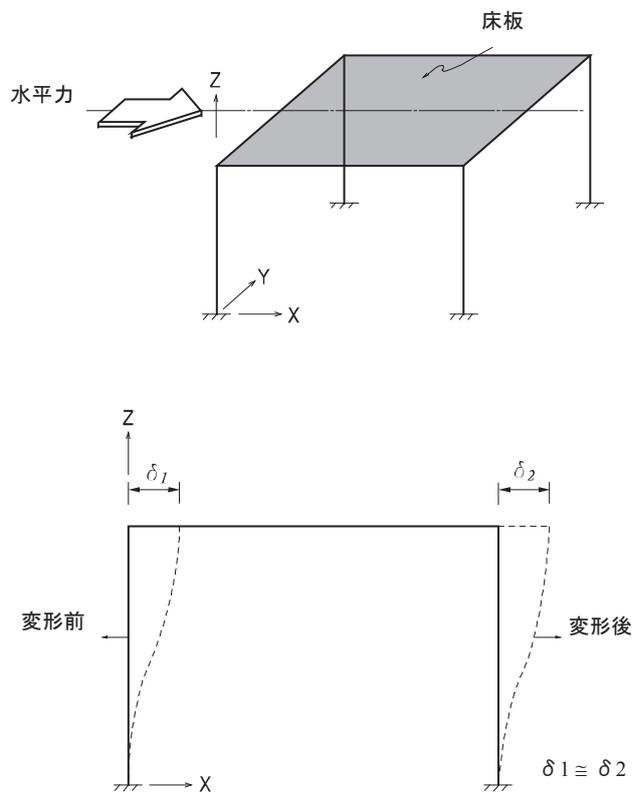


図 5.9.1 剛床を持つ一般構造物が水平力を受ける場合

図 5.9.1 で、構造物に水平力が作用する時、床板の面内剛性は柱部材の水平剛性に比べて非常に大きいため、床板の面内変形は、構造的に無視することができ、 δ_1 と δ_2 は、ほとんど同じ値になる。

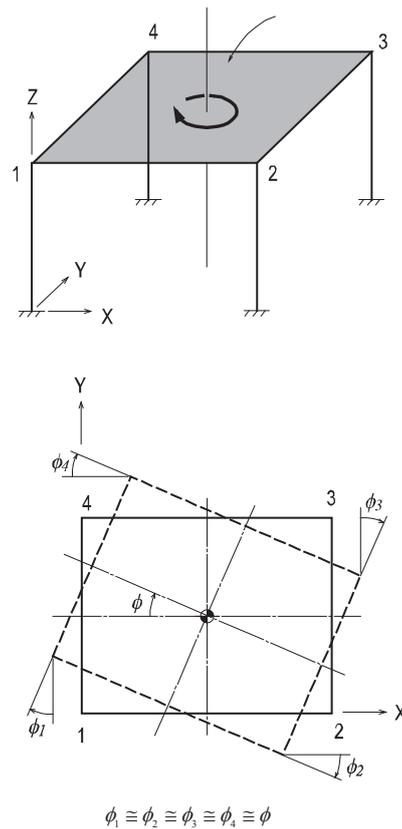
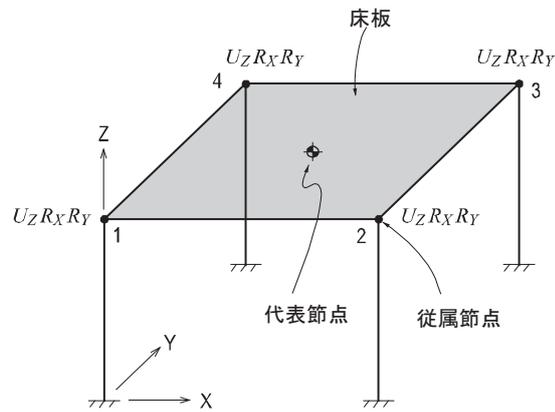
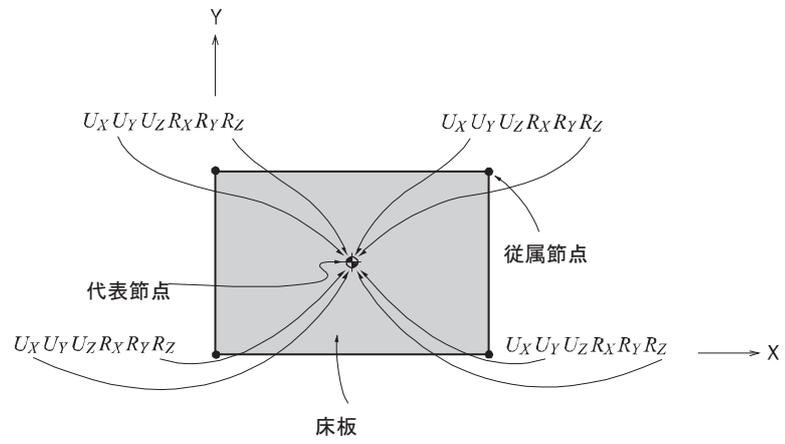


図 5.9.2 剛床を持つ構造物が Z 軸回りにねじれモーメントを受ける場合

図 5.9.2 の例で剛床を持つ構造物が、ねじれモーメントを受けるとき、床板の面内剛性は柱部材の剛性に比べて非常に大きいため、床板全体が ϕ だけ回転し、 $\phi_1 \equiv \phi_2 \equiv \phi_3 \equiv \phi_4 \equiv \phi$ になる。したがって、4個の自由度を1個の自由度に縮合することができる。

図 5.9.3 は、剛床作用を考慮して、各節点当たり 6 個の自由度(6×4)、すなわち全部で 24 個の自由度を 15 個の自由度に縮合する過程を示した図である。



U_x : X軸方向の並進自由度

R_x : X軸回りの回転自由度

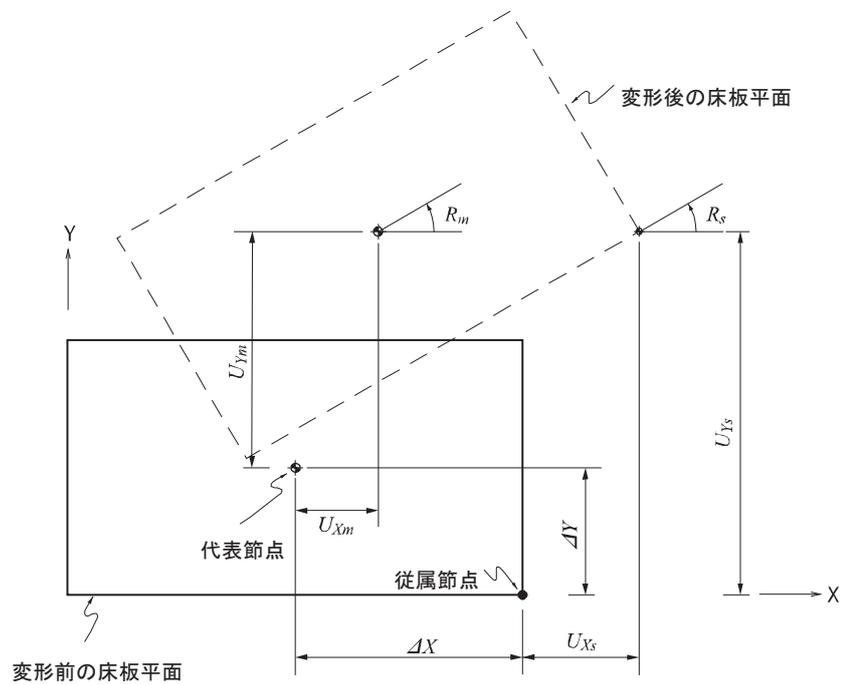
U_y : Y軸方向の並進自由度

R_y : Y軸回りの回転自由度

U_z : Z軸方向の並進自由度

R_z : Z軸回りの回転自由度

図 5.9.3 剛床に対する自由度の縮合の概念図



- U_{xm} : 代表節点のX軸方向変位
- U_{ym} : 代表節点のY軸方向変位
- R_m : 代表節点のZ軸回りの回転変位
- U_{xs} : 従属節点のX軸方向変位
- U_{ys} : 従属節点のY軸方向変位
- R_s : 従属節点のZ軸回りの回転変位

図 5.9.4 剛床に水平力が作用して変位が生じた場合

図 5.9.4 で、剛床に水平力が作用して面内方向に変位及び回転が同時に生じた場合、床板内の任意点での変位は、次のように計算される。

$$U_{xs} = U_{xm} - R_{Zm}\Delta Y$$

$$U_{ys} = U_{ym} + R_{Zm}\Delta X$$

$$R_{Zs} = R_{Zm}$$

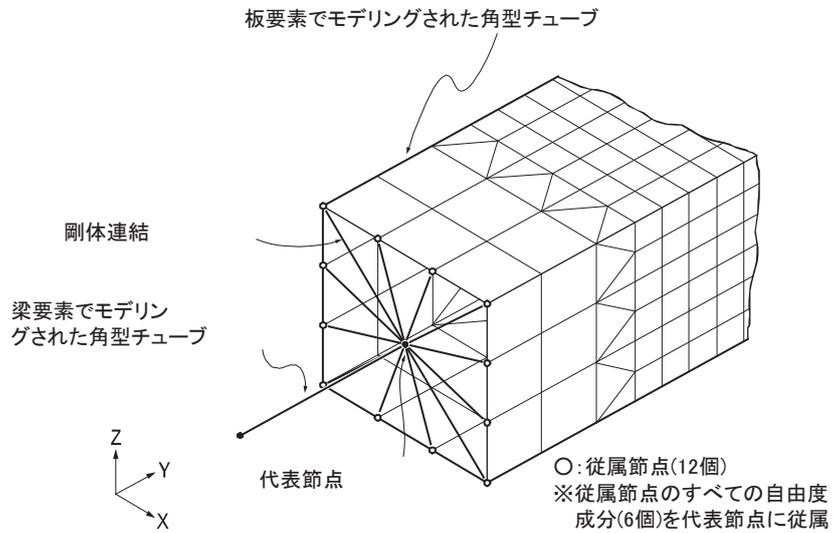
機構的な拘束条件を用いて、自由度を縮合すれば、解析時間を短縮できるので、たいへん効果的である。例えば、建物の構造解析時に床板を板要素(または平面応力要素)などでモデリングすると、各層当たりに多くの節点が必要となる。この時の水平方向の自由度だけを考慮しても節点数×3 ぐらいの自由度が増えるため、少しの層だけをモデリングしたとしても解析プログラムの解析能力を超えたり、解析が可能であっても相当な時間が必要となる。一般的に、解を求めるのに必要とする時間は、自由度の3乗に比例するため、解の精度に影響がなければ、自由度を少なくすることが効果的である。

図 5.9.5 は、**Rigid Body Connection** と **Rigid Plane Connection** 機能を用いた例を表したものである。

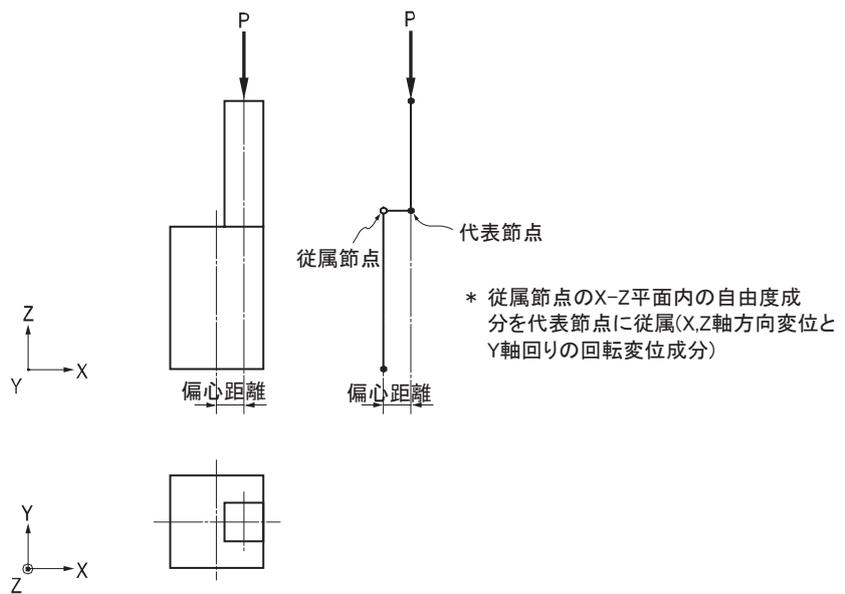
図 5.9.5(a)は、角型チューブの構造的挙動を詳細解析するために、詳細な検討が必要な部分に対しては板要素で細分化し、残りの部分は梁要素を角型チューブの中立軸線上にモデリングし、2つのモデル間を **Rigid Body Connection** 機能を用いて剛体連結した例である。

図 5.9.5(b)は、同一面内にある 2 本の柱が偏心している場合に、節点での偏心効果を考慮するために **Rigid Plane Connection** 機能を利用した例である。このように、任意平面内に剛体連結機能を使用する時には、必ず平面内の2つの並進変位成分と法線方向回りの回転変位成分に対して、機構的な拘束条件を与える。同様に、図 5.9.5(a)のようにあらゆる方向成分に対して剛体連結とする場合には、6 個の自由度のすべてに対して、拘束条件を与える。

幾何学的な拘束条件を動的解析モデルに適用する場合には、代表節点の位置が従属節点において入力したあらゆる質量成分(自重を質量に変換して考慮する場合には、自重による質量成分も含む)の質量中心(Mass Center)と、一致するように入力する必要がある。



(a) 角型チューブを梁要素と板要素で部位別にモデリングして剛体連結した場合(Rigid Body Connection)



(b) 2本の柱が偏している場合(Rigid Plane Connection)

図 5.9.5 幾何学的な拘束条件の適用例

5.10 支点の強制変位

On-line Manual の"
荷重>支点の強制変
位"を参照

支点の強制変位(Specified Displacements)は、拘束されている自由度の変位が予め分かっている時に、その変位条件下での構造的挙動を分析するのに使用する。

一般的な実務設計において、この機能が効果的に使用されるケースは、次の通りである。

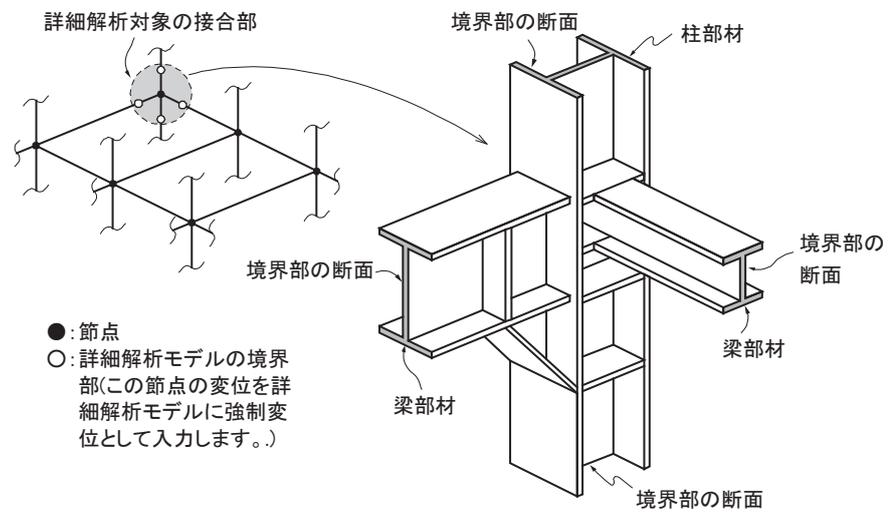
- 既存の構造物に変形が生じ、安全性を検討する場合
- 特定部位の挙動に対して、詳細モデルを用いて分析する場合に、あらかじめ構造物の全体モデルに対する解析を行い、該当部位の変位を詳細モデルの境界条件として入力する場合
- 構造物の支点の沈下を考慮した解析を行う場合

プログラムで、支点の強制変位は、荷重ケース別に入力できる。また、拘束されていない自由度に強制変位を入力すると、プログラム内部で自動的に支持条件を与えて強制変位を適用するようになる。

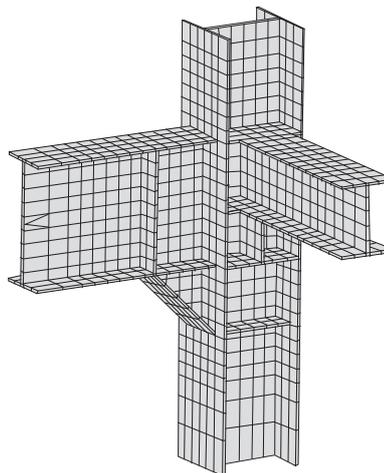
強制変位を入力する時は、微小な値であっても構造的挙動が大きく変わるため、できるだけ正確な値を与える必要があり、また、6 個の自由度に対して、すべて与えることが望まれる。変形が生じた構造物の安全性を評価する時、回転変位の測定が困難なため、並進変位だけで解析をした場合には、解析結果の変形形状が構造物の実際の変形形状を近似できているかを検討する必要がある。

特定部位の詳細解析のために全体モデルの解析結果から得られた変位を使用する場合、詳細解析モデルの境界面に位置した節点には、必ず 6 個の自由度のすべてに対して変位を入力する必要がある。さらに、詳細解析モデルのすべての荷重ケースに対しても、追加で入力する必要がある。

強制変位の入力は、一般的に全体座標系で入力しますが、節点に対して節点座標系を設定した場合には、節点座標系に従って入力する。



(a) 全体モデルと接合部の詳細図



境界部の断面に剛体連結条件(主節点、従属節点機能)を付与して、全体モデルで解析された変位を各断面の図心に位置した主節点に強制変位で入力します。

(b) 接合部に対する詳細解析モデル

図 5.10.1 強制変位機能を利用した接合部の詳細解析の例

図 5.10.1 は、構造物の隅角部の接合部に対する詳細解析を行った例であり、その手順は次の通りである。

1. 図 5.10.1(a)の左側の図のように、全体モデルに対する解析を行った後、詳細解析をする接合部と境界部分での変位を選ぶ。
2. 境界部分の 4 ヶ所において得られた 24 個(各節点当たり 6 個の成分)の変位成分を図 5.10.1(a)の右側の詳細モデルに入力する。
この時、詳細モデルの境界部分に代表節点(Master Node)と従属節点(Slave Nodes)を指定し、全体モデルの節点から得られた変位成分を、詳細モデルの全境界面に反映できるように、剛体連結機能("剛体連結"を参照)を利用すると便利である。^④ 剛体連結機能を利用することによる誤差を小さくするために、境界面は詳細解析の対象部位からできるだけ離れた位置に設ける。
3. 全体モデルで考慮された荷重ケースの中から、詳細解析モデルに含める荷重ケースを追加で入力して解析を実行する。

④ "代表節点と従属節点(剛体連結機能)"を参照

Ⅱ. 解析機能

Civil

Modeling, Integrated Design & Analysis Software

1. 概要

荷重条件下における構造物の実際の挙動は、厳密的には材料非線形性を有するようになるが、部材応力が設計基準で定める許容応力度の範囲内の場合は、ほとんど線形的な挙動をするため、通常的设计目的の構造解析では、部材の材料非線形性を考慮しない。

プログラムは線形解析をベースにしているが、引張または圧縮専用要素の使用、P-デルタ解析、大変形解析などの幾何学的な非線形性を考慮することができる。

プログラムで使用できる解析種類は以下の通りである。

プログラムの構造解析機能の具体的な内容は、次の通りである。

- 線形静的解析 (Linear Static Analysis)
- 線形動的解析 (Linear Dynamic Analysis)
 - 固有値解析 (Eigenvalue Analysis)
 - 応答スペクトル解析 (Response Spectrum Analysis)
 - 時刻歴応答解析 (Time History Analysis)
- 座屈解析 (Linear Buckling Analysis)
- 非線形静的解析 (Non-linear Static Analysis)
 - 座幾何学的非線形解析(Large Displacement Analysis)
 - P-デルタ解析
 - 材料非線形解析 (Material Nonlinear Analysis)
- 非線形動的解析 (Non-linear Dynamic Analysis)
 - 境界非線形時刻歴解析
 - 動的フレーム非線形解析
- 影響線解析 (Influence Line Analysis)
- 熱伝導解析 (Heat Transfer Analysis)
- 水和熱解析 (Hydration Heat Analysis)
- 施工段階解析 (Construction Stage Analysis)
- その他の解析機能
 - 構造物の支点沈下を自動考慮した解析
 - 合成断面の合成前・後の断面変化を考慮した解析
 - 最適設計法を用いた未知荷重の解析

2. 静的線形解析

静的線形解析(Linear Static Analysis)で使用する基本方程式は次の通りである。

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (2.1.1)$$

ここで、

$[K]$: 構造物の全体剛性マトリックス (Stiffness Matrix)

$\{U\}$: 変位ベクトル (Displacement Vector)

$\{P\}$: 荷重ベクトル (Load Vector)

3. 固有値解析

3.1 固有ベクトル解析

非減衰自由振動(Undamped Free Vibration)条件下のモード形状及び固有周期を求めるために使用する特性方程式は、次の通りである。

$$[K]\{\Phi_n\} = \omega_n^2 [M]\{\Phi_n\} \quad (3.1.1)$$

🔊 On-line Manual の"解析>固有値解析制御"を参照

ここで、

$[K]$: 構造物の剛性マトリックス(Stiffness Matrix)

$[M]$: 構造物の質量マトリックス(Mass Matrix)

ω_n^2 : n 番目モードの固有値(Eigenvalue)

$\{\Phi_n\}$: n 番目モードの固有ベクトル(Mode Vector)

固有値解析によって求まる構造物の主要な動的特性とは、固有モード(またはモード形状)、固有周期(または固有振動数)、および刺激係数(Modal Participation Factor)などであり、これらは構造物の質量と剛性により決まる。

固有モードは構造物が自由振動(または変形)する時の固有形状で、特定の形状に振動するために必要となるエネルギー(または力)が、最も小さいものから順に 1 次モード形状(または基本振動形状)、2 次モード形状、...、n 次モード形状と呼ぶ。

図 3.1.1 は、片持梁の振動モードを低次から(小さいエネルギーで変形させることができる形状から)順に表したものである。

固有周期は、該当のモード形状で 1 回振動する時に掛かる時間を意味する。

以下に、単一自由度系の固有周期を求める方法を示す。単一自由度系の運動方程式において、荷重と減衰項をゼロと仮定し自由振動方程式を構成すると、式(3.1.3)のような 2 階の微分方程式になる。

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (3.1.2)$$

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (3.1.3)$$

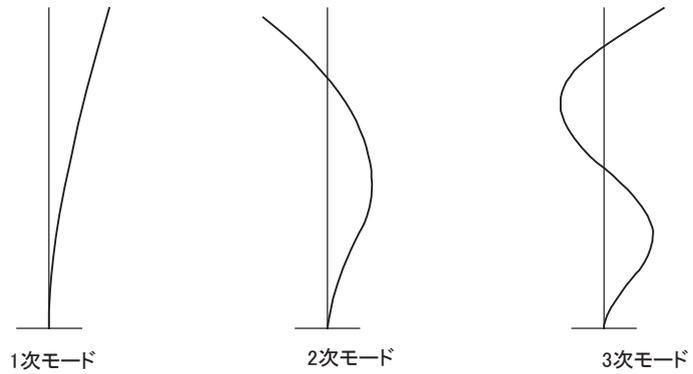
ここで、 u は振動による変位で、これを $u = A \cos \omega t$ (ここで、 A は振幅) と仮定すると、上式は式(3.1.4)のようになる。

$$(-m\omega^2 + k)A\cos\omega t = 0 \tag{3.1.4}$$

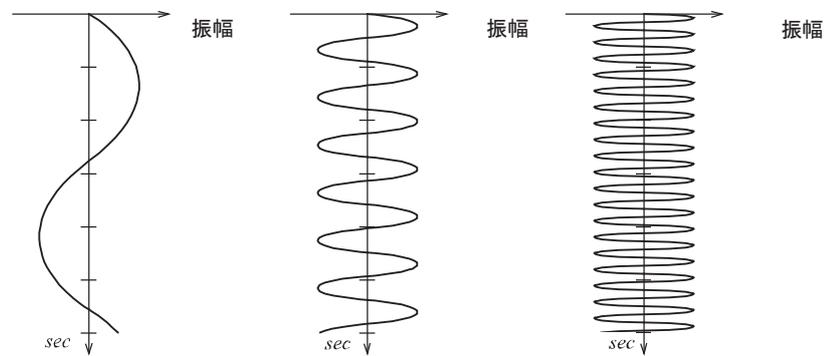
上式を常に満たすためには、左辺の括弧内の値が 0 にならなければならないので、固有値は式(3.1.5)のようになる。

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, f = \frac{\omega}{2\pi}, T = \frac{1}{f} \tag{3.1.5}$$

ここで、 ω^2, ω, f 及び T は、それぞれ固有値、固有円振動数、固有振動数、および固有周期である。



(a) 固有モード形状



$$\lambda_1 = 1.87510407$$

$$T_1 = 1.78702\text{sec}$$

$$\lambda_2 = 4.69409113$$

$$T_2 = 0.28515\text{sec}$$

$$\lambda_3 = 7.85475744$$

$$T_3 = 0.10184\text{sec}$$

$$T_i = \frac{2\pi}{\lambda_i^2} \left(\frac{mL^4}{EI} \right)^{1/2} : \text{細長い片持梁の固有周期}$$

ここで $L=100, E=1000000, I=0.1, m=0.001$

(b) 固有周期

図 3.1.1 均一断面の片持梁の固有モード形状と固有周期

モードの刺激係数は、該当モードの影響を全モードに対する割合で表したもので、次式のように表される。

$$\tau_m = \frac{\sum M_i \varphi_{im}}{\sum M_i \varphi_{im}^2} \quad (3.1.5)$$

ここで、

τ_m : モードの刺激係数(Modal Participation Factor)

m : 任意モード次数(Mode Number)

M_i : 任意 i 位置の質量 (Mass)

φ_{im} : 任意 i 位置の m 次モードベクトル (Mode Shape)

$$M_m = \frac{[\sum \varphi_{im} M_i]^2}{\sum \varphi_{im}^2 M_i} \quad (3.1.6)$$

ここで、

M_m : モード別の有効質量(Effective Modal Mass)

任意の質点の自由度が拘束されている場合、その質点の質量は総質量には反映されるが、自由度のモードベクトルが抑えられているため、質量成分が有効質量に含まれない。したがって、モード別の有効質量を計算して全質量に対する比率を評価する場合は、質量が入力された成分の自由度を拘束しないようにする必要がある。

一方、建築構造物の地下部分の水平変位が拘束される場合は、該当の層の水平方向の質量成分を入力しなくても良い。

構造物の動的挙動を正しく分析するためには、固有値を決定する質量と剛性を正確に入力することが最も重要である。剛性は構造部材を有限要素でモデリングすると比較的に実状に近く考慮できるが、質量は構造部材の質量が全体質量に比べて少ないため、床スラブなどモデル化しない部材の質量は正確に計算して入力することが重要になる。

質量には節点当たり6つの自由度成分、すなわち、3つの並進成分と3つの回転成分を入力する。回転質量成分は、回転慣性モーメント(Rotational Mass Moment of Inertia)とも呼ばれるもので、地震応答解析では、地震力が並進方向の地動加速度として入力されるため、直接的には応答値に影響を及ぼさないが、構造物が不整形の場合(重心と剛心が一致しない場合)には、モード形状を歪める(ねじれる)ことによって応答に影響を及ぼす。

質量成分は、次のように計算する。(図 3.1.2 参照)

並進質量成分

$$\int dm \quad (3.1.7)$$

回転慣性モーメント

$$\int r^2 dm \quad (3.1.8)$$

ここで、

r : 重心から各質点までの距離

質量の入力単位系は、重量を重力加速度で除した単位([W*(T²/L)])であり、回転慣性モーメントの単位系は、質量に長さ単位の 2 乗を乗じた単位([W*(T²/L)*L²])である。例えば、MKS 単位系または英国単位系の場合は、重量を重力加速度で除した値を質量として入力する必要があるが、SI 単位系の場合は、MKS 単位系による重量をそのまま質量として入力し、弾性係数と荷重は、MKS 単位系による値に重力加速度を乗じて入力する。

プログラムでは、解析作業の効率性を考慮して集中質量(Lumped Mass)を使用している。

質量データは、メインメニューの **モデル>質量> 節点質量、剛床質量、または荷重を質量に変換** から入力する。

固有値解析の手法には、Subspace Iteration 法と、大規模モデルの解析に適した Lanczos 法がある。

ρ : 単位面積当たり質量 \blacklozenge : 質量中心

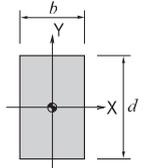
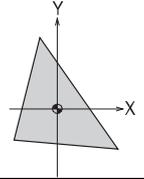
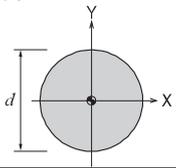
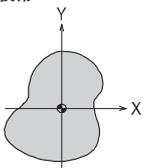
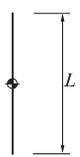
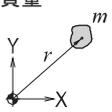
区分	集中質量	回転慣性モーメント
長方形 	$M = \rho b d$	$I_m = \rho \left(\frac{bd^3}{12} + \frac{db^3}{12} \right)$ $= \frac{M}{12} (b^2 + d^2)$
三角形 	$M = \rho \times \text{三角形の面積}$	$I_m = \rho (I_x + I_y)$
円形 	$I_m = \rho \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)$	$I_m = \rho \left(\frac{\pi d^4}{32} \right)$
一般形 	$M = \rho \times \int dA$	$I_m = \rho (I_x + I_y)$
線形 	$\rho_L = \text{単位長さ当たり質量}$ $M = \rho_L \times L$	$I_m = \rho_L \left(\frac{L^3}{12} \right)$
偏心質量 	偏心質量: m $M = m$	偏心質量の重量中心に 対する回転慣性 モーメント: I_o $I_m = I_o + mr^2$

図 3.1.2 質量データの計算方法

3.2 Ritz ベクトル解析

Ritz ベクトル解析は構造物の動的特性表現する固有振動数とモード形状を求める方法で、固有ベクトル解析より効率的な方法であると知られている。この方法は、多自由度構造物のモード形状を仮定して単自由度構造物に置換して固有振動数を求めるレーリー-Ritz 方法を拡張したものである。

N 自由度の構造物の運動方程式で変位ベクトルが次のように p 個の Ritz ベクトルの組合せで表現されると仮定する。この時、 P は n より等しいか小さい。

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = p(t) \quad (3.2.1)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^p \psi_i z_i(t) = \Psi z(t) \quad (3.2.2)$$

ここで、

M : 構造物の質量マトリックス

C : 構造物の減衰マトリックス

K : 構造物の剛性マトリックス

$U(t)$: n 自由度構造物の変位ベクトル

$Z(t)$: 一般化座標 (generalized coordinate)

$P(t)$: 動的荷重ベクトル

ψ_i : i 番目 Ritz ベクトル

$z_i(t)$: i 番目一般化座標

$$\Psi = [\psi_1 \cdots \psi_i \cdots \psi_p]^T : \text{Ritz ベクトル行列}$$

上記仮定により、 n 自由度の運動方程式は次のように p 自由度の運動方程式に縮小される。

$$\tilde{M}\ddot{z}(t) + \tilde{C}\dot{z}(t) + \tilde{K}z(t) = \tilde{p}(t) \quad (3.2.3)$$

ここで、

$\tilde{M} = \Psi^T M \Psi$: 縮小された運動方程式の質量マトリックス

$\tilde{C} = \Psi^T C \Psi$: 縮小された運動方程式の減衰マトリックス

$\tilde{K} = \Psi^T K \Psi$: 縮小された運動方程式の質量マトリックス

$\tilde{p}(t) = \Psi^T p(t)$: 縮小された運動方程式の動的荷重ベクトル

縮小された運動方程式に対して次のような固有値式を構成して解析を行う。

$$\tilde{K}\tilde{\phi}_i = \tilde{\omega}_i^2 \tilde{M}\tilde{\phi}_i \quad (3.2.4)$$

ここで、

$\tilde{\varphi}_i$: 縮小された運動方程式のモード形状

$\tilde{\omega}_i$: 縮小された運動方程式の固有振動数

上記固有値式を用いると、古典的減衰行列を仮定する時に縮小された運動方程式を次のように各モードの単自由度運動方程式に分離することができる。

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\tilde{\omega}_i\dot{q}_i(t) + \tilde{\omega}_i^2 q_i(t) = \frac{\Psi^T \tilde{p}_i(t)}{\Psi^T M \Psi} \quad (3.2.5)$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^p \tilde{\varphi}_i q_i(t) \quad (3.2.6)$$

ここで、

$q_i(t)$: i 番目モード座標

ξ_i : i 番目モード減衰比

縮小された運動方程式の固有値解析の解 $\tilde{\omega}_i$ は元の運動方程式の固有振動数に対する近似解を意味する。

$$\omega_i = \tilde{\omega}_i \quad (3.2.7)$$

ここで、

ω_i : i 番目モード減衰比

構造物のモード形状は、運動方程式の変位ベクトルとモード座標の間のマッピング (Mapping) 関係を定義するベクトルである。したがって、Ritz ベクトル解析による近似的モード形状は元の運動方程式の変位ベクトル $u(t)$ とモード座標 $q_i(t)$ の間の以下のような関係式によって定義される。

$$u(t) = \Psi z(t) = \sum_{i=1}^p [\Psi \tilde{\varphi}_i] q_i(t) \quad (3.2.8)$$

したがって、i 番目モード形状の近似解は次のように定義される。

$$\varphi_i = \Psi \tilde{\varphi}_i \quad (3.2.9)$$

ここで、

φ_i : i 番目モード形状の近似解

Ritz ベクトル解析による近似的モード形状ベクトルは固有値解析によるものと同じく、元の質量及び剛性行列に対して直交性を有する。

Ritz ベクトル解析による固有振動数とモード形状の近似解は一般固有値解析の解と同じく、モード刺激係数(modal participation factor)とモード別有効質量(effective modal mass)の計算に使用される。

Ritz ベクトル解析結果を基礎としてモーダル法で時刻歴解析を行う場合には式(3.2.5)で表す運動方程式を用いる。

構造物の変形形状を仮定する Ritz ベクトルは一般的に構造物に加わる荷重に対する変位を反復的に計算して生成することになる。

まずはユーザーが初期荷重ベクトル(initial load vector)を選定する。ここでは、動的荷重は時間によっては変化するが、各自由度別の分布はユーザーが指定したベクトルに従うことが前提である。

次は選定された初期荷重ベクトルに対して一次的に静的解析を行って1回目の Ritz ベクトルを求める。

$$K\psi^{(1)} = r^{(1)}, \quad \psi^{(1)} = K^{-1}r^{(1)} \quad (3.2.10)$$

ここで、

K : 構造物の剛性マトリックス

$\psi^{(1)}$: 1回目の Ritz ベクトル

$r^{(1)}$: ユーザーが指定した初期荷重ベクトル

このようにして求められた1回目の Ritz ベクトルを構造物の変位として仮定する。しかし、上記の静的荷重は構造物の動的応答によって発生する慣性力を無視している。したがって、追加的な反復計算を通じて変位を計算するようになる。とりあえず、構造物の加速度分布は既に計算された変位ベクトル、即ち、1回目の Ritz ベクトルに従うと仮定する。加速度によって発生する慣性力は質量ベクトルをかけることで計算でき、この慣性力が構造物に追加的な変位を発生させる荷重として作用すると仮定して再び静的解析を行う。

$$K\psi^{(2)} = M\psi^{(1)}, \quad \psi^{(2)} = K^{-1}M\psi^{(1)} \quad (3.2.11)$$

ここで、

M : 構造物の質量マトリックス

$\psi^{(2)}$: 2つ目の Ritz ベクトル

このように求められた2つ目の Ritz ベクトルもまた、静的釣り合いだけを表現する上式で考慮していない加速度分布を表すと仮定して、上記の仮定を繰り返しながらユーザーが指定した個数だけ Ritz ベクトルを計算する。

ユーザーは複数の初期荷重ベクトルを指定することができ、各々に対して生成する Ritz ベクトル個数を個別に指定することができる。ただし、生成する Ritz ベクトルの全体

個数は運動方程式に存在する実際モード個数を超えることはできない。また、反復過程で既に生成された Ritz ベクトルに対して線形従属(linearly dependent)的な Ritz ベクトルが計算されれば、これを削除するようになる。線形独立(linearly independent)的な Ritz ベクトルが計算できなくなった場合には、反復過程を終了する。このことは、ユーザーが指定した初期荷重ベクトルのみでは、指定した個数分のモードを求められないことを意味する。

ユーザーが選定できる初期荷重ベクトルは全体座標系 X、Y 及び Z 方向地盤加速度により慣性力、ユーザーが入力した全ての静的荷重条件(static load case)、非線形連結要素の部材力ベクトル(nonlinear link force vector)である。

慣性力は主に該当方向の地盤加速度による変位に関する Ritz ベクトルを求めるために使用される。

ユーザー入力静的荷重条件は特定な分布を有する動的荷重に対する Ritz ベクトルを求める時に使用される。通常の静的荷重条件(死荷重、活荷重、風荷重)を使用するか、Ritz ベクトル生成のための目的で人為的に静的荷重条件を作って使用することができる。

非線形連結要素の部材力ベクトルは各非線形連結要素で発生する部材力の構造物に対する影響を反映する Ritz ベクトルを生成するためである。要素が有する6つの変位自由度でユーザーがチェックした項目に対して個別に単位力を有する初期荷重ベクトルを構成して Ritz ベクトル生成に利用する。(しかし、非線形連結要素を含む構造物の解析では、必ずこれが利用できることではなく、ユーザーの判断によって与えられた解析条件での構造物変形状を十分に反映できる初期荷重ベクトルを選定する。)

固有値解析と比較する時に Ritz ベクトル解析の長所は次の通りである。

Ritz ベクトルは少ない数のモードを計算する場合でも、実際荷重に対する静的解析の解に基づくために、その過程に高次モードの影響が自動的に反映されている。例えば、Ritz ベクトル解析によって求められた1次モードのモード形状と固有値解析によって求められた1次モードのモード形状の違いは、前者に反映された高次モードの成分を意味するとみなせることである。又、構造物に適用する荷重によって加振されるモード形状のみが計算されるために不必要なモードの計算が排除される。

以上のような原理で Ritz ベクトル解析は正確な解析結果を得るために必要なモード個数を少なくすることができる。例えば、特定なモード別有効質量の合計を確保するために必要とするモードの個数は一般的に Ritz ベクトル解析の場合が固有値解析の場合より少ないと知られている。

4. 減衰

4.1 概要

動的解析で構造物の減衰は大きく次のように分類することができる。

- 比例減衰
 - ✓ 質量比例型
 - ✓ 剛性比例型
 - ✓ レーリー型
 - ✓ Caughey 型
- 非比例減衰
 - ✓ エネルギー比例型
- 要素別減衰
 - ✓ 粘性減衰 (Voigt 型、Maxwell 型)
 - ✓ 履歴型減衰
 - ✓ 摩擦減衰
 - 内部摩擦減衰(材料減衰)
 - 外部摩擦減衰
 - すべり摩擦減衰
 - ✓ 逸散減衰

時刻歴解析で構造物の減衰は運動方程式を構成する減衰マトリックスを剛性と質量の比率で表現できるかの可否によって、大きく比例減衰(Proportional Damping)と非比例減衰(Non-proportional Damping)に区分することができる。

非比例減衰は、部分別に異なる減衰特性を持つ材料を使うとか、付加的な減衰装置が設置した場合にそれぞれの減衰を別々に評価した各減衰モデルから全体の減衰マトリックスを構成する方法である。しかし、実際の構造において減衰は非常に複雑な問題で、正確な減衰メカニズムは把握しにくい場合が多い。

したがって、解析時は固有振動数解析から得られた支配モード成分の減衰特性を適切に表現して得られた比例減衰で、減衰を仮定する場合が一般的である。比例減衰は‘古典的減衰(Classical Damping)’とも呼ばれ、固有モード行列を減衰行列の左右に掛ければ、対角成分だけを持つ行列を求めることができるため、モード別に減衰定数を分離することができる。

一方、非比例減衰を考慮する場合は、モード別に減衰定数を分離することができないので、構造物の固有値解析を通じて得たモード形状に基づき、ひずみエネルギー概念を取り入れモード別の減衰定数を求めることができる。

プログラムでは、応答スペクトル解析では**荷重> 応答スペクトル解析データ> 応答スペクトル荷重ケース**から設定し、時刻歴解析では**荷重> 時刻歴応答解析データ> 時刻歴荷重ケース**から設定する。

一方、時刻歴解析の解析手法によって、設定可能な減衰手法は次のようになる。

1. 応答スペクトル解析およびモード重ね合わせ法による時刻歴解析の減衰設定

- モード減衰
- レーリー減衰(質量比例型、剛性比例型、レーリー型)
- ひずみエネルギー比例減衰

2. 直接積分法による時刻歴解析の減衰設定

- モード減衰
- レーリー減衰(質量比例型、剛性比例型、レーリー型)
- ひずみエネルギー比例減衰
- 要素別レーリー減衰

また、汎用リング要素に線形粘性減衰であるダンパーを設定し、構造物に付加的に設置される線形減衰機(Kelvin Model)をモデリングすることもできる。

このとき、解析手法が応答スペクトル解析やモード重ね合わせ法の場合は、減衰手法としてひずみエネルギー比例減衰だけが使用でき、減衰はモード別の減衰定数として考慮される。

一方、解析手法が直接積分法の場合は、減衰手法がレーリー減衰、要素別レーリー減衰の場合、要素減衰マトリックスから減衰が直接に考慮でき、減衰手法がひずみエネルギー比例減衰の場合は、モード別の減衰定数として間接的に考慮できる。

以下にモード重ね合わせ法と直接積分法における減衰の考慮方法について説明する。構造物の運動方程式は次のようになる。

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = p(t) \quad (4.1.1)$$

ここで、

M : 質量マトリックス

C : 減衰マトリックス

K : 剛性マトリックス

$u(t)$, $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$: 節点の変位、速度、加速度

$p(t)$: 動的荷重

応答スペクトル解析及びモード重ね合わせ法による時刻歴解析の概念は、式(4.1.1)をモードの直交性を利用してモード分解し、式(4.1.2)のようにモード分解された各モードの運動方程式の解を重ね合わせて解析する。したがって、先に固有値解析を行う必要がある。

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = \frac{\phi_i^T p(t)}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (4.1.2)$$

ここで、

ϕ_i : i -番目モードのモードベクトル

ξ_i : i -番目モードの減衰定数

ω_i : i -番目モードの固有振動数

$q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$: i -番目モードの一般化変位、速度、加速度

したがって、応答スペクトル解析及びモード重ね合わせ法では、減衰手法に関わらずにモードの減衰定数 ξ_i によって減衰を考慮することができる。

直接積分法による時刻歴解析は数値積分法によって 2 系の運動方程式 (4.1.1) の解を直接求める。したがって、運動方程式の構成時に減衰マトリックスを構成する必要がある。

4.2 比例減衰

質量比例型減衰は空気抵抗などによる外部の粘性減衰を表現したもので、減衰マトリックスが質量に比例すると仮定している。一方、剛性比例型減衰は逸散減衰効果(振動エネルギーの地盤への放出効果)を剛性に比例すると仮定したもので、高次モードの減衰を過大評価する恐れがある。

比例減衰マトリックス C の一般形は、Caughey によって次式のように定義できる。

$$C = M \cdot \sum_{j=0}^{N-1} a_j (M^{-1}K)^j \quad (4.2.1)$$

ここで、

j, N : 節点の自由度(モード次数)

式(4.2.1)で、 $M^{-1}K$ は次のように非減衰系の自由振動式から求めることができる。

$$M\{\ddot{y}\} + K\{y\} = 0 \quad (4.2.2)$$

$$\{y\} = \{u\} e^{i\omega x} \quad (4.2.3)$$

で仮定して、これを式(4.2.2)に代入すれば、

$$(-\omega^2 M + K)\{u\} = \{0\} \quad (4.2.4)$$

となり、式(4.2.4)から $M^{-1}K = \omega^2$ になる。ここで、 ω^2 はモード数だけ存在し、モード次数を考慮して ω_s^2 と表記する。

式(4.2.2)~(4.2.4)から求めた $M^{-1}K$ を式(1)に代入し、左側に $\{u_s\}^T$ を掛けて、右側に $\{u_s\}$ を掛けると、式(1)は次のようになる。

$$\{u_s\}^T C \{u_s\} = C_s = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \cdot \omega_s^{2j} \cdot \{u_s\}^T M \{u_s\} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j \cdot \omega_s^{2j} \cdot M_s \quad (4.2.5)$$

また、 s 次モード減衰定数 ξ_s は、次のように表現することができる。

$$C_s = 2\xi_s \cdot \omega_s \cdot M_s \quad (4.2.6)$$

式(4.2.5), (4.2.6)で N 個の固有モードに対する減衰定数 ξ_s は次のようになる。

$$\begin{aligned} \xi_s &= \frac{C_s}{2\omega_s \cdot M_s} = \frac{1}{2\omega_s} \sum a_j \omega_s^{2j} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_s} + a_1 \cdot \omega_s + a_2 \cdot \omega_s^3 + \dots + a_{N-1} \cdot \omega_s^{2N-3} \right), \quad s = 1 - N \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

質量比例型、剛性比例型の減衰定数および減衰マトリックスは次のように表現することができる。

$$\xi_s = \frac{a_0}{2\omega_s}, \quad C = a_0 M = 2\xi_s \omega_s M : \text{質量比例型} \quad (4.2.8)$$

$$\xi_s = \frac{a_1 \cdot \omega_s}{2}, \quad C = a_1 K = \frac{2\xi_s}{\omega_s} K : \text{剛性比例型} \quad (4.2.9)$$

質量比例型、または剛性比例型減衰はプログラムの応答スペクトル荷重ケース、または時刻歴荷重ケースから減衰手法をレーリー減衰にし、質量比例型、剛性比例型を選択して設定する。

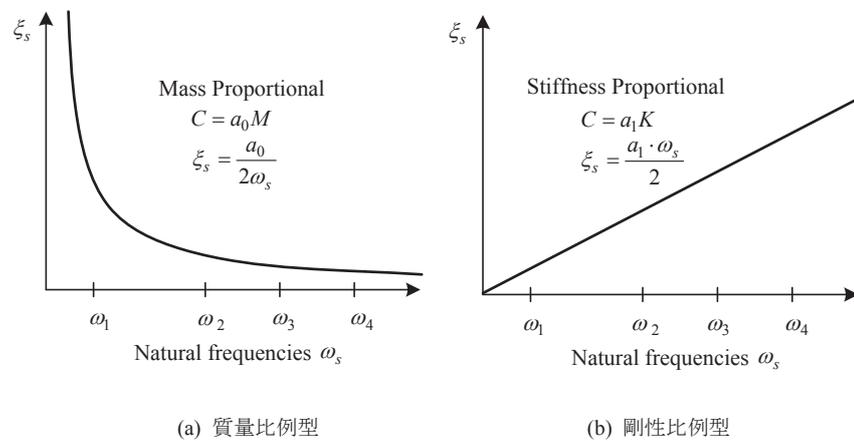


図 4.2.1 モード別の減衰率

4.3 レーリー減衰

4.3.1 概要

レーリー型減衰は剛性比例型減衰での高次モードの減衰定数を修正したもので、図 4.3.1(b)のように減衰マトリックスを構造物の質量マトリックスと剛性マトリックスの線形和で表現する。i 次モードの減衰定数 ξ_i と固有振動数 ω_i 及び j 次モードの減衰定数 ξ_j と固有振動数 ω_j が与えられた場合、レーリー型減衰の減衰マトリックスは次のようになる。ここで、i, j 次の 2 つのモードは構造物の支配的なモードにする必要がある。

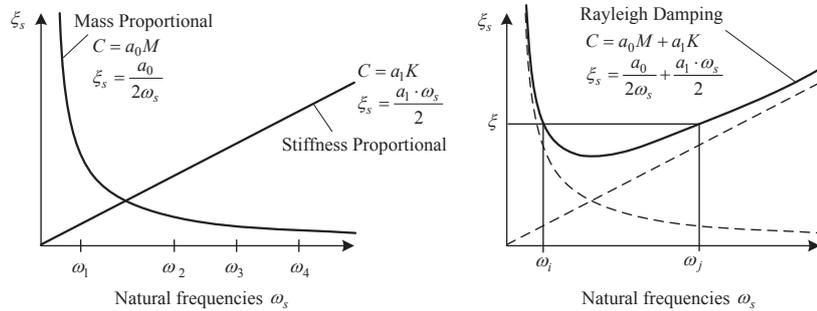
$$C = a_0 M + a_1 K \tag{4.3.1}$$

$$\xi_s = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_s} + a_1 \cdot \omega_s \right) \tag{4.3.2}$$

ここで、

$$a_0 = \frac{2 \cdot \omega_i \cdot \omega_j (\xi_i \cdot \omega_j - \xi_j \cdot \omega_i)}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)} \tag{4.3.3}$$

$$a_1 = \frac{2 (\xi_j \cdot \omega_j - \xi_i \cdot \omega_i)}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)} \tag{4.3.4}$$



(a) 質量比例型と剛性比例型減衰

(b) レーリー減衰

図 4.3.1 モード別の減衰定数と固有振動数との関係

a_0 と a_1 は、応答スペクトル荷重ケース、または時刻歴荷重ケースから、次のように設定することができる。

1. 直接入力

ユーザーが a_0, a_1 値を直接入力する。

2. モード減衰定数から自動計算

固有値解析から得られた振動数、または固有周期、そして i, j 次モードの減衰定数をユーザーが入力すると、式(4.3.3),(4.3.4)を利用して a_0, a_1 値を自動計算する。

たとえば、 i, j 次の振動数とモードの減衰定数がそれぞれ $f_i = 1.0\text{Hz}, f_j = 1.25\text{Hz}$ $\xi_i = 0.05, \xi_j = 0.05$ の場合、 a_0, a_1 値を求めると、次のようになる。

➤ 固有振動数

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{1.0} = 6.28, \omega_2 = \frac{2\pi}{0.8} = 7.85$$

➤ 式(4.3.3), (4.3.4)を利用して、 a_0, a_1 を手計算

$$a_0 = \frac{2 \cdot 6.28 \cdot 7.85 (0.05 \cdot 7.85 - 0.05 \cdot 6.28)}{7.85^2 - 6.28^2} = 0.349$$

$$a_1 = \frac{2(0.05 \cdot 7.85 - 0.05 \cdot 6.28)}{7.85^2 - 6.28^2} = 0.007$$

➤ プログラムでの a_0, a_1 の自動計算

レーリー型減衰は応答スペクトル解析、モード重ね合わせ法、直接積分法で使用でき、応答スペクトル荷重ケース、または時刻歴荷重ケースから、減衰手法をレーリー減衰にし、質量比例型、剛性比例型の両方を選択して設定する。解析方法ごとのレーリー減衰の考慮は次のようになる。

4.3.2 応答スペクトル法・モード法におけるレーリー減衰

応答スペクトル解析およびモード重ね合わせ法では構造物の運動方程式を固有値解析時に設定したモード数だけ分解し、各モードの運動方程式を重ね合わせて解析する。したがって、レーリー型減衰の場合は、振動時に支配的な 2 つのモードだけで決まる a_0, a_1 値を式(4.3.2)に代入し、解析時に考慮するモード数だけの減衰定数を求める。

a_0, a_1 値を利用しモード別の減衰定数を求める方法は以下ようになる。

例えば、 $a_0 = 0.35, a_1 = 0.005$ で、解析時に 3 次モードまでを考慮する場合、モード別の減衰定数は次のようになる。ただし、固有振動数は $\omega_1 = 4.59215$ 、 $\omega_2 = 9.81814$ 、 $\omega_3 = 14.57793$ と仮定する。

- 1、2、3 次モードの減衰定数の計算

$$\xi_s = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_s} + a_1 \cdot \omega_s \right)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.59215} 0.35 + 0.005 \cdot 4.59215 \right) = 0.04959$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9.81814} 0.35 + 0.005 \cdot 9.81814 \right) = 0.04237$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{14.57793} 0.35 + 0.005 \cdot 14.57793 \right) = 0.04845$$

- プログラムでの出力結果(Output File)

RAYLEIGH DAMPING COEFFICIENT, TIME LOADCASE = 1		

MASS COEFFICIENT. : 0.35000		
STIFFNESS COEFFICIENT. : 0.00500		

MODE NO.	FREQUENCY [RAD/SEC]	DAMPING RATIO

1	4.59215E+00	4.95889E-02
2	9.81814E+00	4.23695E-02
3	1.45779E+01	4.84493E-02

ただし、上記のように求めたモード別の減衰定数で $\xi_s > 1$ の場合は $\xi_s = 0.9999$ 、 $\xi_s < 0$ の場合は $\xi_s = 0.0$ と処理する。

4.3.3 直接積分法におけるレーリー減衰

直接積分法でのレーリー型減衰は振動時に支配的な 2 つのモードだけで決まる a_0, a_1 値を利用し、 $C = a_0 M + a_1 K$ の減衰マトリックスを作成して運動方程式を構成し数値積分法で解を求める。

非線形動的解析で部材が塑性領域に入った場合、減衰マトリックス $C = a_0 M + a_1 K$ の剛性 K を初期状態(弾性状態)のままにすると、減衰力が過大評価される恐れがある。

プログラムでは部材が降伏して剛性が更新されれば、更新された剛性を減衰マトリックスの構成時に反映することができる。減衰マトリックス構成時の剛性の更新はレーリー型減衰と要素別レーリー減衰型にだけ適用できる。

減衰マトリックスの更新は時刻歴荷重ケースで減衰手法をレーリー減衰、または要素別レーリー減衰にし、減衰行列の更新を **Yes** にすることで設定する。**No** を選択すると、部材の降伏状態に関わらず、初期剛性から減衰マトリックスを構成する。

4.4 歪エネルギーに基づいたモード減衰

4.4.1 概要

実際の構造物は材料によって異なる減衰特性を持ち、特定位置に減衰装置を設置する場合もある。プログラムでは要素別レーリー減衰を利用し、要素別に異なる減衰特性を指定することができる。しかし、この場合は減衰マトリックスが非古典的な減衰となり、モード分離ができない。したがって、応答スペクトル解析及びモード重ね合わせ法の場合は、要素別に異なる減衰特性を考慮するためにひずみエネルギーの概念に基づいたモード別の減衰定数を適用する。

ひずみエネルギーによるモード減衰は応答スペクトル解析及びモード重ね合わせ法、直接積分法の時刻歴解析で使用することができる。ひずみエネルギーによるモード減衰は応答スペクトル荷重ケース、または時刻歴荷重ケースで減衰手法をひずみエネルギー比例減衰にして設定する。ただし、直接積分法の時刻歴解析でひずみエネルギー比例減衰を考慮する場合は、減衰マトリックスがフルの形となるので、モード重ね合わせ法に比べて計算時間が長くなる。

粘性減衰を持つ単自由度振動系の減衰定数は、以下のように調和運動(harmonic motion)における消散エネルギー(dissipated energy)と構造物に保存されるひずみエネルギー(strain energy) の間の比率から定義することができる。

$$\xi = \frac{E_D}{4\pi E_S} \quad (4.4.1)$$

ここで、
 E_D : 消散エネルギー
 E_S : ひずみエネルギー

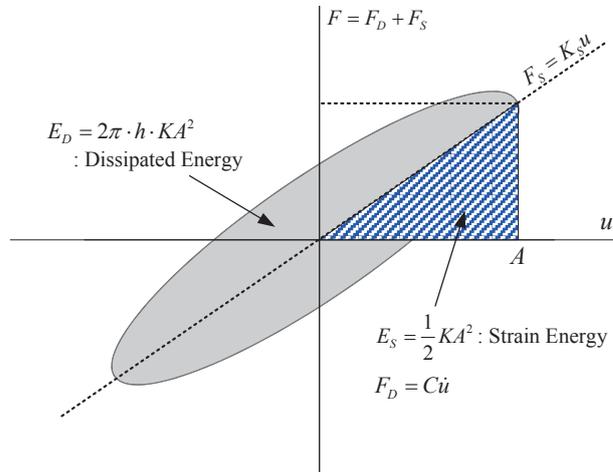


図 4.4.1 消散エネルギーとひずみエネルギー

多自由度系において、特定モードの動的挙動は該当する固有振動数を持つ単自由度系の動的挙動から把握することができる。この時、要素の消散エネルギーとひずみエネルギーは以下の2つの仮定から算定できる。

1つは、構造物の変形はモード形状に比例すると仮定する。i-番目のモードだけで調和振動する場合、要素の節点変位と速度ベクトルは次のようになる。

$$\begin{aligned} u_{i,n} &= \phi_{i,n} \sin(\omega_i t + \theta_i) \\ \dot{u}_{i,n} &= \omega_i \phi_{i,n} \cos(\omega_i t + \theta_i) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

ここで、

$u_{i,n}$: i-番目モードの振動による n-番目要素節点変位

$\dot{u}_{i,n}$: i-番目モードの振動による n-番目要素節点速度

$\phi_{i,n}$: n-番目要素の自由度に該当される i-番目モードの形状

ω_i : i-番目モードの固有振動数

θ_i : i-番目モードの位相角(phase angle)

2つは、要素の減衰は要素剛性に比例する粘性減衰と仮定する。

$$C_n = \frac{2h_n}{\omega_i} K_n \quad (4.4.3)$$

ここで、

C_n : n-番目要素の減衰マトリックス

K_n : n-番目要素の剛性マトリックス

h_n : n-番目要素の減衰定数

上記の式の仮定によって、要素の消散エネルギーとひずみエネルギーは次のように示すことができる。

$$\begin{aligned} E_D(i, n) &= \pi u_{i,n}^T C_n \dot{u}_{i,n} = 2\pi h_n \phi_{i,n}^T K_n \phi_{i,n} \\ E_S(i, n) &= \frac{1}{2} u_{i,n}^T K_n u_{i,n} = \frac{1}{2} \phi_{i,n}^T K_n \phi_{i,n} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

ここで、

$E_D(i, n)$: i -番目モードの振動による n -番目要素の消散エネルギー

$E_S(i, n)$: i -番目モードの振動による n -番目要素のひずみエネルギー

全体構造物の i -番目モード減衰定数はすべての要素の i -番目モードに該当するエネルギーの和で計算することができる。

$$\xi_i = \frac{\sum_{n=1}^N E_D(i, n)}{4\pi \cdot \sum_{n=1}^N E_S(i, n)} = \frac{\sum_{n=1}^N h_n \phi_{i,n}^T K_n \phi_{i,n}}{\sum_{n=1}^N \phi_{i,n}^T K_n \phi_{i,n}} \quad (4.4.5)$$

4.4.2 減衰の設定と計算方法

ひずみエネルギーに基づくモード減衰の設定は、以下の通りである。

先に、異なる減衰特性を持つ要素と境界をグループ定義する。**モデル> 材料&断面 > グループ減衰**から、指定された要素と境界条件の減衰定数のひずみエネルギー比例減衰に要素グループと境界グループ別に指定する減衰定数を入力する。要素グループと境界グループに入らないものの減衰定数は指定されていない要素と境界条件の減衰定数のひずみエネルギー比例減衰から入力する。

固有値解析を行うと、定義した要素グループと境界グループ別の減衰定数を利用してひずみエネルギーに基づくモード別の減衰定数を計算する。計算されたモード別の減衰定数は、**グループ減衰に基づいたモード別の減衰定数のモード別の減衰定数**から計算された結果を確認することができる。グループ減衰で使用された時のみ計算するを選択すると、時刻歴解析で減衰手法をひずみエネルギー比例減衰に指定した場合にだけ、モード別の減衰定数を計算する。

(a) 要素グループ・境界グループ別の減衰定数

(b) ひずみエネルギーに基づくモード別の減衰定数

モード番号	振動数 (Hz)	周期 (sec)	M.P.M. X 00	M.P.M. Y 00	M.P.M. Z 00	モード別の減衰定数
1	0.024530	40.76569	0.00000	3.62040	0.00000	0.029994
2	0.029946	33.39500	97.0899	0.01488	0.01209	0.029970
3	0.020406	22.80864	0.01510	94.2815	0.00000	0.020096
4	0.068582	14.58104	0.15074	0.00000	1.22295	0.020029
5	0.091786	10.89486	1.06808	0.00000	0.38452	0.030006
6	0.129037	7.749699	0.00000	0.41261	0.00000	0.030282
7	0.261193	3.828584	0.00193	0.00000	19.5914	0.030097
8	0.343238	2.913431	0.00042	0.00000	77.2813	0.030385

図 4.4.2 ひずみエネルギー比例減衰の設定とモード別の減衰

応答スペクトル解析及びモード重ね合わせ法では、構造物の運動方程式をモード別に分解し、各モードの運動方程式にひずみエネルギーに基づき求めたモード別の減衰定数 ξ_i を適用して解を求める。

直接積分法の時刻歴解析では、ひずみエネルギーに基づき求めたモード別の減衰定数 ξ_i と固有振動数 ω_i 、モード行列などを利用して全体構造物の減衰マトリックスを作成し運動方程式を構成する。

4.5 モード減衰

モード別の減衰はモード別にユーザーが直接減衰定数を定義し、定義されたモード別の減衰定数によってモード別の応答を計算する。モード別の減衰は、応答スペクトル解析、モード重ね合わせ法、直接積分法の時刻歴解析で使用できる。ただし、直接積分法でモード別の減衰を考慮する場合は、減衰マトリックスが非対称マトリックスとなり、モード重ね合わせ法に比べて計算時間が長くなる恐れがある。

モード別の減衰の設定は応答スペクトル荷重ケース、または時刻歴荷重ケースから、減衰手法をモード減衰にし、**モード別の減衰定数入力**テーブルからモード別の減衰定数を入力する。ここで指定しないモードには、**全モードに対する減衰定数**で入力した値が適用される。

応答スペクトル解析とモード重ね合わせ法では構造物の運動方程式をモード別に分解し、各モードの運動方程式にユーザーが直接入力したモード別の減衰定数 ξ_s を適用して解を求める。

直接積分法による時刻歴解析では入力されたモード別の減衰定数 ξ_s と固有振動数 ω_s 、そしてモードベクトルなどを利用して全体構造物の減衰マトリックスを作成し運動方程式を構成する。

4.6 要素別のレーリー減衰

要素別レーリー減衰は、構造物を構成する特定の部材、または境界部分に要素別に異なる減衰が適用でき、減衰が異なる材料が混在する場合とか、制震および免震装置が設置されている場合などに使用する。

要素別に減衰特性を考慮する場合、減衰マトリックスは殆ど非比例減衰となり、モード分離ができない。したがって、直接減衰マトリックスを作成する直接積分法の時刻歴解析にだけ適用できる。

応答スペクトル解析及びモード重ね合わせ法で、要素別に異なる減衰特性を反映するためにはグループ減衰で要素グループと境界条件グループ別に異なる減衰定数を設定する。

要素別レーリー減衰の設定は、以下の手順で行う。

先に、異なる減衰特性を指定する要素と境界をグループ指定する。グループ減衰の**指定された要素と境界条件の減衰定数の質量比例 & 剛性比例**に要素グループと境界グループ別に質量比例係数(α)と剛性比例係数(β)を入力する。要素グループと境界グループに入らないものの減衰定数は**指定されていない要素と境界条件の減衰定数の質量比例&剛性比例**から入力する。

要素別レーリー減衰は要素別に入力した α, β を利用し、 $C = \alpha M + \beta K$ のように要素の減衰マトリックスを作成し運動方程式を構成する。要素別レーリー減衰はレーリー減衰に基づくため、部材 n の α_n, β_n はレーリー減衰と同様に計算する。

ただし、現バージョンは質量比例係数(α)は使用できず、要素別の剛性比例型減衰だけが使用できる。

4.7 減衰マトリックスの構成

直接積分法の時刻歴解析で減衰手法をモード減衰、またはひずみエネルギー比例減衰にした場合、減衰マトリックスはフルの形となり、入力されたモード別の減衰定数 ξ_i と固有振動数 ω_i 、そしてモード行列などを利用し全体構造物の減衰マトリックスを作成する必要がある。

全体構造物の減衰マトリックスは次のようになる。

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\Phi \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 2\xi_i\omega_i & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \Phi^T \mathbf{M} \quad (4.7.1)$$

ここで、

\mathbf{C} : 全体構造物の減衰マトリックス

\mathbf{M} : 全体構造物の質量マトリックス

ξ_i : 全体構造物の i -番目モード減衰定数

Φ : モード形状

$$\Phi = \{ \Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_i \quad \dots \quad \Phi_{nf} \}$$

nf : 使用するモード数

4.8 汎用リンク要素と線形減衰の考慮

汎用リンク要素は制震装置、免震装置、圧縮または引張専担要素、塑性ヒンジ、地盤バネなどをモデリングするときに使用する要素で、2つの節点間を結ぶ6つのバネで構成される。汎用リンク要素は線形粘性減衰を設定し構造物に付加的に設置する減衰機をモデリングすることができる。

汎用リンク要素の線形粘性減衰は要素タイプの場合、線形ダッシュポットとバネと線形ダッシュポットを選択し、線形プロパティの減衰係数から設定する。カタイプの場合は、線形プロパティの有効減衰係数から設定する。

汎用リンク要素の線形粘性減衰に関する詳細は汎用リンク要素で説明する。ここでは、ひずみエネルギーに基づくモード減衰を考慮する場合、汎用リンク要素の線形粘性減衰を考慮しモード別の減衰定数を求める方法について説明する。

汎用リンク要素の線形粘性減衰である減衰係数、または有効減衰係数は次のように入力されると仮定する。

$$C_{eff} = \frac{2\xi_{eff}}{\omega_{eff}} K_{eff} \quad (4.8.1)$$

ここで、

C_{eff} : 減衰係数、または有効減衰定数

K_{eff} : 汎用リンク要素の剛性

ξ_{eff} : 汎用リンク要素の減衰定数

ω_{eff} : 汎用リンク要素の固有振動数

上式の仮定から、汎用リンク要素のひずみエネルギーの計算時に線形粘性減衰を反映すると、 i -番目モードの減衰定数は次のようになる。

$$\xi_i = \frac{\sum_{n=1}^N E_D(i, n)}{4\pi \cdot \sum_{n=1}^N E_S(i, n)} = \frac{\sum_{n=1}^N (h_n \phi_{n,i}^T K_n \phi_{n,i} + 0.5\omega_i \phi_{n,i}^T C_{eff} \phi_{n,i})}{\sum_{n=1}^N \phi_{n,i}^T K_n \phi_{n,i}} \quad (4.8.2)$$

上記の式から計算されたモード別減衰比は、応答スペクトル解析およびモード重ね合わせ法による時刻歴解析と同様に適用される。

5. 応答スペクトル解析

応答スペクトル解析(Response Spectrum Analysis)において使用する地震力を受ける構造物に対する動的つり合い方程式は、次の通りである。

🔊 On-line Manual の"
解析＞応答スペクトル
解析制御"を参照

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = -[M]w_g(t) \quad (5.1.1)$$

ここで、

$[M]$: 質量マトリックス

$[C]$: 減衰マトリックス

$[K]$: 剛性マトリックス

$w_g(t)$: 地動加速度

$u(t)$, $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$ は、それぞれ相対変位、速度、加速度を意味する。

応答スペクトル解析は、多自由度系を1自由度系の構造体と仮定し、あらかじめ数値積分によって任意の固有周期(または振動数)に対する最大応答値から各種スペクトル(加速度、速度、変位等)を求め、モード別に応答値を重ね合わせる方法で、実務上有効な手法である。

応答スペクトル解析では、任意モードに対する最大応答値を各モード別に求めた後、適切な重ね合わせ法によって最大応答値を計算する。例えば、任意モードの任意自由度に対する変位と慣性力は、次式のように計算される。

$$d_{xm} = \Gamma_m \varphi_{xm} S_{dm} \quad , \quad F_{xm} = \Gamma_m \varphi_{xm} S_{am} W_x \quad (5.1.2)$$

ここで、

Γ_m : m 次モードの刺激係数

φ_{xm} : 任意 x 位置での m 次固有ベクトル

S_{dm} : m 次振動の正規化変位応答スペクトル

S_{am} : m 次振動の正規化加速度応答スペクトル

W_x : 任意 x 位置での質量

構造解析プログラムで、任意周期に対する応答スペクトル関数のデータを入力すれば、解析された固有周期から応答スペクトル値を求めるために、一般的に線形補間法を使用する。応答スペクトル曲線の変化が急な部分に対しては、できるだけ細分化されたデータを用いることが望まれる(図 5.1.1 参照)。応答スペクトル関数の周期の範囲は、必ず固有値解析で算出された最大最小の固有周期の範囲が含まれるように、入力する必要がある。プログラムでは、スペクトルを地盤種別、地域係数、重要度係数等を入力することで容易に作成できる。

プログラムは、全体座標系 X-Y 平面の任意方向、及び Z 方向に対する応答スペクトル解析が可能であり、モード別の解析結果の重ね合わせ法(Modal Combination)は、ユーザーによって、CQC 法(Complete Quadratic Combination)と SRSS 法(Square Root of the Sum of the Squares)などが選択できる。

各モード別の応答値の重ね合わせ法は、次の通りである。

- SRSS (Square Root of the Sum of the Squares)

$$R_{max} = [R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_n^2]^{1/2} \quad (5.1.3)$$

- ABS (Absolute Sum)

$$R_{max} = |R_1| + |R_2| + \dots + |R_n| \quad (5.1.4)$$

- CQC (Complete Quadratic Combination)

$$R_{max} = \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i \rho_{ij} R_j \right]^{1/2} \quad (5.1.5)$$

ここで、

$$\rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2r(1+r)^2}, \quad r = \frac{\omega_j}{\omega_i}$$

R_{max} : 最大応答値

R_i : 任意 i 次モードでの最大応答値

r : i 次モードに対する j 次モードの固有振動数の比率

ξ : 減衰定数(Damping Factor)

上式(5.1.5)で、 $i = j$ であれば、減衰定数に関係なく $\rho_{ij} = 1$ になり、減衰定数(ξ)がゼロの場合、CQC 法と SRSS 法の結果値は同じになる。

上記の方法の中では、ABS 法が最も大きな値になる。SRSS 法は、固有振動数が接近した値となる場合、重ね合わせた結果が過大または過小評価になる傾向があるため、従来は SRSS 法がよく用いられたが、最近では、各モード間の確率的な相関性を考慮することができるように開発された CQC 法の使用が増えている。

例えば、減衰定数が 0.05 で、3 個の自由度を持つ構造物の固有振動数と各モード別の変位が次のように計算された場合、SRSS 法と CQC 法の計算結果を比較すると次のようになる。

- 固有振動数

$$\omega_1 = 0.46、\omega_2 = 0.52、\omega_3 = 1.42$$

- モード別の最大変位 : D_{ij} (j 次振動における i 自由度の変位成分)

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} 0.036 & 0.012 & 0.019 \\ -0.012 & 0.044 & -0.005 \\ 0.049 & 0.002 & -0.017 \end{vmatrix}$$

- 各自由度に対する応答値を SRSS 法で求めると

$$R_{max} = [R_1^2 + R_2^2 + R_3^2]^{1/2} = \{0.042, 0.043, 0.052\}$$

- CQC 法で求めると

$$\rho_{12} = \rho_{21} = 0.3985$$

$$\rho_{13} = \rho_{31} = 0.0061$$

$$\rho_{23} = \rho_{32} = 0.0080$$

$$R_{max} = [R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + 2\rho_{12}R_1R_2 + 2\rho_{13}R_1R_3 + 2\rho_{23}R_2R_3]^{1/2}$$

$$= \{0.046, 0.041, 0.053\}$$

上記の2つの結果を比較すると、SRSS 法の場合は、CQC 法に比べて1番目の自由度成分に対しては過小評価され、2番目の自由度成分に対しては過大評価となった。したがって、固有振動数が相対的に接近した値の場合には、SRSS 法が過小または過大評価された結果となることが分かる。

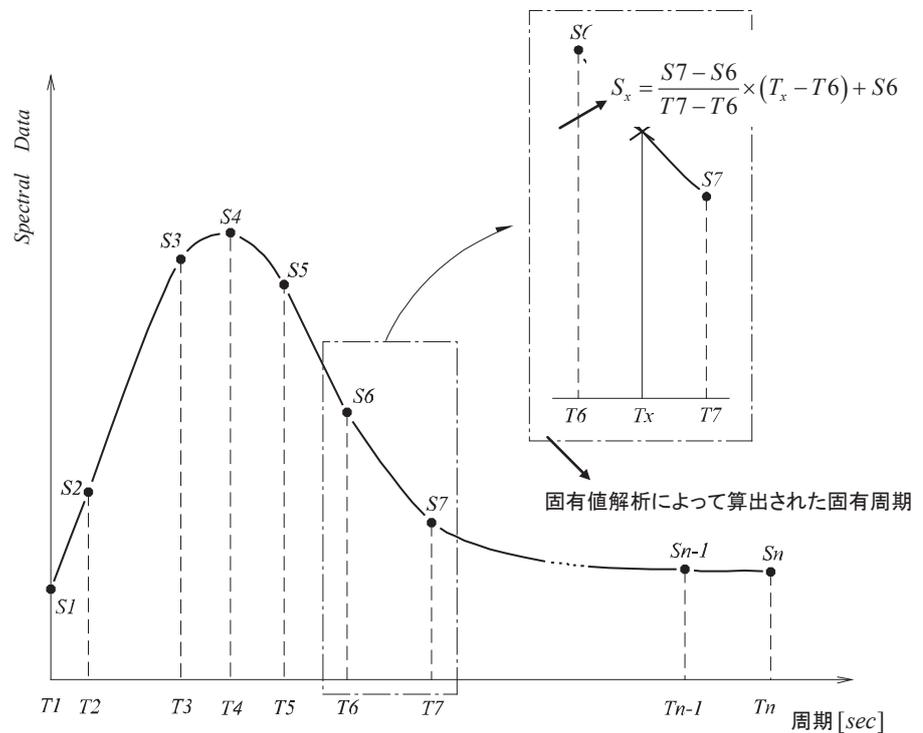


図 5.1.1 応答スペクトル曲線及び任意周期に対する応答スペクトル値の参照方法

プログラムでは応答スペクトルデータの減衰定数をユーザーが与えることができる。応答スペクトルデータの減衰比は構造物の減衰評価方法に従って調整される基準減衰定数となる。プログラムで提供する構造物の減衰は以下の3種類である。

- モード減衰
- 質量及び剛性比例減衰
- グループ減衰

モード減衰はユーザーが指定するモード別減衰比を用いて応答スペクトルデータを調整し、調整された応答スペクトルデータの加速度を利用して解析を行う。

質量及び剛性比例減衰を指定する場合にはレーリー減衰の原理によってモード別減衰を算定する。

$${}_s h = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{{}_s \omega} + \beta \cdot {}_s \omega \right) \quad (5.1.6)$$

ここで、 α と β はそれぞれ質量と剛性に比例する減衰定数を意味する。レーリー減衰によって算定されたモード別減衰比は基準減衰比と比較して応答スペクトルデータを調整する。

グループ減衰の場合には、ユーザーが与えた要素別あるいは材料別のグループ減衰を利用して要素別減衰マトリックスを構成して、全体構造物の i 番目のモード別減衰比はすべての要素の i 番目モードに該当されるエネルギーの総和から次式のように計算する。

$$\xi_i = \frac{\sum_{n=1}^N E_D(i, n)}{4\pi \cdot \sum_{n=1}^N E_S(i, n)} = \frac{\sum_{n=1}^N h_n \boldsymbol{\phi}_{n,i}^T \mathbf{K}_n \boldsymbol{\phi}_{n,i}}{\sum_{n=1}^N \boldsymbol{\phi}_{n,i}^T \mathbf{K}_n \boldsymbol{\phi}_{n,i}} \quad (5.1.7)$$

ここで、

$\boldsymbol{\phi}_{n,i}$: 要素自由度に該当するモード形状ベクトル

\mathbf{K}_n : 要素の剛性マトリックス

h_n : グループ減衰でユーザーが指定した減衰比

グループ減衰によって算定されたモード別減衰比は基準減衰比と比較して応答スペクトルデータを調整した後に解析に適用される。

6. 時刻歴応答解析

6.1 概要

時刻歴応答解析(Time History Analysis)で使用する動的つり合い方程式は、次の通りである。

🔊 On-line Manual の
"荷重>時刻歴応答
解析データ"を参照

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = p(t) \quad (6.1.1)$$

ここで、

$[M]$: 質量マトリックス

$[C]$: 減衰マトリックス

$[K]$: 剛性マトリックス

$p(t)$: 動的荷重

$u(t)$, $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$ は、それぞれ変位、速度、加速度を意味します。

時刻歴応答解析とは、構造物に動的荷重が作用する場合の動的つり合い方程式の解を求めることであり、構造物の動的特性と加わる荷重を用いて任意の時間に対する構造物の挙動(変位、断面力等)を計算する。時刻歴応答解析では、モード重合法(Modal Superposition Method)と直接積分法を利用している。

6.2 モード重合法

時刻歴応答解析を行うために構成された動的釣り合い方程式は常微分連立方程式の形式で構成される。運動方程式の解を求めるためにはすべての連立方程式を解かなければならない。モード重合法は、このような連立方程式をモード別に分離して独立された n 個の単自由度システムに対する運動方程式とした後、モード別の解を求めてこれらを組合わせて解を得る解析方法である。

モード重合法を使うためには、構造物の挙動が線形であり、減衰マトリックスは対角化できるマトリックスでなければならない。

モード重合法では時間によるそれぞれのモード応答にモード別の振動数とモード別の減衰比が存在する。式(6.2.1)～式(6.2.3)は動的釣り合い方程式でモード別に単自由度システムとして分離する過程を説明する。

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{q}(t) + \Phi^T K \Phi q(t) = \Phi^T F(t) \quad (6.2.1)$$

$$m_i \ddot{q}_i(t) + c_i \dot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = P_i(t) \quad (i = 2, 3, 4, \dots, m) \quad (6.2.2)$$

$$u(t) = \sum_{i=1}^m \Phi_i q_i(t) \quad (6.2.3)$$

$$q_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[q_i(0) \cos \omega_{Di} t + \frac{\xi_i \omega_i \dot{q}_i(0)}{\omega_{Di}} \sin \omega_{Di} t \right] + \frac{1}{m_i \omega_{Di}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{Di} (t-\tau) d\tau \quad (6.2.4)$$

ここで、

$$\omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

a_0, a_1 : レーリー係数

ξ_i : i 次モードの減衰定数

ω_i : i 次モードの固有円振動数

Φ_i : i 次モードの固有ベクトル

$q_i(t)$: i 次モードによる1自由度系の振動方程式の解

時刻歴応答解析で構造物の変位は、式(6.2.3)に示すように、モード形状と単自由度系方程式の解を掛け算することによって得られる。ここで、モード次数は変位に影響を与える。この方法は構造解析プログラムで一般的に使われる解析方法であり、大型構造物の時刻歴解析を行う時に効果的に適用することができる。

特別な減衰装置、また、剛性と質量を線形組合せとして仮定することができない場合には、グループ減衰を利用した要素別の剛性マトリックスでモード別減衰比を算定することが可能で、モード重合法をより効果的に適用することができる。

モード重合法を利用した解析で必要とするモード別減衰比の評価は以下のような 3 つの方法を提供する。

- モード減衰：ユーザーが直接指定したモード別減衰比を使用する
- 質量及び剛性比例減衰：レーリー減衰の原理によって計算されたモード別減衰比を使用する
- グループ減衰：要素別に指定された減衰比と各要素の剛性を利用してモード別の減衰比を算定して解析に適用する

モード重合法を適用する場合に要求されるデータとその入力における注意事項は次の通りである。

- 全体解析時間：応答継続時間
- 時刻歴応答解析の時間間隔：時刻歴応答解析で用いる時間間隔によって、応答値の精度に大きな影響を及ぼし、また構造物の高次モードの固有周期や外力の周期と密接な関係がある。時間間隔は、式(6.2.4)の積分項に対して直接的に影響を及ぼすため、不適切な値が入力された場合には、精度の良くない結果となる。一般的に、考慮する最高次モードの固有周期に対して、その約 1/10 程度の時間間隔とする。また、外力の時間間隔よりも小さくする必要がある。

$$\Delta T = \frac{T_p}{10} \quad (6.2.5)$$

T_p = 考慮する最高次モードの固有周期

- モード別の減衰定数：モード減衰、質量及び剛性比例減衰、グループ減衰の 3 つの方法を利用してモード別の減衰比を指定することができる。
- 動的荷重：構造物の節点や基礎部に対して直接加振される動的荷重で、荷重の時間的変化を関数の形で適切に定義する必要がある。各時間間の荷重は、線形補間して適用する。

6.3 直接積分法

直接積分法は運動方程式を微小時間ごとに積分して解を求める方法である。プログラムでは収束性の良い Newmark 法を使用して直接積分法を行っている。基本的な仮定と積分方法は以下のとおりである。

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + [(1-\delta){}^t\ddot{u} + \delta{}^{t+\Delta t}\ddot{u}]\Delta t \quad (6.3.1)$$

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right){}^t\ddot{u} + \alpha{}^{t+\Delta t}\ddot{u}\right]\Delta t^2 \quad (6.3.2)$$

式(6.3.2)で ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$ を求めて、この式を式(6.3.1)に代入して、 ${}^{t+\Delta t}\dot{u}$ を計算すると式(6.3.3)のように前時刻の変位、速度、加速度と現在の変位で表現することができる。

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} = f\left({}^{t+\Delta t}u, {}^tu, {}^t\dot{u}, {}^t\ddot{u}\right), \quad {}^{t+\Delta t}\dot{u} = f\left({}^{t+\Delta t}u, {}^tu, {}^t\dot{u}, {}^t\ddot{u}\right) \quad (6.3.3)$$

動的吊合運動方程式に代入すると以前時刻の変位、速度、加速度と現時刻での変位に関する式で表現でき、式(6.3.6)のような式で現時刻の変位を計算することができる。そして、現時刻の変位とこの値と前時刻の値を用いて、式(6.3.8)のような現時刻の加速度と速度が計算できる。減衰は式(6.3.9)のように剛性と質量を用い比例式で計算する。

$$[M]{}^{t+\Delta t}\ddot{u} + [C]{}^{t+\Delta t}\dot{u} + [K]{}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}p \quad (6.3.4)$$

$$\begin{aligned} [[K] + a_0[M] + a_1[C]]{}^{t+\Delta t}u &= {}^{t+\Delta t}p + [M](a_0{}^tu + a_2{}^t\dot{u} + a_3{}^t\ddot{u}) \\ &+ [C](a_1{}^tu + a_4{}^t\dot{u} + a_5{}^t\ddot{u}) \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

$$[\hat{K}]{}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}\hat{p} \quad (6.3.6)$$

$$[\hat{K}] = [K] + a_0[M] + a_1[C] \quad (6.3.7)$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{p} = {}^{t+\Delta t}p + [M](a_0{}^tu + a_2{}^t\dot{u} + a_3{}^t\ddot{u}) + [C](a_1{}^tu + a_4{}^t\dot{u} + a_5{}^t\ddot{u})$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} = a_0({}^{t+\Delta t}u - {}^tu) - a_2{}^t\dot{u} - a_3{}^t\ddot{u}, \quad {}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + a_6{}^t\ddot{u} + a_7{}^{t+\Delta t}\ddot{u} \quad (6.3.8)$$

ここで、

$$a_0 = \frac{l}{\alpha \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad a_2 = \frac{l}{\alpha \Delta t} \quad a_3 = \frac{l}{2\alpha} - l$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - l \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \quad a_6 = \Delta t(l - \delta) \quad a_7 = \delta \Delta t$$

α, δ : Newmark 積分変数 ($\alpha=0.5, \delta=0.25$ の場合には常に安定)

Δt : 積分時間間隔

$$[C] = a[K] + b[M] \quad (6.3.9)$$

ここで、

a, b : 減衰計算のための質量と剛性の比例定数

剛性や減衰の非線形性を考慮した解析のためには多くの場合、直接積分法を使用する必要がある。直接積分法の場合は全ての時間ステップに対して解析を行うために時間ステップの数に比例して解析時間がかかる。直接積分法で要求されるデータと入力時の注意事項は次の通りである。

- 全体解析時間: 応答継続時間
- 解析時間間隔: 解析に使用される時間間隔で、解析の精度に影響を与える可能性があり、時間間隔は構造物の高次モードの周期又は荷重の周期と密接な関係を持つ。解析時間の間隔は式(6.3.5)の積分項に直接的な影響を与えるために不適切な値が入力されると不正確な結果が得られる。一般的に考慮しようとする最高高次モード周期の 1/10 程度の時間間隔が妥当である。そして、解析時間間隔は入力された荷重の時間間隔よりも小さくする必要があるのである。

$$\Delta t = \frac{T_p}{10}$$

T_p = 考慮しようとする最高高次モードの周期

- 減衰の定義 : 直接積分法を利用する場合には質量及び剛性比例減衰、グループ減衰を利用して構造物全体の減衰マトリックスを構成する。
- 剛性と質量を用いた減衰定義 : 剛性と質量の比例式で減衰を定義する。
- 時間積分方法 : Newmark 方法の適用時に、必要な積分変数を入力する。
Constant Acceleration の場合には、全ての条件下で発散しないで安定的に収束するが、Linear Acceleration の場合には条件によっては収束しないこともある。可能な限り Constant Acceleration に該当する積分変数を使用するのが妥当である。

- 動的荷重：構造物の節点や基礎部に直接作用する時間の関数で表現され、全体荷重の変化を十分に表現できる必要がある。入力されない時間での荷重値は線形補間して使用する。

次は、ユーザーの理解のために、構造物の時刻歴解析に必要な基本的な事項を説明する。

図 6.3.1 の1自由度系の理想化モデルに作用する力のつり合い方程式は次の通りである。

$$f_I(t) + f_D(t) + f_E(t) = f(t) \quad (6.3.10)$$

$f_I(t)$ (慣性力) は、構造物の速度の変化に対して抵抗しようとする慣性による力である。大きさは、 $m\ddot{u}(t)$ で、加速度の反対方向に作用する。 $f_E(t)$ (弾性復元力) は、構造物が変形することにより、それに抵抗してもとの位置へ戻そうとする力である。大きさは、 $ku(t)$ で、変位の反対方向に作用する。 $f_D(t)$ (減衰力) は、構造物を自由振動させた時に、内部摩擦等によって運動エネルギーを消費することにより、時間の経過とともに振幅が小さくなる現象の起因となる力である。その大きさは $c\dot{u}(t)$ で、速度の反対方向に作用する。

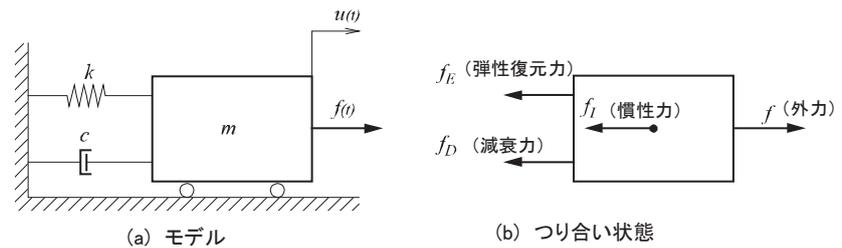


図 6.3.1 1 自由度系の理想化モデル

上図のそれぞれの力は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} f_I &= m\ddot{u}(t) \\ f_D &= c\dot{u}(t) \\ f_E &= ku(t) \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

ここで、 m は質量、 c は粘性減衰係数、 k は弾性係数である。図 6.3.1 の力のつり合い関係から変位についての1自由度系の振動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \quad (6.3.12)$$

上式で $f(t)=0$ とした場合は、自由振動に対する振動方程式となり、さらに $c=0$ の場合には、非減衰自由振動に対する振動方程式となる。 $f(t)$ を任意時間における加振力(または加振変位、速度、加速度)とすれば、強制振動の問題になり、モード重合法(Mode Superposition Method)または直接積分法(Direct Integration Method)を用いて解を求める。

6.4 多入力地震荷重に対する解析

長大橋のように支持点が空間的に離れている場合には構造物に入力される地震荷重の時間的な遅延効果が発生する。このような場合には、各支持点に時間遅延を考慮した地震荷重を入力し、より精度良い解を求めることができる。多点入力の地震荷重を受ける構造物の運動方程式は式(6.4.1)のようになる。多点入力の地震荷重を考慮した解析では、複数の支持点で地震荷重が入力されるので、基準点を定めることができず、全ての変位、速度、加速度の値が絶対値で計算される。従って、解析結果も絶対値に対する結果となる。絶対値の結果では変位、速度、加速度の結果が地盤の挙動を含んだ形となる。一方、部材力や反力は節点間の相対変位を用いて計算するため、絶対値や相対値の出力に影響を受けない。

$$\begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sg} \\ M_{gs} & M_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}'_s(t) \\ \ddot{u}'_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{ss} & C_{sg} \\ C_{gs} & C_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}'_s(t) \\ \dot{u}'_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sg} \\ K_{gs} & K_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_s(t) \\ u'_g(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_g(t) \end{Bmatrix} \quad (6.4.1)$$

ここで、s と g はそれぞれ上部構造物と支持部を意味し、上添え字 t は絶対変位を意味する。

支持点の運動 $\ddot{u}'_g(t)$, $\dot{u}'_g(t)$, $u'_g(t)$ は、支持点別りに入力する必要がある。絶対変位を地盤変位による変位 ($u_s^s(t)$) と、これを除いた動的変位 ($u_s(t)$) に区分すると、式(6.4.2)のようになる。

$$\begin{Bmatrix} u'_s(t) \\ u'_g(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_s^s(t) \\ u_g(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_s(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4.2)$$

$u_g(t)$ は支持点の変位で、 $u_s^s(t)$ を静的に構造物に作用したときに発生する上部構造物の変位で疑似静的変位 (Quasi-static Displacement) と呼ばれ、式(6.4.3)の関係がある。 $P_g^s(t)$ は支持点の変位 ($u_g(t)$) を構造物に加えるために必要な疑似静的支点荷重 (Quasi-static Support Force) である。

$$\begin{bmatrix} K_{ss} & K_{sg} \\ K_{gs} & K_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^s(t) \\ u_g(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_g^s(t) \end{Bmatrix} \quad (6.4.3)$$

式(6.4.1)の最初の式を展開して式(6.4.2)を適用し整理すると、式(6.4.4)になる。

$$\begin{aligned}
& M_{ss} \left(\ddot{u}_s^s(t) + \ddot{u}_s(t) \right) + M_{sg} \ddot{u}_g(t) + C_{ss} \left(\dot{u}_s^s(t) + \dot{u}_s(t) \right) + C_{sg} \dot{u}_g(t) \\
& + K_{ss} \left(u_s^s(t) + u_s(t) \right) + K_{sg} u_g(t) = 0
\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

$$\begin{aligned}
& M_{ss} \ddot{u}_s(t) + C_{ss} \dot{u}_s(t) + K_{ss} u_s(t) = P_{eff}(t) \\
& P_{eff}(t) = -M_{ss} \ddot{u}_s^s(t) - M_{sg} \ddot{u}_g(t) - C_{ss} \dot{u}_s^s(t) \\
& \quad - C_{sg} \dot{u}_g(t) - K_{ss} u_s^s(t) - K_{sg} u_g(t)
\end{aligned} \tag{6.4.5}$$

式(6.4.3)の最初の項を整理すると、式(6.46)になる。

$$\begin{aligned}
& K_{ss} u_s^s(t) + K_{sg} u_g(t) = 0 \\
& u_s^s(t) = I_f u_g(t) \\
& I_f = -K_{ss}^{-1} K_{sg}
\end{aligned} \tag{6.4.6}$$

I_f は影響マトリックスで、支持点の変位による構造物の変位を表す。式(6.4.6)を式(6.4.5)に代入し整理すると、次のようになる。

$$P_{eff}(t) = -\left(M_{ss} I_f + M_{sg} \right) \ddot{u}_g(t) - \left(C_{ss} I_f + C_{sg} \right) \dot{u}_g(t) \tag{6.4.7}$$

減衰マトリックスが剛性比例型であると仮定すれば、式(6.4.8)で表すことができる。

$$\left(C_{ss} I_f + C_{sg} \right) \dot{u}_g(t) = \beta \left(K_{ss} I_f + K_{sg} \right) \dot{u}_g(t) = 0 \tag{6.4.8}$$

$$P_{eff}(t) = -\left(M_{ss} I_f + M_{sg} \right) \ddot{u}_g(t) \tag{6.4.9}$$

質量が集中質量と仮定すれば、式(6.4.5)の運動方程式と有効地震荷重は式(6.4.10)と同じである。

$$\begin{aligned}M_{ss}\ddot{u}_s(t) + C_{ss}\dot{u}_s(t) + K_{ss}u_s(t) &= P_{eff}(t) \\ P_{eff}(t) &= -M_{ss}I_f\ddot{u}_g(t)\end{aligned}\tag{6.4.10}$$

参考に均等な地震荷重が入力される場合の運動方程式は、次の通りである。

$$\begin{aligned}M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) &= P_{eff}(t) \\ P_{eff}(t) &= -M\{1\}\ddot{u}_g(t)\end{aligned}\tag{6.4.11}$$

最終的な絶対値基準の変位、速度、加速度は式(6.4.12)のように計算される。

$$\begin{Bmatrix} u'_s(t) \\ \dot{u}'_s(t) \\ \ddot{u}'_s(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_s^s(t) \\ \dot{u}_s^s(t) \\ \ddot{u}_s^s(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_s(t) \\ \dot{u}_s(t) \\ \ddot{u}_s(t) \end{Bmatrix}\tag{6.4.12}$$

midas Civil で多入力地震荷重の時刻歴解析は線形の時刻歴解析にだけ使用できる。

7. 座屈解析

7.1 概要

線形座屈解析機能は構造物の限界荷重係数(Critical Load Factor)と、それに該当される座屈モード形状を求める時に使用する。線形座屈解析におけるつり合い方程式は応力による幾何剛性を考慮して次のようになる。

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{K}}_G\mathbf{u} = \bar{\mathbf{p}} \quad (7.1.1)$$

ここで、 \mathbf{K} は全体剛性マトリックス、 $\bar{\mathbf{K}}_G$ は応力による幾何剛性マトリックス、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 $\bar{\mathbf{p}}$ は荷重ベクトルである。

線形解析で構造物の応力は荷重に比例し幾何剛性は応力に比例する。したがって、荷重 $\bar{\mathbf{p}}$ が基準荷重 \mathbf{p} に比例すると仮定すれば、幾何剛性マトリックス $\bar{\mathbf{K}}_G$ は次のようになる。

$$\bar{\mathbf{K}}_G = \alpha\mathbf{K}_G \quad (7.1.2)$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \alpha\mathbf{p} \quad (7.1.3)$$

ここで、 \mathbf{p} は基準荷重(Reference Load)、 \mathbf{K}_G は基準荷重に対応する幾何剛性マトリックス、 α は荷重係数(Load Factor)である。

式(7.1.2)と(7.1.3)を式(7.1.1)に代入すると次のようになる。

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \alpha\mathbf{K}_G\mathbf{u} = \alpha\mathbf{p} \quad (7.1.4)$$

式(7.1.4)のつり合い状態は荷重係数 α の大きさによって安定か不安定となる。安全性を判断するためにつり合い状態 \mathbf{u} に摂動(Perturbation) $\delta\mathbf{u}$ を加えると次のようになる。

$$\mathbf{K}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) + \alpha\mathbf{K}_G(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{p} \quad (7.1.5)$$

つり合い方程式(7.1.4)を利用して式(7.1.5)から摂動以外の項を消去すると、次のような固有値問題が得られる。

$$(\mathbf{K} + \alpha\mathbf{K}_G)\delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (7.1.6)$$

ここで、つり合い方程式の安定性は次式から判断することができる。

$$|\mathbf{K} + \alpha\mathbf{K}_G| > 0 : \text{安定状態}$$

$$|\mathbf{K} + \alpha\mathbf{K}_G| \leq 0 : \text{不安定状態}$$

したがって、式(7.1.6)を満足する固有値 α は、つり合い状態から不安定となる限界荷重係数であり、これに対応する固有モード $\phi (= \delta\mathbf{u})$ は構造物に発生する座屈形状となる。構造物に座屈が発生する限界荷重は限界荷重係数と基準荷重を考慮して $\alpha\mathbf{p}$ を用いて表すことができる。図 7.1.1 は圧縮荷重を受ける柱のつり合い状態と限界荷重による座屈形状を示している。

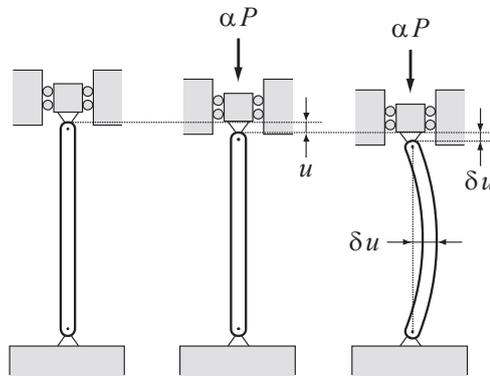


図 7.1.1 圧縮荷重を受ける柱の座屈

線形座屈解析は幾何剛性マトリックス \mathbf{K}_G と式(7.1.6)の固有値問題を解くことであり、要素毎の応力または要素内力を基に幾何剛性を計算して、Lanczos 反復法を使って固有値を計算する。

7.2 幾何剛性

プログラムで幾何剛性が考慮できる要素は次の通りである。

トラス、梁、平面応力、板、ソリッド

解析モデルに幾何剛性が考慮できる要素が存在しないと、座屈解析のための固有値問題が解けないので注意する必要がある。

それぞれの要素に対する幾何剛性の一般的な形は次のようになる。

$$\mathbf{K}_G^e = \int \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dV \quad (7.2.1)$$

ここで、 \mathbf{S} は応力、または要素内力マトリックス、 \mathbf{G} は節点変位と変位導関数の関係を定義するマトリックスである。

7.2.1 トラス要素

トラス要素の幾何剛性を計算する時は要素座標系 y 、 z 方向の並進変位のみを考慮する。

$$\mathbf{u}_i = \{v_i \quad w_i\}^T \quad (7.2.2)$$

$$v = \sum_{i=1}^2 N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^2 N_i w_i \quad (7.2.3)$$

ここで、 v_i, w_i は i 節点における要素座標系 y 、 z 方向の変位、 N_i は 2 節点の形状関数である。

応力マトリックス \mathbf{S} の構成においては軸方向応力 σ_{xx} のみを考慮する。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma_{xx} \end{bmatrix} \quad (7.2.4)$$

節点変位と変位導関数の関係 \mathbf{G}_i は、式(7.2.5)のようになる。

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.2.5)$$

マトリックス \mathbf{G}_i を利用してトラス要素の幾何剛性を表すと次のようになる。

$$\mathbf{K}_{Gij} = A \int_{L_e} \mathbf{G}_i^T \mathbf{S} \mathbf{G}_j dL \quad (7.2.6)$$

ここで、 A は断面積、 L_e は要素長さである。

式(7.2.6)を整理するとトラス要素の要素剛性マトリックスは次のように計算できる。

$$\mathbf{K}_G = \frac{N_x}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.7)$$

ここで、 N_x は軸力である。

7.2.2 梁要素

梁要素の幾何剛性では軸力 N_x のみを考慮するので、トラス要素と同様の方法で計算することができる。梁要素では y 、 z 方向の並進変位を次のように回転を考慮した節点自由度で表現する。

$$\mathbf{u}_i = \{v_i \quad w_i \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}\}^T \quad (7.2.8)$$

$$v = \sum_{i=1}^2 (H_{0i}v_i + H_{1i}\theta_{zi}), w = \sum_{i=1}^2 (H_{0i}w_i - H_{1i}\theta_{yi}) \quad (7.2.9)$$

ここで、 H_{0i} と H_{1i} は次のようなエルミート3次形状関数である。

$$H_{01} = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \quad H_{02} = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (7.2.10)$$

$$H_{11} = L_e(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \quad H_{12} = L_e(-\xi^2 + \xi^3) \quad (7.2.11)$$

ここで、 ξ は $0 \leq \xi \leq 1$ 、 L_e は要素長さである。

したがって、節点変位と変位導関数の関係 \mathbf{G}_i は次のようになる。

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{0i}}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial H_{1i}}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial H_{0i}}{\partial x} & -\frac{\partial H_{1i}}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2.12)$$

7.2.3 平面応力要素

平面応力要素の幾何剛性では要素座標系 x, y, z 方向の並進変位(Translation)のすべてを考慮する。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i \quad v_i \quad w_i\}^T \quad (7.2.14)$$

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad (7.2.15)$$

ここで、 n は節点個数、 N_i は節点個数による形状関数である。

マトリックス \mathbf{S} の構成においては面内方向の応力を考慮する。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (7.2.16)$$

節点変位と変位微分係数の関係 \mathbf{G}_i は式(7.2.15)のようになる。

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (7.2.17)$$

マトリックス \mathbf{G}_i を利用して平面応力要素の幾何剛性を表すと次のようになる。

$$\mathbf{K}_{Gij} = t \int_{A_e} \mathbf{G}_i^T \mathbf{S} \mathbf{G}_j dA \quad (7.2.18)$$

ここで、 t は厚さ、 A_e は要素面積である。

7.2.4 板要素

板要素では要素座標系 x, y, z 方向の並進変位を次のように回転を考慮した節点自由度で表現する。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}^T \quad (7.2.19)$$

$$u = \sum_{i=1}^n (N_i u_i + z N_i \theta_{yi}), \quad v = \sum_{i=1}^n (N_i v_i - z N_i \theta_{xi}), \quad w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad (7.2.20)$$

ここで、 n は節点数、 N_i は節点における形状関数である。

マトリックス \mathbf{S} の構成においては σ_{zz} を除いたすべての応力成分を考慮する。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.2.21)$$

節点変位と変位微分関数の関係 \mathbf{G}_i は式(7.2.22)のようになる。

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \frac{\partial N_i}{\partial x} & -z \frac{\partial N_i}{\partial y} & -N_i & 0 & 0 & 0 \\ z \frac{\partial N_i}{\partial x} & z \frac{\partial N_i}{\partial y} & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (7.2.22)$$

マトリックス \mathbf{G}_i を利用して板要素の幾何剛性を表すと次のようになる。

$$\mathbf{K}_{Gij} = \int_{V_e} \mathbf{G}_i^T \mathbf{S} \mathbf{G}_j dV \quad (7.2.23)$$

ここで、 V_e は要素体積である。

7.2.5 ソリッド要素

ソリッド要素の幾何剛性では要素座標系 x, y, z 方向の並進変位のすべてを考慮する。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i \quad v_i \quad w_i\}^T \quad (7.2.24)$$

$$u = \sum_{i=1}^n N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^n N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad (7.2.25)$$

ここで、 n は節点数、 N_i は節点における形状関数である。

マトリックス \mathbf{S} の構成においてはすべての応力成分を考慮する。

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (7.2.26)$$

節点変位と変位微分係数の関係 \mathbf{G}_i は式(7.2.27)のようになる。

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix}^T \quad (7.2.27)$$

マトリックス \mathbf{G}_i を利用してソリッド要素の幾何剛性を示すと次のようになる。

$$\mathbf{K}_{Gij} = \int_{V_e} \mathbf{G}_i^T \mathbf{S} \mathbf{G}_j dV \quad (7.2.28)$$

ここで、 V_e は要素体積である。

7.3 限界荷重係数の抽出

線形座屈解析における固有値問題-式(7.1.6)は、次のように簡単に表すことができる。

$$(\mathbf{K} + \lambda_m \mathbf{K}_G) = 0 \quad (7.3.1)$$

ここで、 λ_m は限界荷重係数である。

プログラムでは、Lanczos 反復法を用いて固有値問題を解く。Lanczos 反復法については、3章の固有値解析で詳しく説明している。

式(7.3.1)は自由振動解析の固有値問題と似ているが、質量マトリックスと違って幾何剛性 \mathbf{K}_G は正符号(Positive Definite)ではない。したがって、線形座屈解析では $\lambda_m = \sigma \theta_m / (1 - \theta_m)$ に置換して Shift-Invert 法を適用した Lanczos 反復法を適用する。計算された限界荷重係数は絶対値が小さいものから順次出力される。

7.4 線形座屈解析のパラメータ

線形座屈解析で限界荷重係数 α は基準荷重 \mathbf{p} の方向によって正または負符号を持つ。解析モデルと荷重が複雑な場合は、限界荷重係数の符号が座屈モードによって変わる場合がある。したがって、プログラムでは正符号の限界荷重だけを計算する機能を提供している。

線形座屈解析では荷重を基準タイプと固定タイプの2つに分類することができる。基準タイプには集中荷重、圧力など外部から与える荷重を指定し、固定タイプには自重のような固定荷重を指定する。固定タイプと指定された荷重は限界荷重係数 α に関係しないで、幾何剛性だけを発生させる。固定タイプの荷重を考慮した場合、固有値問題は次のようになる。

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_G^* + \lambda_m \mathbf{K}_G) \phi_m = 0 \quad (7.4.1)$$

ここで、 \mathbf{K}_G^* は固定荷重から発生する応力に対する幾何剛性である。

面内回転自由度を考慮しない板要素では、要素座標系 z 軸方向の回転に対する弾性剛性と幾何剛性が存在しない。この場合、Lanczos 反復計算中に数値エラーが発生して意味のない限界荷重係数 α が得られる場合がある。プログラムでは、隣接した板要素間の角度を考慮して、面内回転に対する剛性がない場合はこれを拘束する機能を提供する。

8. 静的非線形解析

8.1 概要

構造物を線形解析するというのは変位と荷重が比例関係であるという仮定の下で解析を行うことを意味する。このような仮定は載荷される荷重に対して材料の応力-ひずみ関係が線形で、荷重が構造物の剛性に比べて比較的小さく、生じる変位も微小であることから、幾何学的変形を無視できる場合に対して適用可能である。

通常の多くの構造物の場合は線形仮定を前提に解析を行うが、懸垂橋、斜張橋の施工段階のように大変形が予測される場合や応力が許容値を超える恐れのある場合には必ず非線形解析を行う必要がある。

非線形解析は下記のように大きく3つに分けることができる。

1つ、構造物に比較的大きい荷重が載荷されて応力が大きくなると、部材の応力-ひずみ関係が非線形に変わり構造物が非線形的挙動をするようになるが、これを**材料非線形**といい、図 8.1.1 のような応力-ひずみ関係で表す。荷重の載荷方法と材料によっては、さまざまな応力-ひずみ関係が存在する。

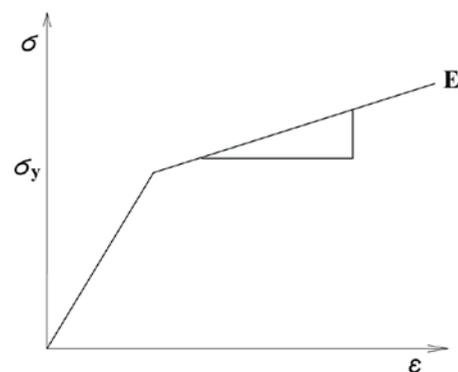


図 8.1.1 材料非線形解析に使われる応力-ひずみ関係

2つ、構造物に比較的大きい変形が生じて幾何学的形態が変わり、ひずみ-変位関係が非線形となる場合には、微小変形解析で無視したひずみ-変位関係の高次項を含んだ解析をするようになるが、これを**幾何学的非線形**という。

幾何学的非線形は材料が線形状態であっても生じることができ、懸垂橋のように変形が大きくなる恐れのある構造物の場合は、設計段階からも検討対象となる。幾何学的非線形は材料と関係なく構造物の形状によって生じるが、変位が大きくなって構造物の座標が変化する場合やモーメントのような付加荷重が生じる場合には必ず考慮しなければならない。

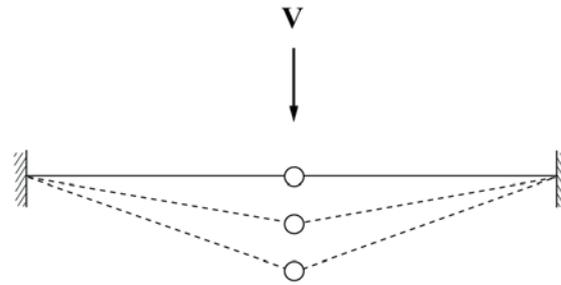


図 8.1.2 構造物の大変形による剛性の変化

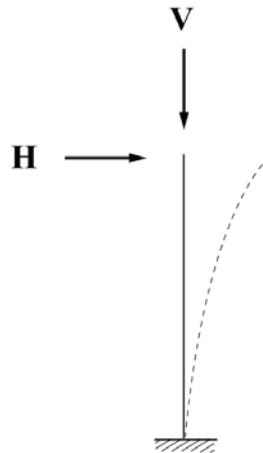


図 8.1.3 変形による付加荷重の発生

3つ、変形に伴い境界条件が変化する構造物において荷重-変位関係が非線形となる問題を**非線形静的**といい、地盤と接する構造物の圧縮専用の境界条件などがこの問題に該当する。

8.2 静的非線形解析

8.2.1 解析手法

静的非線形解析は、線形構造系の一部に非線形要素を使用した場合の静的解析である。この時の非線形要素には、引張専用要素、フック要素、ケーブル要素、圧縮専用要素、ギャップ要素、弾性連結要素(2 節点バネ)の引張または圧縮専用条件などがある。

非線形要素を用いた構造系の静的平衡方程式は式(8.2.1)となる。

$$[K + K_N]\{U\} = \{P\} \quad (8.2.1)$$

ここで、

K : 線形構造物の剛性

K_N : 非線形要素の剛性

1. 構造物の線形剛性と非線形要素の線形部分の剛性を用いて構造物の全体剛性マトリックスと荷重ベクトルを構成する。
2. 全体剛性マトリックスと荷重ベクトルを用いて静的解析を実行し、変位と断面力を求める。
3. 構造物の全体剛性マトリックスを再構成する。
4. 剛性マトリックスを変化させて解析を行う場合には、求められた変位と断面力を用いて非線形剛性を計算し、これを用いて全体剛性マトリックスを再構成する。
5. 2 と 3 の解析プロセスを繰り返し解析結果が収束条件を満足するまで実行する。

8.2.2 非線形要素の剛性(K_N)

非線形要素の剛性は、解析結果から得られた変位と断面力によって計算される。引張及び圧縮専用のトラス要素、フック要素、ギャップ要素の非線形剛性は、両端の変位、またはフックやギャップの距離によって、部材の非線形剛性を計算し、ケーブル要素は解析結果から得られた断面力を用いて非線形剛性を計算する。

引張及び圧縮専用のトラス要素、フック要素、ギャップ要素に対する非線形剛性は、式(8.2.2)から計算され、引張専用のケーブル要素の非線形剛性は、部材に生じる引張力の変化に応じて、式(8.2.3)のように有効剛性を計算して剛性を求める。

$$K_N = f(D-d) \quad (8.2.2)$$

ここで、

D : 初期状態におけるフックまたはギャップの距離間隔

d : 解析結果から得られた部材長さ変化量

$$K_{eff} = \frac{1}{1/K_{sag} + 1/K_{elastic}} = \frac{EA}{L(1 + \frac{w^2 L^2 EA}{12T^3})} \quad (8.2.3)$$

ここで、

$$K_{sag} = \frac{12T^3}{w^2 L^3}, \quad K_{elastic} = \frac{EA}{L}$$

w : ケーブルの単位長さ当たりの重量

L : 重力方向に対する水平長さ

T : ケーブルの引張力

プログラムで使用する非線形要素は、構造物の大変形及び材料非線形性を考慮しないため、次のように適用上の制約がある。

1. 構造物の材料非線形性は考慮しない。
2. 非線形要素だけで構成された解析モデルは、ある荷重条件に対しては不安定になるため、非線形要素だけで構成された節点の使用は制限される。
3. 荷重によって生じる変位と断面力に応じて要素の剛性が変化するため、荷重組み合わせ条件を設定して結果等を線形に組み合わせることができない。
4. 非線形要素を用いた構造物の動的解析では、非線形要素の線形部分の剛性を用いて解析を行う。

8.3 P-デルタ解析

8.3.1 概要

※P-デルタ解析の使用法及び解析例題については **MUSS** (<http://jp.midasuser.com/KKE/index.asp>) の「**技術資料**」の「**P-デルタ効果を考慮した解析**」を参照してください。

プログラムの P-デルタ解析は、梁要素や壁要素が、水平荷重と鉛直荷重を同時に受ける時の 2 次的な構造的挙動を考慮する機能であり、幾何学的非線形性(Geometric Nonlinearity)を有する大変形問題の一種である。

高層建築物の場合は、低層の場合に比べて鉛直荷重による軸力と水平荷重による水平変位が大きくなるため、P-デルタ効果が構造物の挙動に及ぼす影響が大きくなる。

ACI318 Code と AISC-LRFD Code では、より厳密的な断面力を設計に反映するために、P-デルタ効果を考慮した構造解析を要求している。

プログラムの P-デルタ解析機能は、構造物の座屈解析で数値解析的に解を求める手法を応用したものである。まず、与えられた荷重ケースに対して静的解析を行った後、各要素に発生する断面力及び応力度を用いて幾何剛性マトリックス(Geometric Stiffness Matrix)を構成する。そして、幾何剛性マトリックスと弾性剛性マトリックスとを組合わされた剛性マトリックスから、与えられた収束条件を満足するまで解析を繰り返して解を求める。

P-デルタ効果を考慮する時は幾何剛性マトリックスが必要となり、解析時は別途に静的荷重ケースを定義する必要がある。

🔊 On-line Manual の"
解析>P-デルタ解析
制御"を参照

8.3.2 解析手法

P-デルタ解析の計算プロセスは次の通りである。

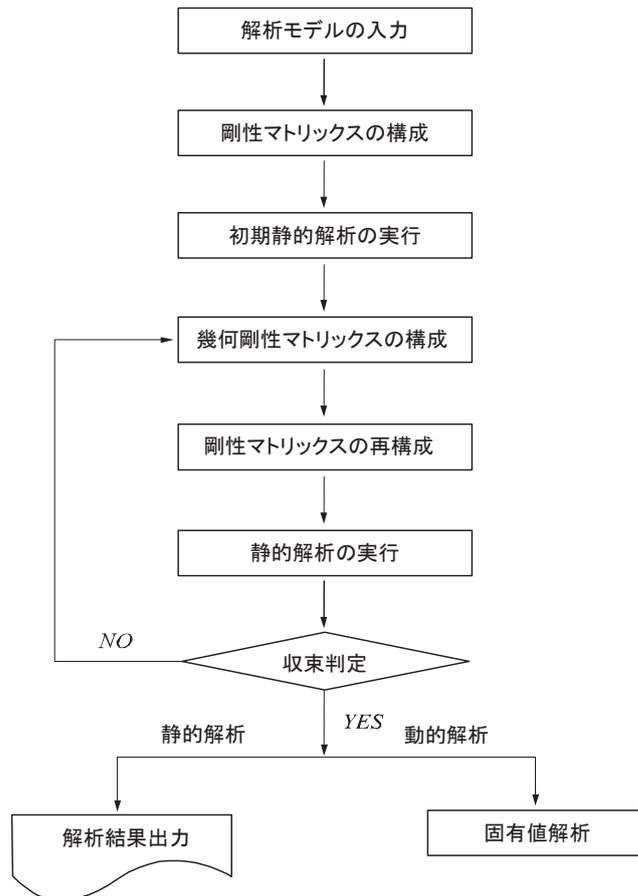
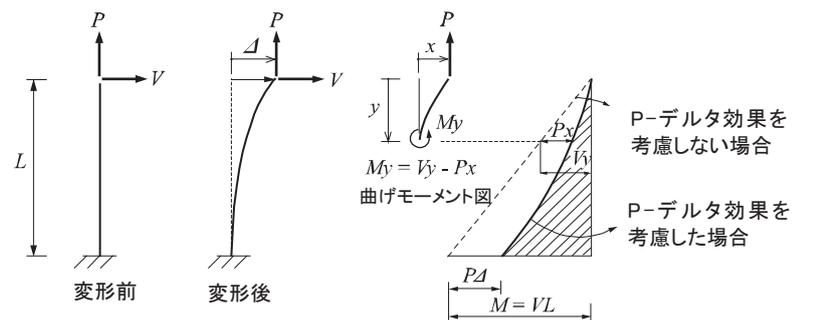


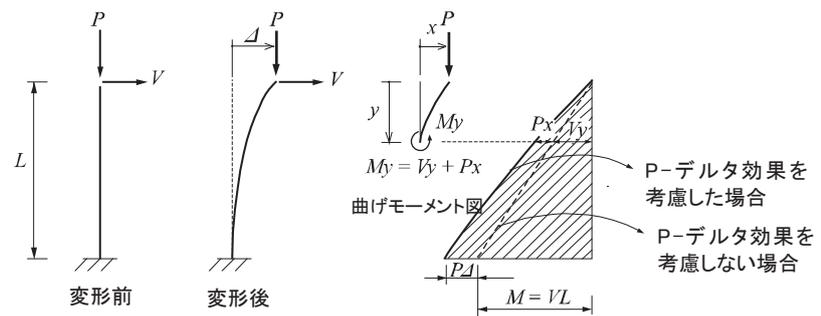
図 8.3.1 P-デルタ解析の計算プロセス

水平荷重によって曲げとせん断を受ける柱部材が、引張または圧縮の軸力を追加で受ける場合、引張力は柱部材の曲げモーメントとせん断力を小さくし、圧縮力は、反対に曲げモーメントとせん断力を大きくするように働く。

したがって柱部材に対して、引張力は水平方向の挙動に対して剛性を増加させ、圧縮力は剛性を低減させる効果がある。



(a) 柱部材に引張力と水平荷重が同時に作用する場合



(b) 柱部材に圧縮力と水平荷重が同時に作用する場合

図 8.3.2 P-デルタの効果을考慮した柱部材의 挙動

もし、圧縮力が非常に大きくなり、水平挙動に対する剛性低減値が部材の水平剛性と同じになると、その部材には座屈が生じ、その時の圧縮荷重は限界座屈荷重(Critical Buckling Load)となる。この効果を軸力と水平力を受ける柱部材に対して例を挙げると、次のようになる。

図 8.3.2(a)で、柱部材が引張力と水平力を同時に受ける時、P-デルタ効果を考慮しない場合(水平変形と鉛直荷重による 2 次的な変形効果を考慮しない場合)の曲げモーメントは、柱部材の上端の $M=0$ から下端の $M=VL$ まで、線形的に増加する。しかし、実際には、水平力による Δ の水平変位が生じるため、この水平変位 Δ と引張力 P により $P \cdot \Delta$ 分の曲げモーメントが低減される。したがって、柱部材の水平剛性が増加したことと同じ効果をもたらす。

反対に、圧縮力と水平力を同時に受ける時は、 $P \cdot \Delta$ 分の曲げモーメントが増加され、結局柱部材の水平剛性が減少したことと同じ効果をもたらす。

したがって、実際の水平変位は、水平力だけでなく軸力によっても影響を受けることになる。これを数式で表現すれば、次式のようになる。

$$\Delta = V/K \quad K = K_0 + K_G \quad (8.3.1)$$

ここで、 K_0 は柱部材固有の水平剛性で、 K_G は軸力によって増減された水平剛性を表す。トラス、梁、板要素の幾何剛性マトリックス構成は、「7. 座屈解析」を参照する。

P-デルタ解析をステップ別に整理すると、次のようになる。

解析ステップ 1

$$\Delta_1 = V/K_0$$

解析ステップ 2

$$\Delta_2 = f(P, \Delta_1), \Delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

解析ステップ 3

$$\Delta_3 = f(P, \Delta_2), \Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

解析ステップ 4

$$\Delta_4 = f(P, \Delta_3), \Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$$

解析ステップ n

$$\Delta_n = f(P, \Delta_{n-1}), \Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \dots + \Delta_n$$

プログラム内部で実行される P-デルタ解析過程を、ステップ別に説明すると、次のようになる。

解析ステップ 1 を通して、水平力による Δ_1 を計算した後、軸力による幾何剛性マトリックスを求めて、初期の弾性剛性マトリックスに幾何剛性マトリックスを組合わせて新規に剛性マトリックスを構成する。新規に構成された剛性マトリックスを用いて、P-デルタ効果を考慮した水平変位 Δ_2 を計算し、収束条件を満足するか否かを検討する。収束条件は、「P-デルタ解析制御」で与えられた最大繰り返し回数と収束判定値に対する検討を意味する。収束条件を満足する場合には、繰り返し解析の実行を終了し、満足しない場合には、同様の手順を繰り返して収束条件を満足するまで実行する。

P-デルタ解析は、比較的微小な変位(弾性範囲)においても、非常に良好な結果が得られる。

P-デルタ解析に適用する静的のつり合い方程式を整理すると次のようになる。

$$[K]\{u\} + [K_G]\{u\} = \{P\} \quad (8.3.2)$$

ここで、

$[K]$: 変形前モデルの剛性マトリックス(Stiffness Matirx)

$[K_G]$: 繰り返し解析で得られた断面力と応力度によって新規に構成された幾何剛性マトリックス (Geometric Stiffness Matrix)

$\{P\}$: 静的荷重ベクトル

$\{u\}$: 変位ベクトル

P-デルタ解析機能は、以下の仮定下で行われる。

P-デルタ効果のための幾何剛性マトリックスは、トラス要素、梁要素、壁要素に対してだけ計算できる。

梁要素の水平変位(曲げ及びせん断変形)は、軸力による"Large-Stress Effect"に対してだけ考慮される。

P-デルタ解析は、弾性領域にだけ有効である。

一般的に、P-デルタ解析は解析時間が非常に長くなるため、線形静的解析による構造設計が完了した段階で、最終的な検討として適用することを推奨する。

8.4 幾何学的非線形解析

8.4.1 概要

構造物に大きな変形が生じると構造物の幾何学的形状が変形し、ひずみと変位の関係が非線形になる。下図を見ると、最初は平衡状態(A)であった構造物が荷重(重り)によって変形し始めて(B)、荷重変位関係が非線形になる。

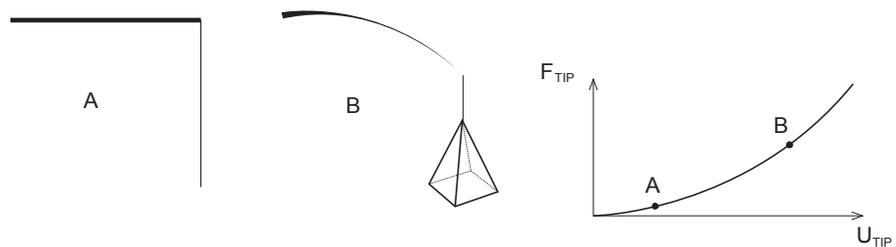


図 8.4.1 大変形における荷重変位関係

幾何学的非線形とは、このような幾何形状の変化によって構造物に生ずる非線形性をいい、このような場合に剛性マトリックス \mathbf{K} は変位 \mathbf{u} の関数となる。

幾何非線形解析は変形が生ずる間構造物の幾何学的形状が変わるので変形前の形状(初期形状)と変形後の形状はお互いに違うという家庭を利用する。またひずみが微笑するという家庭を利用しない。

幾何学的非線形解析の定式化は大きく、Updated Lagrangian 法(UL 法)と Total Lagrangian 法(TL 法)の 2 つがある。2 つの定式化過程は基本的に同じだが、ひずみと応力を表現する方法が異なる。TL 法で使用する応力とひずみは 2nd Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみで、UL 法で使用する応力とひずみは Cauchy 応力と線形オイラーひずみ増分である。TL 法ではひずみと応力を変形前の形状に対して表現し、UL 法では変形後の形状に対して表現する。例えば、1 次元解析の場合に 2nd Piola-Kirchhoff 応力は力と変形前の断面積の比(F/A_0)で、Cauchy 応力は力と変形後(現在)の断面積の比(F/A)で表す。

プログラムでは基本的に TL 法を使用するが、梁要素だけは co-rotational 法を使用している。

ある物体が時間によって変形を発生する様子を図 8.4.2 のように表現することができる。図 8.4.2 では初期状態(変形前の状態)を Ω_0 とし、現在の状態(変形後の状態)を Ω としている。ここで、 $\bar{\mathbf{x}}$ は初期状態の空間座標で、 \mathbf{x} は t だけ時間が経過したときの空間座標を表す。

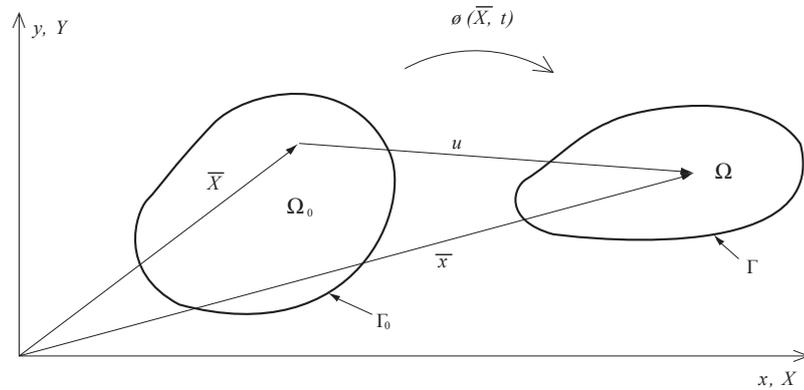


図 8.4.2 空間座標

Green-Lagrange ひずみは次式(8.4.1)のように変形前の座標で定義することができる。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \text{ or } E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (8.4.1)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{X}}} = \frac{\partial(\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{u})}{\partial \bar{\mathbf{X}}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{\mathbf{X}}}$$

ここで、

\mathbf{E} or E_{ij} : Green-Lagrange ひずみ

\mathbf{F} : 変形勾配

1次元構造物の場合は、式(8.4.1)を式(8.4.2)のように表すことができる。

$$E_{11} = \frac{1}{2} \frac{L^2 - \bar{L}^2}{\bar{L}^2} \quad (8.4.2)$$

ここで、

\bar{L} : 変形前の要素長さ

L : 変形後の要素長さ

式(8.4.2)で変形が微小の場合は、Green-Lagrange ひずみが式(8.4.3)のように線形ひずみとなることが分かる。

$$E_{11} = \frac{1}{2} \frac{(L - \bar{L})(L + \bar{L})}{\bar{L}^2} = \frac{1}{2} \frac{L - \bar{L}}{\bar{L}} \left(\frac{L - \bar{L}}{\bar{L}} + \frac{2\bar{L}}{\bar{L}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{L - \bar{L}}{\bar{L}} \right)^2 + \frac{L - \bar{L}}{\bar{L}} \quad (8.4.3)$$

$$\cong \frac{L - \bar{L}}{\bar{L}}$$

3次元連続体で2nd Piola-Kirchhoff 応力の意味を調べるために、Cauchy 応力との関係を導く。エネルギーは Cauchy 応力、あるいは2nd Piola-Kirchhoff 応力など、どの応力でもエネルギーは同じなので、仮想仕事は式(8.4.4)のようになる。

$$r = \int \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 = \int \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int J \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0, \quad J = \det(\mathbf{F}) \quad (8.4.4)$$

ここで、

\mathbf{S} : 2nd Piola-Kirchhoff 応力

$\boldsymbol{\sigma}$: Cauchy 応力

$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$: 線形オイラーひずみ増分

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

まず、Green-Lagrange ひずみと変形勾配を変分すると、それぞれ式(8.4.5)、(8.4.6)になる。

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) \quad (8.4.5)$$

$$\delta \mathbf{F} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} \quad (8.4.6)$$

上記の式(8.4.6)を式(8.4.5)に代入すると、式(8.4.7)のように整理することができる。

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} \right)^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F} \right) \right) = \mathbf{F}^T \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right) \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} \quad (8.4.7)$$

さらに、式(8.4.7)を式(8.4.4)に代入して整理すると、式(8.4.8)が得られる。

$$r = \int \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 = \int \mathbf{S} : (\mathbf{F}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F}) dV_0 = \int \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 = \int \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV_0 \quad (8.4.8)$$

これより、Cauchy 応力と 2nd Piola-Kirchhoff 応力の関係を式(8.4.9)のように示すことができる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\mathbf{J}} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (8.4.9)$$

時間 $t + \Delta t$ における仮想仕事の定理を 2nd Piola-Kirchhoff 応力と Green-Lagrange ひずみで表現すると式(8.4.10)のようになる。

$${}^{t+\Delta t} r = \int {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} E_{ij} dV_0 \quad (8.4.10)$$

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + \Delta S_{ij}$$

$${}^{t+\Delta t} E_{ij} = {}^t E_{ij} + \Delta E_{ij} \quad (8.4.11)$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + {}^t u_{k,i} \delta u_{k,j} + \delta u_{k,i} {}^t u_{k,j} + \delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \delta u_{k,j} \Delta u_{k,i})$$

ここで、

r : 外部の力による仮想仕事

式(8.4.11)を式(8.4.10)に代入して整理すると、次式が得られる。

$$\int \Delta S_{ij} \delta e_{ij} dV_0 + \int {}^t S_{ij} \delta \eta_{ij} dV_0 = {}^{t+\Delta t} r - \int {}^t S_{ij} \delta e_{ij} dV_0 \quad (8.4.12)$$

ここで、

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} + {}^i u_{k,i} \delta u_{k,j} + \delta u_{k,i} {}^i u_{k,j}) : \text{線形項}$$

$$\delta \eta_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \delta u_{k,j} \Delta u_{k,i}) : \text{非線形項}$$

ΔS_{ij} をテイラー級数で展開する。

$$\Delta S_{ij} = {}^{t+\Delta} S_{ij} - {}^t S_{ij} = \left({}^t S_{ij} + \frac{\partial {}^t S_{ij}}{\partial {}^t E_{kl}} \Delta E_{kl} + \text{high order} \right) - {}^t S_{ij} \quad (8.4.13)$$

式(8.4.13)を式(8.4.12)の一番目の項に代入して、 ΔE_{kl} の 2 次以上の項を無視すると、1 番目の項は式(8.4.14)のように線形化された式となる。

$$\begin{aligned} \int \Delta S_{ij} \delta e_{ij} dV_0 &= \int \left(\frac{\partial {}^t S_{ij}}{\partial {}^t E_{kl}} \Delta E_{kl} \right) \delta e_{ij} dV_0 = \int D_{ijkl} \Delta E_{kl} \delta e_{ij} dV_0 \\ \Delta E_{ij} &= \Delta e_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + {}^i u_{k,i} \Delta u_{k,j} + \Delta u_{k,i} {}^i u_{k,j}) \end{aligned} \quad (8.4.14)$$

また、 ${}^t S_{ij} = {}^t S_{ji}$ を利用して式(8.4.12)の 2 番目の項を整理すると、次のようになる。

$$\int {}^t S_{ij} \delta \eta_{ij} dV_0 = \int {}^t \mathbf{S} : (\delta \mathbf{L}^T \Delta \mathbf{L}) dV_0, \quad L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad (8.4.15)$$

式(8.4.12)の右側の各項は、式(8.4.16)のように示すことができる。

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta} r &= \delta \mathbf{u}^T {}^{t+\Delta} \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \int {}^t S_{ij} \delta e_{ij} dV_0 &= \int {}^t \mathbf{S} : \delta \mathbf{e} dV_0 = \delta \mathbf{u}^T {}^t \mathbf{f}_{\text{int}} \end{aligned} \quad (8.4.16)$$

ここで、

$$\delta \mathbf{u} = [\delta u_i \quad \delta v_1 \quad \delta w_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \delta w_2 \quad \cdots \quad \delta u_N \quad \delta v_N \quad \delta w_N]^T$$

したがって、式(8.4.12)の右側の項を式(8.4.16)を利用して整理すると、次のようになる。

$${}^{t+\Delta} r - \int {}^t \mathbf{S} : \delta \mathbf{e} dV_0 = \delta \mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta} \mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{f}_{\text{int}}) \quad (8.4.17)$$

式(8.4.12)に式(8.4.14~15, 17)を代入すると、式(8.4.18)になる。

ここで、左項は1番目の項は線形ひずみによって発生する仮想仕事であり、2 番目の項は非線形ひずみによる仮想仕事である。

$$\int \delta \mathbf{e}^T \mathbf{D} \Delta \mathbf{e} dV_0 + \int {}^t \mathbf{S} : \delta \mathbf{L}^T \Delta \mathbf{L} dV_0 = \delta \mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta} \mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{f}_{\text{int}}) \quad (8.4.18)$$

式(8.4.18)は式(8.4.19)のようになり、剛性マトリックス \mathbf{K}_L^e と \mathbf{K}_{NL}^e は要素の形状関数によって決定される。

$$\left({}^t \mathbf{K}_L^e + {}^t \mathbf{K}_{NL}^e \right) \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta} \mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t \mathbf{f}_{\text{int}} \quad (8.4.19)$$

8.4.2 トラス要素

トラス要素は、要素座標系の並進変位 u, v, w の自由度を持ち、変位は形状関数 N_i を用いて以下のように示すことができる。

$$u = \sum_{i=1}^N N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^N N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^N N_i w_i \quad (8.4.20)$$

トラス要素の応力とひずみを以下に表す。

$$\mathbf{S} = \{S_x\}, \quad \mathbf{E} = \{E_x\} \quad (8.4.21)$$

ここで、 x は要素座標系である。

式(8.4.19)から、仮想ひずみの線形項 $\delta \mathbf{e}$ は次のように表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \{\delta u_x\} + \{\delta u_x 'u_x + \delta v_x 'v_x + \delta w_x 'w_x\} \quad (8.4.22)$$

式(8.4.22)は、次のように仮想変位項 $\delta \mathbf{u}$ とマトリックス \mathbf{B}_L の積で表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_{L0} \delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_{L1} \delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_L \delta \mathbf{u} \quad (8.4.23)$$

増分ひずみの線形項も同じ形で表すことができる。

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_{L0} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_{L1} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{u} \quad (8.4.24)$$

式(8.4.23)と式(8.4.24)で変位-ひずみ関係マトリックスは次のようになる。

$$\mathbf{B}_{L0} = \{N_{1,x} \quad 0 \quad 0 \quad N_{2,x} \quad 0 \quad 0\} \quad (8.4.25)$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \{ 'u_x N_{1,x} \quad 'v_x N_{1,x} \quad 'w_x N_{1,x} \quad 'u_x N_{2,x} \quad 'v_x N_{2,x} \quad 'w_x N_{2,x} \} \quad (8.4.26)$$

式(8.4.19)で仮想ひずみの非線形項を構成する $\delta \mathbf{L}$ は次のようである。

$$\delta \mathbf{L} = \{\delta u_x \quad \delta v_x \quad \delta w_x\}^T \quad (8.4.27)$$

式(8.4.27)は仮想変位項 $\delta \mathbf{u}$ とマトリックス \mathbf{B}_{NL} の積で表すことができる。

$$\delta \mathbf{L} = \mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u} \quad (8.4.28)$$

同様の方法で $\Delta \mathbf{L}$ も次のように示すことができる。

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{B}_{NL} \Delta \mathbf{u} \quad (8.4.29)$$

ここで、

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} \end{bmatrix}$$

式(8.4.23～24)と式(8.4.27～28)を式(8.4.19)に代入して整理すると、線形化されたつり合い方程式を得ることができる。

$$\delta \mathbf{u}^T ({}^t \mathbf{K}_L^e + {}^t \mathbf{K}_{NL}^e) \Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext}^e - {}^t \mathbf{f}_{int}^e) \quad (8.4.30)$$

式(8.4.30)の各項は次のようである。

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{K}_L^e &= \int_{L_e} A \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dL \\ {}^t \mathbf{K}_{NL}^e &= \int_{L_e} A {}^t \mathbf{B}_{NL}^T {}^t \hat{\mathbf{S}} {}^t \mathbf{B}_{NL} dL \\ {}^t \mathbf{f}_{int}^e &= \int_{L_e} A {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{S} dL \end{aligned} \quad (8.4.31)$$

ここで、 A は断面積である。

応力成分で構成されるマトリックス ${}^t \hat{\mathbf{S}}$ は次のようである。

$${}^t \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad {}^t \mathbf{S} = [{}^t S_{xx}] \quad (8.4.32)$$

トラス要素の解析結果は、線形解析と同じく節点位置の応力と断面力があり、さらに積分点での応力結果をテーブルから確認することができる。

8.4.3 梁要素

梁要素は線形剛性に射影マトリックス(Projection Matrix)を使用して幾何非線形解析を行うように考案された co-rotational アルゴリズムを適用している。変形状態での内部エネルギーは次のようである。

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (8.4.33)$$

ここで、

\mathbf{u} : 節点の変位を表現する変位ベクトル

\mathbf{K} : 剛性マトリックス

\mathbf{f} : 荷重ベクトル

構造体の変位は次のように、剛体挙動を表すモード行列 Γ と剛体挙動による変位を除いた純粋の変形変位 $\bar{\mathbf{u}}$ と、剛体挙動の変位ベクトル \mathbf{b} を利用して次のように示すことができる。

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \Gamma \mathbf{b} \quad (8.4.34)$$

剛体挙動で、剛体挙動を含む変位を使用した変形エネルギーと純粋の変形変位を使用した変形エネルギーは等しい。

$$\phi(\mathbf{u}) = \phi(\bar{\mathbf{u}}) \quad (8.4.35)$$

純粋の変形変位 $\bar{\mathbf{u}}$ が変位 \mathbf{u} の純粋変形で Γ と直交するため、 $\Gamma^T \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ といえる。式(8.4.34)を利用すると、 \mathbf{b} を式(8.4.36)のように整理することができる。

$$\mathbf{b} = -(\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \mathbf{u} \quad (8.4.36)$$

式(8.4.36)を式(8.4.34)に代入すると、変形エネルギーを式(8.4.35)のように示すことができる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{P} \mathbf{u} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{I} - \Gamma(\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \\ \phi(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{P}^T \mathbf{f} \end{aligned} \quad (8.4.37)$$

ここで、 \mathbf{P} は変位 \mathbf{u} での剛体挙動の変位を制御する役割をする。式(8.4.33)のエネルギーと比較すると、剛性と荷重を式(8.4.38)のように求めることができる。

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{P}^T \mathbf{f} \quad (8.4.38)$$

上記で整理した式は微小回転に対するもので、これを大回転(Large rotation)に対して拡張すると、次のようになる。梁要素での全体変位を剛体挙動の変位と変形変位に区

分することができ、変形エネルギーの計算に使われる変形による変位と回転の関係式は式(7)のように表現することができる。

$$\begin{aligned}\phi &= \phi(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \\ \bar{\mathbf{u}}_a^e &= \mathbf{E}^T (\mathbf{u}_a^g + \mathbf{X}_a^g - \mathbf{u}_o^g) - \mathbf{X}_a^e \\ \bar{\mathbf{T}}_a &= \mathbf{E}^T \mathbf{S}_a \mathbf{E}_o\end{aligned}\quad (8.4.39)$$

ここで、

- $\bar{\mathbf{u}}_a^e$: 節点 a での変形変位
- $\bar{\mathbf{T}}_a$: 節点 a の回転 $\boldsymbol{\theta}_a$ の変形部分と関連した変換マトリックス
- \mathbf{E} : 現在状態の要素軸
- \mathbf{E}_o : 初期の要素基準軸
- \mathbf{X} : 初期の節点座標
- \mathbf{S}_a : 節点 a での基準軸からの全体回転
- g, e : 全体座標系と要素座標系

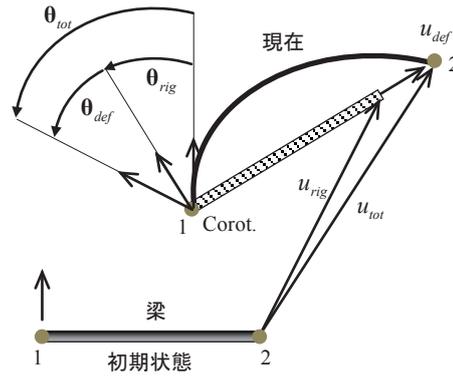


図 8.4.3 2次元梁要素の挙動と変形

式(8.4.39)に対して変分を適用すると、式(8.4.40)のようになる。

$$\begin{aligned}\delta \bar{\mathbf{u}}_a^e &= \delta \mathbf{E}^T (\mathbf{u}_a^g + \mathbf{X}_a^g - \mathbf{u}_o^g) + \mathbf{E}^T (\delta \mathbf{u}_a^g - \delta \mathbf{u}_o^g) \\ \delta \bar{\mathbf{T}}_a &= \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S}_a \mathbf{E}_o + \mathbf{E}^T \delta \mathbf{S}_a \mathbf{E}_o\end{aligned}\quad (8.4.40)$$

軸方向に、ベクトルに相当する 3×3 の交代行列(Skew Symmetric Matrix)を導入すると、任意の3次元ベクトルに対して式(8.4.42)の条件を満たす。

$$\text{Spin}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}\quad (8.4.41)$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$: component of axial vector($\boldsymbol{\omega}$)

$$\text{Spin}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = -\text{Spin}(\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}\quad (8.4.42)$$

直交行列 \mathbf{R} に対する交代行列 $\mathbf{\Omega}_R$ を仮定して整理すると、 $\delta\mathbf{R}$ を式(8.4.43)のように表すことができる。

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \exp(\mathbf{\Omega}_R) = \exp[\text{Spin}(\boldsymbol{\omega}_R)] \\ \delta\mathbf{R} &= \text{Spin}(\delta\mathbf{\Omega}_R) \exp[\text{Spin}(\boldsymbol{\omega}_R)] = \text{Spin}(\delta\mathbf{\Omega}_R)\mathbf{R}\end{aligned}\quad (8.4.44)$$

この結果を式(8.4.40)に適用すると、式(8.4.45)を求めることができる。

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathbf{u}}_a^e &= \mathbf{E}^T (-\text{Spin}(\delta\boldsymbol{\omega}_E^e)(\mathbf{u}_a^e + \mathbf{X}_a^e - \mathbf{u}_o^e) + (\delta\mathbf{u}_a^e - \delta\mathbf{u}_o^e)) \\ \delta\bar{\mathbf{T}}_a &= [-\mathbf{E}^T \text{Spin}(\delta\boldsymbol{\omega}_E^e)\mathbf{S}_a + \mathbf{E}\text{Spin}(\delta\boldsymbol{\omega}_S^e)\mathbf{S}_a]\mathbf{E}_o\end{aligned}$$

要素座標系と全体座標系の関係を利用すると変位を要素座標系の変位に変換することができる。

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^e &= \mathbf{E}^T \mathbf{r}^s \\ \text{Spin}(\mathbf{r}^e) &= \mathbf{E}^T \text{Spin}(\mathbf{r}^s)\mathbf{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathbf{u}}_a^e &= \mathbf{E}^T (-\text{Spin}(\delta\boldsymbol{\omega}_E^e)\mathbf{E}\mathbf{E}^T(\mathbf{u}_a^e + \mathbf{X}_a^e - \mathbf{u}_o^e) + (\delta\mathbf{u}_a^e - \delta\mathbf{u}_o^e)) \\ &= -\mathbf{E}^T \text{Spin}(\delta\boldsymbol{\omega}_E^e)\mathbf{E}(\mathbf{u}_a^e + \mathbf{X}_a^e - \mathbf{u}_o^e) + (\delta\mathbf{u}_a^e - \delta\mathbf{u}_o^e) \\ &= -\text{Spin}(\delta\boldsymbol{\omega}_E^e)(\mathbf{u}_a^e + \mathbf{X}_a^e - \mathbf{u}_o^e) + (\delta\mathbf{u}_a^e - \delta\mathbf{u}_o^e) \\ \delta\bar{\mathbf{T}}_a^e &= [\text{Spin}(\delta\boldsymbol{\omega}_S^e) - \text{Spin}(\delta\boldsymbol{\omega}_E^e)]\bar{\mathbf{T}}_a\end{aligned}\quad (8.4.45)$$

有限要素は純粹の並進変形状態で不変であるため、パッチテスト(Patch Test)を通過する要素であれば式(8.4.45)で \mathbf{u}_o^e を消去することができ、 $\mathbf{x}^e = \mathbf{X}^e + \bar{\mathbf{u}}^e$ 条件を反映して整理すると、式(8.4.46)になる。

$$\begin{aligned}\delta\bar{\mathbf{u}}_a^e &= -\text{Spin}(\delta\boldsymbol{\omega}_E^e)\mathbf{X}_a^e + \delta\mathbf{u}_a^e \\ &= \text{Spin}(\mathbf{x}_a^e)\delta\boldsymbol{\omega}_E^e + \delta\mathbf{u}_a^e\end{aligned}\quad (8.4.46)$$

\mathbf{f} を全体座標系で変形エネルギーの変位と回転に対する変分だとすると、 \mathbf{f} は剛体変位を除いた変形変位と回転に対する変分で示すことができる。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_u^a \\ \mathbf{f}_\theta^a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{u}_a} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta_a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_a^T}{\partial \mathbf{u}_a} & \frac{\partial \bar{\theta}_a^T}{\partial \theta_a} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\mathbf{u}}_a} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\theta}_a} \end{Bmatrix}\quad (8.4.47)$$

$\bar{\mathbf{T}}_a$ が $\boldsymbol{\theta}_a$ と直交して、 $\delta\boldsymbol{\omega}_S$ が $\delta\boldsymbol{\theta}_a$ と同じだとすると、微小変形の仮定下で式(12)と式(8.4.46)に変位と回転角に対する変分を適用して式(8.4.48)のような関係を得ることができる。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\theta}_a^T}{\partial \mathbf{u}_a} \\ \frac{\partial \bar{\theta}_a^T}{\partial \theta_a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_E^T}{\partial \mathbf{u}_a} \\ \mathbf{I} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_E^T}{\partial \theta_a} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_a^T}{\partial \mathbf{u}_a} \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_a^T}{\partial \theta_a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{I} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_E^T}{\partial \mathbf{u}_a} \text{Spin}(\mathbf{x}_a^e) \\ -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}_E^T}{\partial \theta_a} \text{Spin}(\mathbf{x}_a^e) \end{Bmatrix}\quad (8.4.48)$$

式(8.4.48)の関係式を式(8.4.47)に代入して整理すると式(8.4.49)になる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^a &= [\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_a \boldsymbol{\Psi}_a^T] \mathbf{f}^a = \mathbf{P}_a^T \mathbf{f}^a \\ \mathbf{P} &= \mathbf{I} - \boldsymbol{\Psi} \mathbf{\Gamma}^T \end{aligned} \quad (8.4.49)$$

$$\mathbf{\Gamma}_a = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_E^T}{\partial \mathbf{u}_a} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_E^T}{\partial \theta_a} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\Psi} = \begin{Bmatrix} -Spin(\mathbf{x}_a^e) \\ \mathbf{I} \end{Bmatrix}$$

図 2 のような変形が発生する梁要素に対する $\boldsymbol{\Psi}$, $\mathbf{\Gamma}$ に対する行列は次のようになる。

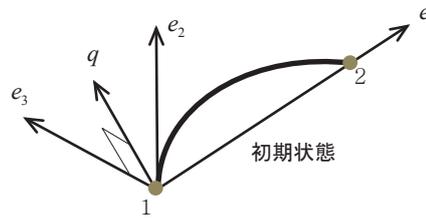


図 8.4.4 梁要素の要素座標系

要素座標軸の定義で、一番目の軸は梁要素の 2 つ節点を連結する直線方向で選択する。

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{E}^T (\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e)}{|\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e|} = \frac{\mathbf{x}_2^e}{|\mathbf{x}_2^e|} \quad (8.4.50)$$

初期状態で梁要素の節点に剛体で繋がっているベクトルを \mathbf{q} だとすると、 \mathbf{e}_3 は \mathbf{q} , \mathbf{e}_1 に直交するように計算することができる。

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}_1 \mathbf{E}_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{e}_1}{|\mathbf{q} \times \mathbf{e}_1|} \quad (8.4.51)$$

\mathbf{e}_2 は $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ で計算する。

要素座標系の回転角の変化量 $\delta \boldsymbol{\omega}_E$ は、式(8.4.52)のように表現できる。

$$\delta \boldsymbol{\omega}_E = \begin{Bmatrix} -\mathbf{e}_2^T \delta \mathbf{e}_3 \\ -\mathbf{e}_3^T \delta \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2^T \delta \mathbf{e}_1 \end{Bmatrix} \quad (8.4.52)$$

\mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_3 に対するひずみは、式(20)のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{l} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T) (\delta \mathbf{u}_2 - \delta \mathbf{u}_1) \\ \delta \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{l q_2} \left\{ \mathbf{e}_2 [q_1 (\delta u_2^3 - \delta u_1^3) - l \delta q_3] - \mathbf{e}_1 q_2 (\delta u_2^3 - \delta u_1^3) \right\} \end{aligned} \quad (8.4.53)$$

$$\delta \mathbf{w}_E = \begin{Bmatrix} \frac{1}{lq_2} [l\delta q_3 - q_1(\delta u_2^3 - \delta u_1^3)] \\ -\frac{1}{l}(\delta u_2^3 - \delta u_1^3) \\ \frac{1}{l}(\delta u_2^3 - \delta u_1^3) \end{Bmatrix}$$

ここで、 l は梁要素の長さである。

梁要素計算に使われる行列は式(8.4.54)の通りである。

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} 0 & z_a^e & -y_a^e \\ z_a^e & 0 & x_a^e \\ y_a^e & -x_a^e & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Gamma_{12,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/l \\ \eta/l & 1/l & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l \\ -\eta/l & -1/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \eta = \frac{q_1}{q_2} \quad (8.4.54)$$

ここで、
 x, y, z : 節点座標

8.4.4 平面応力要素

平面応力要素はアイソパラメトリック要素で構成されていて、3 節点、4 節点の要素が使用できる。各要素は線形要素と同じ形状関数を使用し、非適合モードは使用しない。

平面応力要素は、要素座標系の並進変位 u, v の自由度を持ち、形状関数 N_i を用いて以下のように示すことができる。

$$u = \sum_{i=1}^N N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^N N_i v_i \quad (8.4.55)$$

平面応力要素の応力とひずみを以下に表す。

$$\mathbf{S} = \{S_{xx} \quad S_{yy} \quad S_{xy}\}^T, \quad \mathbf{E} = \{E_{xx} \quad E_{yy} \quad E_{xy}\}^T \quad (8.4.56)$$

式(8.4.19)から、仮想ひずみの線形項 $\delta \mathbf{e}$ は次のように表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta v_{,y} \\ \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} {}^t u_{,x} + \delta v_{,x} {}^t v_{,x} \\ \delta u_{,y} {}^t u_{,y} + \delta v_{,y} {}^t v_{,y} \\ \delta u_{,x} {}^t u_{,y} + \delta v_{,x} {}^t v_{,y} + \delta u_{,y} {}^t u_{,x} + \delta v_{,y} {}^t v_{,x} \end{Bmatrix} \quad (8.4.57)$$

式 (8.4.57)は、次のように仮想変位項 $\delta \mathbf{u}$ とマトリックス \mathbf{B}_L の積で表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_{L0} \delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_{L1} \delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_L \delta \mathbf{u} \quad (8.4.58)$$

増分ひずみの線形項も同じ形で表すことができる。

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_{L0} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_{L1} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{u} \quad (8.4.59)$$

式(8.4.58～59)で変位-ひずみ関係マトリックスは次のようになる。

$$\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{N,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{N,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{N,y} & N_{N,x} \end{bmatrix} \quad (8.4.60)$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} {}^t u_{,x} N_{1,x} & {}^t v_{,x} N_{1,x} & \cdots \\ {}^t u_{,y} N_{1,y} & {}^t v_{,y} N_{1,y} & \cdots \\ ({}^t u_{,x} N_{1,y} + {}^t u_{,y} N_{1,x}) & ({}^t v_{,x} N_{1,y} + {}^t v_{,y} N_{1,x}) & \cdots \\ {}^t u_{,x} N_{n,x} & {}^t v_{,x} N_{n,x} & \cdots \\ {}^t u_{,y} N_{n,y} & {}^t v_{,y} N_{n,y} & \cdots \\ ({}^t u_{,x} N_{n,y} + {}^t u_{,y} N_{n,x}) & ({}^t v_{,x} N_{n,y} + {}^t v_{,y} N_{n,x}) & \cdots \end{bmatrix} \quad (8.4.61)$$

式(8.4.19)で仮想ひずみの非線形項を構成する $\delta \mathbf{L}$ は次のようである。

$$\delta \mathbf{L} = \{\delta u_{,x} \quad \delta u_{,y} \quad \delta v_{,x} \quad \delta v_{,y}\}^T \quad (8.4.62)$$

式(8.4.62)は仮想変位項 $\delta \mathbf{u}$ とマトリックス \mathbf{B}_{NL} の積で表すことができる。

$$\delta \mathbf{L} = \mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u} \quad (8.4.63)$$

同様の方法で $\Delta \mathbf{L}$ も次のように示すことができる。

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{B}_{NL} \Delta \mathbf{u} \quad (8.4.64)$$

ここで、

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{N,x} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & \cdots & N_{N,y} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{N,x} \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{N,y} \end{bmatrix}$$

式(8.4.58～59)と式(8.4.63～64)を式(8.4.19)に代入して整理すると、線形化されたつり合い方程式を得ることができる。

$$\delta \mathbf{u}^T ({}^t \mathbf{K}_L^e + {}^t \mathbf{K}_{NL}^e) \Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext}^e - {}^t \mathbf{f}_{int}^e) \quad (8.4.65)$$

式(8.4.65)の各項は次のようである。

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{K}_L^e &= \int_{A_e} {}^t \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA \\ {}^t \mathbf{K}_{NL}^e &= \int_{A_e} {}^t {}^t \mathbf{B}_{NL}^T {}^t \hat{\mathbf{S}} {}^t \mathbf{B}_{NL} dA \\ {}^t \mathbf{f}_{int}^e &= \int_{A_e} {}^t {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{S} dA \end{aligned} \quad (8.4.66)$$

ここで、 t は厚さである。

応力成分で構成されるマトリックス ${}^t \hat{\mathbf{S}}$ は次のようである。

$${}^t \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad {}^t \mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^t S_{xx} & {}^t S_{xy} \\ {}^t S_{xy} & {}^t S_{yy} \end{bmatrix} \quad (8.4.67)$$

平面応力要素の解析結果は、線形解析と同じく節点位置の応力とひずみがあり、さらに積分点での応力とひずみ結果をテーブルから確認することができる。以下に積分次数を示す。

3 節点 3 角形: 1 つのガウス積分点

4 節点 4 角形: 4 つのガウス積分点

8.4.5 板要素

幾何学的非線形を考慮する板要素は“degenerated shell approach”を用いて平面応力状態の面内変形と、曲げ/せん断で構成される面外変形を考慮する。一方、幾何学的非線形を考慮する場合は面内回転の自由度が考慮できず、Mindlin plate theory を基づいてせん断変形を考慮する。使用できる要素には線形解析と同じく、3 節点、4 節点の要素がある。

板要素では厚さ方向の引張応力を無視することが一般的であるが、定式化過程ではすべての応力とひずみ成分を考慮する。

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \{S_{xx} \ S_{yy} \ S_{zz} \ S_{xy} \ S_{yz} \ S_{zx}\}^T \\ \mathbf{E} &= \{E_{xx} \ E_{yy} \ E_{zz} \ E_{xy} \ E_{yz} \ E_{zx}\}^T \end{aligned} \quad (8.4.68)$$

要素内部の任意位置に対する並進変位は次のように中立面における並進変位と回転から表すことができる。

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{t} \quad (8.4.69)$$

ここで、ベクトル \mathbf{t} は回転による効果を考慮した項であり、次のように表すことができる。

$$\mathbf{t} = \frac{t}{2} \zeta (\mathbf{T} - \bar{\mathbf{T}}) \quad (8.4.70)$$

ここで、

\mathbf{T} : deformed unit shell normal vector

$\bar{\mathbf{T}}$: undeformed unit shell normal vector

式(8.4.19)から、仮想ひずみの線形項 $\delta \mathbf{e}$ は次のように表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \delta(u_{0,x} + t_{x,x}) \\ \delta(v_{0,y} + t_{y,y}) \\ \delta(w_{0,z} + t_{z,z}) \\ \delta(u_{0,y} + t_{x,y}) + \delta(v_{0,x} + t_{y,x}) \\ \delta(v_{0,z} + t_{y,z}) + \delta(w_{0,y} + t_{z,y}) \\ \delta(w_{0,x} + t_{z,x}) + \delta(u_{0,z} + t_{x,z}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta(\mathbf{u}_{0,x} + \mathbf{t}_{,x})^T ({}^t \mathbf{u}_{0,x} + {}^t \mathbf{t}_{,x}) \\ \delta(\mathbf{u}_{0,y} + \mathbf{t}_{,y})^T ({}^t \mathbf{u}_{0,y} + {}^t \mathbf{t}_{,y}) \\ \delta(\mathbf{u}_{0,z} + \mathbf{t}_{,z})^T ({}^t \mathbf{u}_{0,z} + {}^t \mathbf{t}_{,z}) \\ \delta(\mathbf{u}_{0,x} + \mathbf{t}_{,x})^T ({}^t \mathbf{u}_{0,y} + {}^t \mathbf{t}_{,y}) + \delta(\mathbf{u}_{0,y} + \mathbf{t}_{,y})^T ({}^t \mathbf{u}_{0,x} + {}^t \mathbf{t}_{,x}) \\ \delta(\mathbf{u}_{0,y} + \mathbf{t}_{,y})^T ({}^t \mathbf{u}_{0,z} + {}^t \mathbf{t}_{,z}) + \delta(\mathbf{u}_{0,z} + \mathbf{t}_{,z})^T ({}^t \mathbf{u}_{0,y} + {}^t \mathbf{t}_{,y}) \\ \delta(\mathbf{u}_{0,z} + \mathbf{t}_{,z})^T ({}^t \mathbf{u}_{0,x} + {}^t \mathbf{t}_{,x}) + \delta(\mathbf{u}_{0,x} + \mathbf{t}_{,x})^T ({}^t \mathbf{u}_{0,z} + {}^t \mathbf{t}_{,z}) \end{Bmatrix} \quad (8.4.71)$$

式(8.4.19)で仮想ひずみの非線形項を構成する $\delta \mathbf{L}$ は次のようである。

$$\delta \mathbf{L} = \begin{Bmatrix} \delta(u_{0,x} + t_{x,x}) \\ \delta(u_{0,y} + t_{x,y}) \\ \delta(u_{0,z} + t_{x,z}) \\ \delta(v_{0,x} + t_{y,x}) \\ \delta(v_{0,y} + t_{y,y}) \\ \delta(v_{0,z} + t_{y,z}) \\ \delta(w_{0,x} + t_{z,x}) \\ \delta(w_{0,y} + t_{z,y}) \\ \delta(w_{0,z} + t_{z,z}) \end{Bmatrix} \quad (8.4.72)$$

マトリックス \mathbf{B}_L と \mathbf{B}_{NL} の説明はここでは省略する。要素剛性、または断面力の計算時は式(8.4.68)の応力とひずみを要素中立面に接する座標係に変換して使用する。回転による変位の表現方法と構成節点数別の要素特性は次のようである。

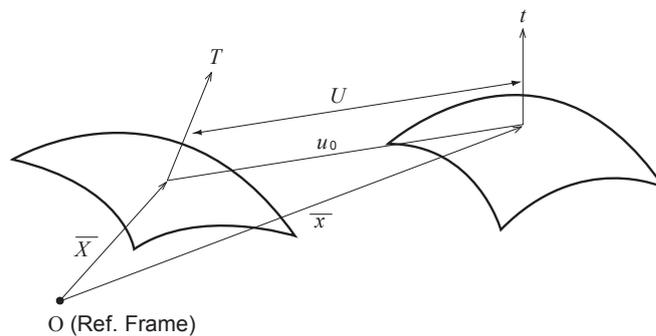


図 8.4.5 板要素の変形前と変形後の状態

3 節点、または 4 節点をの平面板は全体座標係で 3 つの並進変位と 3 つの回転変位をすべて考慮する。ただし、回転増分変位で厚さ方向ベクトルと垂直な成分は直交化の過程で消去される。

$$\mathbf{u}_i = \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi}\}^T \quad (8.4.73)$$

4 節点の板要素は Lagrangian 形状関数を用いて、有限回転によって変形された厚さ方向のベクトルは $\mathbf{T} = \delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T$ のように回転マトリックスの累積で計算する。回転マトリックスの増分量 $\delta\mathbf{R}$ は次のようになる。

$$\delta\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}\mathbf{S}(\delta\theta) + \frac{1-\cos\delta\theta}{\delta\theta^2}\mathbf{S}(\delta\theta)\mathbf{S}(\delta\theta) \quad (8.4.74)$$

ここで、

$\mathbf{S}(\delta\theta)$: skew symmetric matrix

せん断変形によるひずみは 4 辺での ANS(assumed natural strain)から計算してロッキング現象を防止する。

$$\gamma_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(1-\eta)\gamma_{\xi\xi}(0,-1) + \frac{1}{2}(1+\eta)\gamma_{\xi\xi}(0,1) \quad (8.4.75)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(1-x)\gamma_{\xi\eta}(-1,0) + \frac{1}{2}(1+x)\gamma_{\xi\eta}(1,0) \quad (8.4.76)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{z\alpha} \\ \gamma_{z\beta} \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi\xi} \\ \gamma_{\xi\eta} \end{Bmatrix} \quad (8.4.77)$$

ここで、 \mathbf{P} は座標変換マトリックスである。

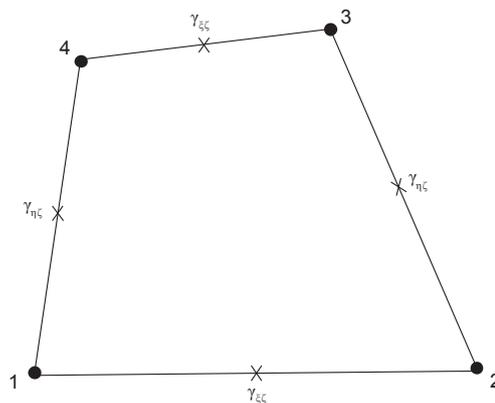


図 8.4.6 Tying point for interpolation of assumed shear strain

3 節点要素の計算では 4 節点要素の 4 番目の節点を 3 番目の節点と同じ座標を持つようにする手法を用いる。

板要素の解析結果は、線形解析と同じく節点位置の応力とひずみ、要素断面力などがあり、さらに積分点での応力とひずみをテーブルから確認することができる。応力とひずみは z 軸に沿って2ヶ所で計算し、面内挙動に対する厚さを基準にして、上端($z=t/2$)と($z=-t/2$)が基本位置となる。板要素は厚さ方向で3点のSimpson補間を行い、面積に対する積分次数は次のようである。

3 節点 3 角形:1つのガウス積分点

4 節点 4 角形:4つのガウス積分点

8.4.6 平面ひずみ要素

平面ひずみ要素はアイソパラメトリック要素で構成されていて、3 節点、4 節点の要素が使用できる。各要素は線形要素と同じ形状関数を使用し、非適合モードは使用しない。

平面ひずみ要素は、要素座標系の並進変位 u, v の自由度を持ち、定式化の展開過程は平面応力要素と同じである。

$$\delta \mathbf{u}^T ({}^t \mathbf{K}_L^e + {}^t \mathbf{K}_{NL}^e) \Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{\text{ext}}^e - {}^t \mathbf{f}_{\text{int}}^e) \quad (8.4.78)$$

式(8.4.78)の各項は応力-ひずみの関係を定義するマトリックス \mathbf{D} を除いて、平面応力要素と同じである。

平面ひずみ要素の解析結果は、線形解析と同じく節点位置の応力とひずみがあり、さらに積分点での応力とひずみ結果をテーブルから確認することができる。以下に積分次数を示す。

3 節点 3 角形: 1 つのガウス積分点

4 節点 4 角形: 4 つのガウス積分点

8.4.7 軸対称要素

軸対称要素はアイソパラメトリック要素で構成されていて、3 節点、4 節点の要素が使用できる。各要素は線形要素と同じ形状関数を使用する。

平面応力要素は要素座標系の並進変位 u, v の自由度を持ち、形状関数 N_i を用いて以下のように示すことができる。

$$u = \sum_{i=1}^N N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^N N_i v_i \quad (8.4.79)$$

軸対称要素の応力とひずみを以下に表す。

$$\mathbf{S} = \{S_{xx} \quad S_{yy} \quad S_{xy} \quad S_{zz}\}^T, \quad \mathbf{E} = \{E_{xx} \quad E_{yy} \quad E_{xy} \quad E_{zz}\}^T \quad (8.4.80)$$

式(8.4.19)から、仮想ひずみの線形項 $\delta \mathbf{e}$ は次のように表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta v_{,y} \\ \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \\ \frac{\delta u}{r} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} {}^t u_{,x} + \delta v_{,x} {}^t v_{,x} \\ \delta u_{,y} {}^t u_{,y} + \delta v_{,y} {}^t v_{,y} \\ \delta u_{,x} {}^t u_{,y} + \delta v_{,x} {}^t v_{,y} + \delta u_{,y} {}^t u_{,x} + \delta v_{,y} {}^t v_{,x} \\ \frac{\delta u {}^t u}{r^2} \end{Bmatrix} \quad (8.4.81)$$

式 (8.4.81)は、次のように仮想変位項 $\delta \mathbf{u}$ とマトリックス \mathbf{B}_L の積で表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_{L0} \delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_{L1} \delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_L \delta \mathbf{u} \quad (8.4.82)$$

増分ひずみの線形項も同じ形で表すことができる。

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_{L0} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_{L1} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{u} \quad (8.4.83)$$

式(8.4.82~83)で変位-ひずみ関係マトリックスは次のようになる。

$$\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{N,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{N,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & \cdots & N_{N,y} & N_{N,x} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \cdots & \frac{N_N}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.4.84)$$

$$\mathbf{B}_{L1} = \begin{bmatrix} {}^t u_{,x} N_{1,x} & {}^t v_{,x} N_{1,x} & \cdots \\ {}^t u_{,y} N_{1,y} & {}^t v_{,y} N_{1,y} & \cdots \\ ({}^t u_{,x} N_{1,y} + {}^t u_{,y} N_{1,x}) & ({}^t v_{,x} N_{1,y} + {}^t v_{,y} N_{1,x}) & \cdots \\ {}^t u \frac{N_1}{r^2} & 0 & \cdots \\ {}^t u_{,x} N_{N,x} & {}^t v_{,x} N_{N,x} & \\ {}^t u_{,y} N_{N,y} & {}^t v_{,y} N_{N,y} & \\ ({}^t u_{,x} N_{N,y} + {}^t u_{,y} N_{N,x}) & ({}^t v_{,x} N_{N,y} + {}^t v_{,y} N_{N,x}) & \\ {}^t u \frac{N_N}{r^2} & 0 & \end{bmatrix} \quad (8.4.85)$$

式(8.4.19)で仮想ひずみの非線形項を構成する $\delta \mathbf{L}$ は次のようである。

$$\delta \mathbf{L} = \left\{ \delta u_{,x} \quad \delta u_{,y} \quad \delta v_{,x} \quad \delta v_{,y} \quad \frac{\delta u}{r} \right\}^T \quad (8.4.86)$$

式(8.4.86)は仮想変位項 $\delta \mathbf{u}$ とマトリックス \mathbf{B}_{NL} の積で表すことができる。

$$\delta \mathbf{L} = \mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u} \quad (8.4.87)$$

同様の方法で $\Delta \mathbf{L}$ も次のように示すことができる。

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{B}_{NL} \Delta \mathbf{u} \quad (8.4.88)$$

ここで、

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & \cdots & N_{N,x} & 0 \\ N_{1,y} & 0 & \cdots & N_{N,y} & 0 \\ 0 & N_{1,x} & \cdots & 0 & N_{N,x} \\ 0 & N_{1,y} & \cdots & 0 & N_{N,y} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \cdots & \frac{N_N}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

式(8.4.82～83)と式(8.4.87～88)を式(8.4.19)に代入して整理すると、線形化されたつり合い方程式を得ることができる。

$$\delta \mathbf{u}^T ({}^t \mathbf{K}_L^e + {}^t \mathbf{K}_{NL}^e) \Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext}^e - {}^t \mathbf{f}_{int}^e) \quad (8.4.89)$$

式(8.4.89)の各項は次のようである。

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{K}_L^e &= \int_{A_e} r \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dA \\ {}^t \mathbf{K}_{NL}^e &= \int_{A_e} r {}^t \mathbf{B}_{NL}^T {}^t \hat{\mathbf{S}} {}^t \mathbf{B}_{NL} dA \\ {}^t \mathbf{f}_{int}^e &= \int_{A_e} r {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{S} dA \end{aligned} \quad (8.4.90)$$

ここで、

$${}^i\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^iS_{xx} & {}^iS_{xy} & \mathbf{0} \\ {}^iS_{xy} & {}^iS_{yy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^i\mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad {}^i\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^iS_{xx} & {}^iS_{xy} & 0 \\ {}^iS_{xy} & {}^iS_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & {}^iS_{zz} \end{bmatrix}$$

軸対称要素の解析結果は線形解析と同じく節点位置の応力とひずみがあり、さらに積分点での応力とひずみ結果をテーブルから確認することができる。以下に積分次数を示す。

3 節点 3 角形: 1 つのガウス積分点

4 節点 4 角形: 4 つのガウス積分点

8.4.8 ソリッド要素

ソリッド要素はアイソパラメトリック要素で構成されていて、4 節点、6 節点、8 節点の要素が使用できる。各要素は線形要素と同じ形状関数を使用し、非適合モードは使用しない。

ソリッド要素は、要素座標系の並進変位 u, v, w の自由度を持ち、形状関数 N_i を用いて以下のように示すことができる。

$$u = \sum_{i=1}^N N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^N N_i v_i, \quad w = \sum_{i=1}^N N_i w_i \quad (8.4.91)$$

ソリッド要素の応力とひずみを以下に表す。

$$\mathbf{S} = \{S_{xx} \quad S_{yy} \quad S_{zz} \quad S_{xy} \quad S_{yz} \quad S_{zx}\}^T$$

$$\mathbf{E} = \{E_{xx} \quad E_{yy} \quad E_{zz} \quad E_{xy} \quad E_{yz} \quad E_{zx}\}^T \quad (8.4.92)$$

式(8.4.19)から、仮想ひずみの線形項 $\delta \mathbf{e}$ は次のように表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta v_{,y} \\ \delta w_{,z} \\ \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \\ \delta v_{,z} + \delta w_{,y} \\ \delta w_{,z} + \delta u_{,z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta u_{,x} {}^t u_{,x} + \delta v_{,x} {}^t v_{,x} + \delta w_{,x} {}^t w_{,x} \\ \delta u_{,y} {}^t u_{,y} + \delta v_{,y} {}^t v_{,y} + \delta w_{,y} {}^t w_{,y} \\ \delta u_{,z} {}^t u_{,z} + \delta v_{,z} {}^t v_{,z} + \delta w_{,z} {}^t w_{,z} \\ \delta u_{,x} {}^t u_{,y} + \delta v_{,x} {}^t v_{,y} + \delta w_{,x} {}^t w_{,y} + \delta u_{,y} {}^t u_{,x} + \delta v_{,y} {}^t v_{,x} + \delta w_{,y} {}^t w_{,x} \\ \delta u_{,y} {}^t u_{,z} + \delta v_{,y} {}^t v_{,z} + \delta w_{,y} {}^t w_{,z} + \delta u_{,z} {}^t u_{,y} + \delta v_{,z} {}^t v_{,y} + \delta w_{,z} {}^t w_{,y} \\ \delta u_{,z} {}^t u_{,x} + \delta v_{,z} {}^t v_{,x} + \delta w_{,z} {}^t w_{,x} + \delta u_{,x} {}^t u_{,z} + \delta v_{,x} {}^t v_{,z} + \delta w_{,x} {}^t w_{,z} \end{Bmatrix} \quad (8.4.93)$$

式 (8.4.93)は、次のように仮想変位項 $\delta \mathbf{u}$ とマトリックス \mathbf{B}_L の積で表すことができる。

$$\delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_{L0} \delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_{L1} \delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_L \delta \mathbf{u} \quad (8.4.94)$$

増分ひずみの線形項も同じ形で表すことができる。

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{B}_{L0} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_{L1} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{B}_L \Delta \mathbf{u} \quad (8.4.95)$$

式(8.4.94～95)で変位-ひずみ関係マトリックスは次のようになる。

$$\mathbf{B}_{L0} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & \cdots & N_{N,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_{N,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,z} & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_{N,z} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & N_{2,y} & \cdots & N_{N,y} & N_{N,x} & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & 0 & \cdots & 0 & N_{N,z} & N_{N,y} \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & N_{2,z} & \cdots & N_{N,z} & 0 & N_{N,x} \end{bmatrix} \quad (8.4.96)$$

$$\mathbf{B}_{Li} = \begin{bmatrix} {}^i u_x N_{1,x} & {}^i v_x N_{1,x} & {}^i w_x N_{1,x} & {}^i u_x N_{2,x} & \cdots & {}^i w_x N_{N,1} \\ {}^i u_y N_{1,y} & {}^i v_y N_{1,y} & {}^i w_y N_{1,y} & {}^i u_y N_{2,y} & \cdots & {}^i w_y N_{N,2} \\ {}^i u_z N_{1,z} & {}^i v_z N_{1,z} & {}^i w_z N_{1,z} & {}^i u_z N_{2,z} & \cdots & {}^i w_z N_{N,3} \\ {}^i u_x N_{1,y} + {}^i u_y N_{1,x} & {}^i v_x N_{1,y} + {}^i v_y N_{1,x} & {}^i w_x N_{1,y} + {}^i w_y N_{1,x} & {}^i u_x N_{2,y} + {}^i u_y N_{2,x} & \cdots & {}^i w_x N_{N,y} + {}^i w_y N_{N,x} \\ {}^i u_y N_{1,z} + {}^i u_z N_{1,y} & {}^i v_y N_{1,z} + {}^i v_z N_{1,y} & {}^i w_y N_{1,z} + {}^i w_z N_{1,y} & {}^i u_y N_{2,z} + {}^i u_z N_{2,y} & \cdots & {}^i w_y N_{N,z} + {}^i w_z N_{N,y} \\ {}^i u_x N_{1,z} + {}^i u_z N_{1,x} & {}^i v_x N_{1,z} + {}^i v_z N_{1,x} & {}^i w_x N_{1,z} + {}^i w_z N_{1,x} & {}^i u_x N_{3,z} + {}^i u_z N_{3,x} & \cdots & {}^i w_x N_{N,z} + {}^i w_z N_{N,x} \end{bmatrix} \quad (8.4.97)$$

式(8.4.19)で仮想ひずみの非線形項を構成する $\delta \mathbf{L}$ は次のようである。

$$\delta \mathbf{L} = \{ \delta u_x \quad \delta u_y \quad \delta u_z \quad \delta v_x \quad \delta v_y \quad \delta v_z \quad \delta w_x \quad \delta w_y \quad \delta w_z \}^T \quad (8.4.98)$$

式(8.4.98)は仮想変位項 $\delta \mathbf{u}$ とマトリックス \mathbf{B}_{NL} の積で表すことができる。

$$\delta \mathbf{L} = \mathbf{B}_{NL} \delta \mathbf{u} \quad (8.4.99)$$

同様の方法で $\Delta \mathbf{L}$ も次のように示すことができる。

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{B}_{NL} \Delta \mathbf{u} \quad (8.4.100)$$

$$\text{ここで、} \mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{B}}_N & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_N \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_i = \{ N_{i,x} \quad N_{i,y} \quad N_{i,z} \}^T \text{である。}$$

式(8.4.94～95)と式(8.4.99～100)を式(8.4.19)に代入して整理すると、線形化されたつり合い方程式を得ることができる。

$$\delta \mathbf{u}^T ({}^t \mathbf{K}_L^e + {}^t \mathbf{K}_{NL}^e) \Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T ({}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext}^e - {}^t \mathbf{f}_{int}^e) \quad (8.4.101)$$

式(8.4.101)の各項は次のようである。

$$\begin{aligned} {}^t \mathbf{K}_L^e &= \int_{V_e} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D} \mathbf{B}_L dV \\ {}^t \mathbf{K}_{NL}^e &= \int_{V_e} {}^t \mathbf{B}_{NL}^T {}^t \hat{\mathbf{S}} {}^t \mathbf{B}_{NL} dV \\ {}^t \mathbf{f}_{int}^e &= \int_{V_e} {}^t \mathbf{B}_L^T {}^t \mathbf{S} dV \end{aligned} \quad (8.4.102)$$

ここで、

$${}^t\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t\mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t\mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad {}^t\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^tS_{xx} & {}^tS_{xy} & {}^tS_{xz} \\ {}^tS_{xy} & {}^tS_{yy} & {}^tS_{yz} \\ {}^tS_{xz} & {}^tS_{yz} & {}^tS_{zz} \end{bmatrix}$$

ソリッド要素の解析結果は、線形解析と同じく節点位置の応力とひずみがあり、さらに積分点での応力とひずみ結果をテーブルから確認することができる。以下に積分次数を示す。

- 4 節点 4 面体: 1 つのガウス積分点
- 6 節点 5 面体: 6 つのガウス積分点
- 8 節点 6 面体: 8 つのガウス積分点

8.5 材料非線形解析

塑性とは、物体が外力を受け変形した後に外力を取り除いてももとの形に戻らず、変形が残る性質をいい、塑性変形が現れることを降伏という。

8.5.1 一般事項

静的の塑性ひずみの成分は次の仮定下で定義される。

構成則は変形の数と無関係である。
弾性変形は塑性変形の影響を受けない。
トータルひずみは次のように定義される。

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \quad (8.5.1)$$

ここで、

$\underline{\underline{\varepsilon}}$: トータルひずみ

$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$: 弾性ひずみ

$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$: 塑性ひずみ

さらに、次の基本概念を用いて数式化される。

- 塑性変形の開始を規定するための降伏条件
- 塑性変形を定義するための流れ則
- 塑性変形時の降伏面の変化を定義する硬化則

8.5.2 降伏条件(Yield condition)

弾性変形領域の境界を定義する降伏関数(あるいは載荷関数) F は次の通りである(図 8.5.1 参照)。

$$F(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}^p, \kappa) = \sigma_e(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon}^p) - \kappa(\underline{\varepsilon}^p) \leq 0 \quad (8.5.2)$$

ここで、

$\underline{\sigma}$: 現在の応力度

σ_e : 相当(equivalent)、又は一般化された(generalized)有効応力度

κ : $\underline{\varepsilon}^p$ の数である硬化因子

$\underline{\varepsilon}^p$: 相当(equivalent)塑性ひずみ

古典的な塑性理論で降伏関数の値が正である応力度状態は存在しない。しかし、数値解析モデルでは正の降伏関数値は降伏が発生することを意味する。降伏が発生した後、応力度状態は降伏関数が 0 に減少されるまで塑性ひずみを蓄積するため修正する必要があり、この修正過程を塑性補正(plastic corrector)段階、あるいは回帰写像(return mapping)段階という。

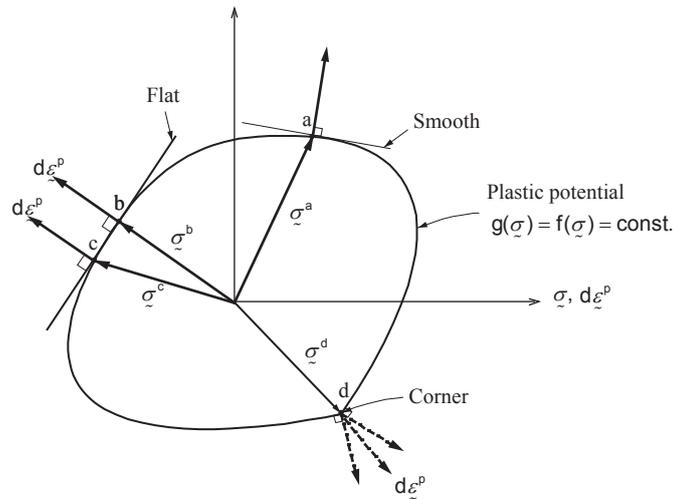


図 8.5.1 流れ則と特異点

8.5.3 流れ法則 (Flow rule)

塑性のひずみ成分は流れ則を仮定すれば、以下のようになる。

$$d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\lambda \mathbf{a} \quad (8.5.3)$$

ここで、

$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$: 塑性変形の方角

$d\lambda$: 塑性変形の大きさを定義する Lagrangian 塑性パラメータとして、降伏基準によって決定される

関数 \mathbf{g} は‘塑性ポテンシャル(plastic potential)’関数といい、普通は応力不変量(stress invariant)の項で定義される。 $\mathbf{g}=\mathbf{F}$ であれば、‘結合流れ(associated flow)則’といって、 $\mathbf{g}\neq\mathbf{F}$ なら‘非結合流れ(non-associated flow)則’という。

プログラムのすべてのモデルは結合流れ則を用いる。すなわち、塑性ひずみベクトルの方向は降伏面に垂直なので、上式(8.5.3)は次のように表すことができる。

$$d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = d\lambda \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = d\lambda \mathbf{a} \quad (8.5.4)$$

図 8.5.1 上での角や平らな面は塑性流れの方向を単一に決めることができない特利点(singular point)となり、この点に対しては特別な考慮が必要である。

8.5.4 硬化則 (Hardening rule)

硬化則は材料が降伏する時、塑性変形による降伏面の変化を定義する。

硬化則は有効塑性ひずみを定義する方法によって‘ひずみ硬化(strain hardening)’と‘加工硬化(work hardening)’で分けられる。ひずみ硬化は塑性非圧縮性(plastic incompressibility)の仮定下で定義され、降伏が静水圧の影響を受けない材料モデルに適用できる。一般的には塑性仕事の関数として変形の具合を表す加工硬化がより一般的である。

一方、硬化則は降伏面の変化によって、‘等方硬化(isotropic hardening)’、‘移動硬化(kinematic hardening)’、‘複合硬化(mixed hardening)’で大きく分類される(図 8.5.2)。

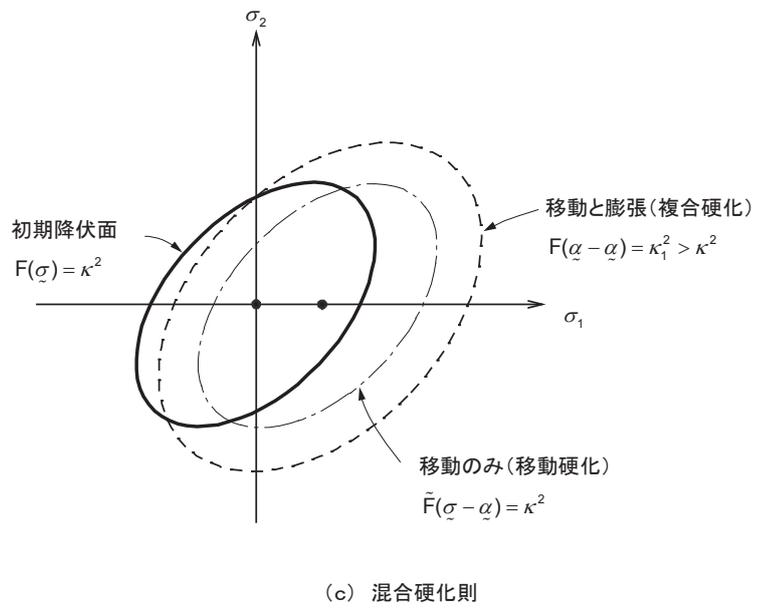
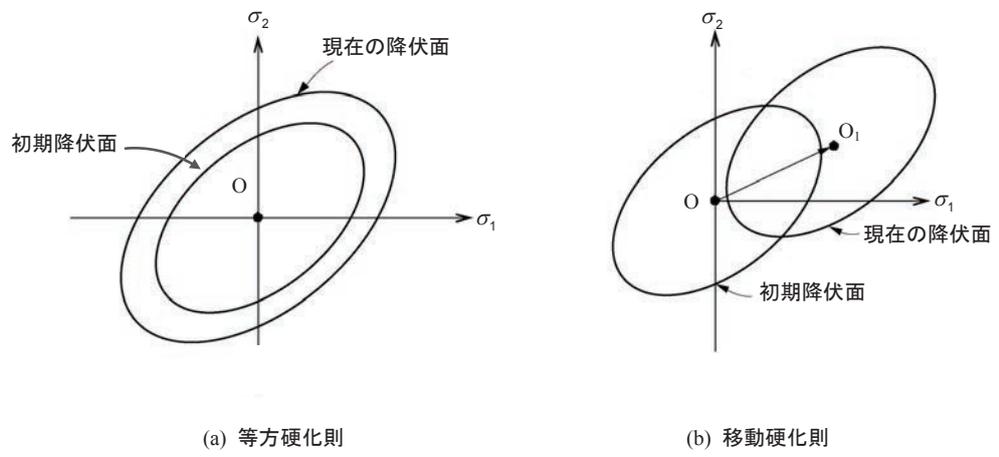


図 8.5.2 移動硬化と複合硬化

8.5.5 有効塑性ひずみの定義方法による分類

(1) ひずみ硬化 (strain hardening)

ひずみ硬化において有効塑性ひずみは次のように定義される。

$$d\varepsilon_p = \sqrt{\frac{2}{3}(d\varepsilon^p)^T d\varepsilon^p} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathbf{a}^T \mathbf{a}} d\lambda \quad (8.5.5)$$

これは塑性時に体積変化がないという仮定下で、塑性ひずみのノルム(norm)を単一軸状態のひずみに合わせて変換したのである。したがって、これは原則的には Tresca や von Mises にのみ適用すべきだが、数値計算時に便利ということで他の場合にも多く使用される。

(2) 加工硬化 (work hardening)

塑性仕事の増分は次の通りである。

$$dW_p = \underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon}^p = d\lambda \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\sigma} \quad (8.5.6)$$

単一軸状態の場合、上式の塑性仕事の増分は次のようになる。

$$dW_p = \sigma_1 d\varepsilon_1 = \sigma_e d\varepsilon_p \quad (8.5.7)$$

したがって、加工硬化において有効塑性ひずみは次のように定義される。

$$d\varepsilon_p = \frac{\mathbf{a}^T \underline{\sigma}}{\sigma_e} d\lambda \quad (8.5.8)$$

8.5.6 降伏面の変化による分類

(1) 完全塑性 (perfectly plastic)

完全塑性材料の場合、塑性変形が起きても降伏面は変化しない。したがって、降伏関数は次のように表される。

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_e(\underline{\sigma}) - \kappa \quad (8.5.9)$$

ここで、 κ は定数である。

(2) 等方硬化 (isotropic hardening)

等方硬化の場合、図 8.5.2(a)のように降伏面が均一に膨脹するので、降伏関数は次のように表される。

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_e(\underline{\sigma}) - \kappa(\varepsilon_p) \quad (8.5.10)$$

(3) 移動硬化 (kinematic hardening)

移動硬化の場合、図 8.5.2(b)のように降伏面の大きさは変わらず、中心位置だけが移動されるので、降伏関数は次のように表現される。

$$F(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, \kappa) = \sigma_e(\underline{\sigma} - \underline{\alpha}) - \kappa \quad (8.5.11)$$

ここで、

$\underline{\alpha}$: 降伏面の中心座標

κ : 定数

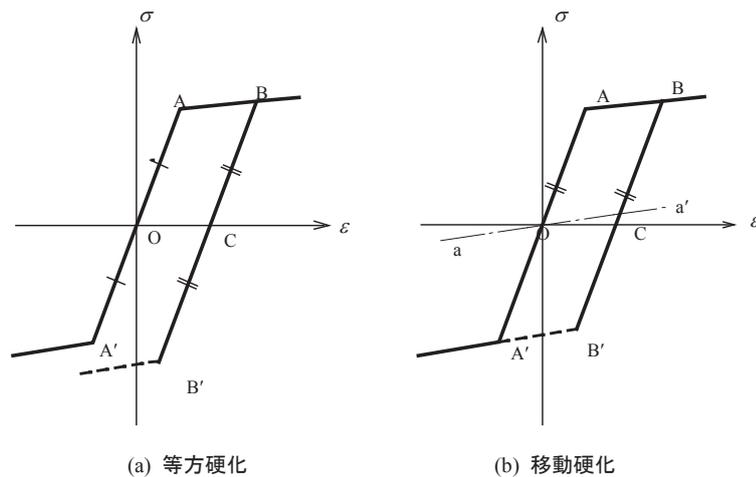


図 8.5.3 1次元での硬化法則

移動硬化では現在の降伏面の中心座標 α を決めるのが重要となる。硬化因子 α を決定する方法には一般的に Prager の硬化法則、Ziegler の硬化法則がある。

Prager の硬化法則は次のように表現される。

$$d\alpha = C_p d\varepsilon^p = C_p \mathbf{a} d\lambda \quad (8.5.12)$$

ここで、 C_p は Prager 硬化係数である。

この方法は応力度の副空間で使われる時、いくつかの問題がある。たとえば、応力度のある成分が 0 でも、 $d\alpha$ は 0 ではない可能性があるため、降伏面の移動のみを現わさないことがある。

Ziegler の硬化法則は中心の移動変化率 $d\alpha$ が減少された応力度(reduced-stress)ベクトル $\sigma - \alpha$ の方向で発生すると仮定するため、上記のような問題は発生しない。この硬化法則は次のように表される。

$$d\alpha = d\mu(\sigma - \alpha) = C_z d\varepsilon_p(\sigma - \alpha) \quad (8.5.13)$$

ここで、 C_z は Ziegler 硬化係数である。

(4) 複合硬化 (mixed hardening)

複合硬化は等方硬化と移動硬化を組合せた形で次のように表される。

$$F(\sigma, \alpha, \kappa) = \sigma_e(\sigma - \alpha) - \kappa(\varepsilon_p) \quad (8.5.14)$$

8.5.7 構成マトリックス

塑性の構成方程式は以下のように表される。

応力度はひずみの変化率ベクトルの弾性部分によって決まる。すなわち、

$$d\bar{\sigma} = \mathbf{D}^e (d\bar{\varepsilon} - d\bar{\varepsilon}^p) = \mathbf{D}^e (d\bar{\varepsilon} - d\lambda \mathbf{a}) \quad (8.5.15)$$

ここで、 \mathbf{D}^e は弾性構成マトリックス

応力度は常に降伏面上にある必要があり、したがって、次の適合性条件(consistence condition)を満足しなければならない。

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}} d\bar{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \bar{\varepsilon}^p} d\bar{\varepsilon}^p + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = \mathbf{a}^T \mathbf{D}^e d\bar{\varepsilon} - (\mathbf{a}^T \mathbf{D}^e \mathbf{a} + h) d\lambda = 0 \quad (8.5.16)$$

ここで、 h は塑性硬化係数である。

したがって、微小応力度の増分は次のように求められる。

$$d\bar{\sigma} = \left(\mathbf{D}^e - \frac{\mathbf{D}^e \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}^e}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}^e \mathbf{a} + h} \right) d\bar{\varepsilon} \quad (8.5.17)$$

Newton-Raphson 反復過程が使用される時は適合剛性マトリックス(consistent stiffness matrix)を使えば、Newton-Raphson 反復過程の 2 次収束の特性によってより早く収束に至ることができる。

$$d\bar{\sigma} = \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{R}}{\mathbf{a}^T \mathbf{R} \mathbf{a} + h} \right) d\bar{\varepsilon} \quad (8.5.18)$$

ここで、

$$\mathbf{R} = \left(\mathbf{I} + d\lambda \mathbf{D}^e \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \bar{\sigma}} \right)^{-1} \mathbf{D}^e = \left(\mathbf{I} + d\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{D}^e$$

8.5.8 応力の積分

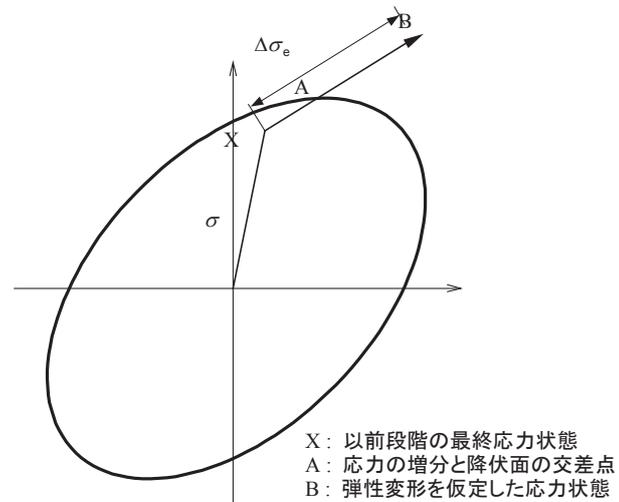
応力の積分には次の二つの方法が使用できる。

陽的なフォワード・オイラーアルゴリズム

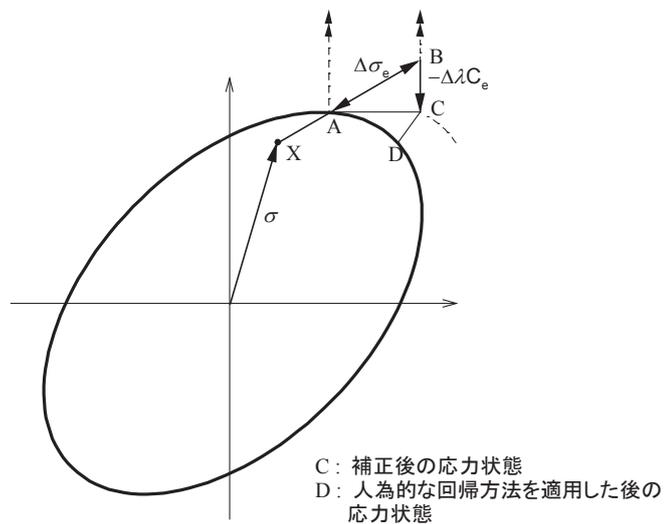
(Explicit forward Euler algorithm with sub-incrementation) (図 8.5.4～5)

陰的なバックワード・オイラーアルゴリズム

(Implicit backward Euler algorithm) (図 8.5.6)



(a) 交差点 A の位置



(b) A から接線方向に C に移動した後 D 位置に補正

図 8.5.4 陽的なフォワード・オイラーアルゴリズム

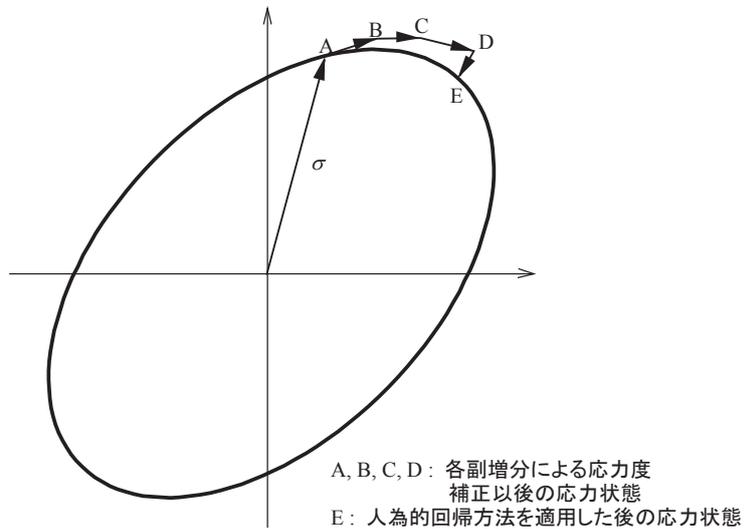


図 8.5.5 陽的なフォワード・オイラーアルゴリズムでの副増分

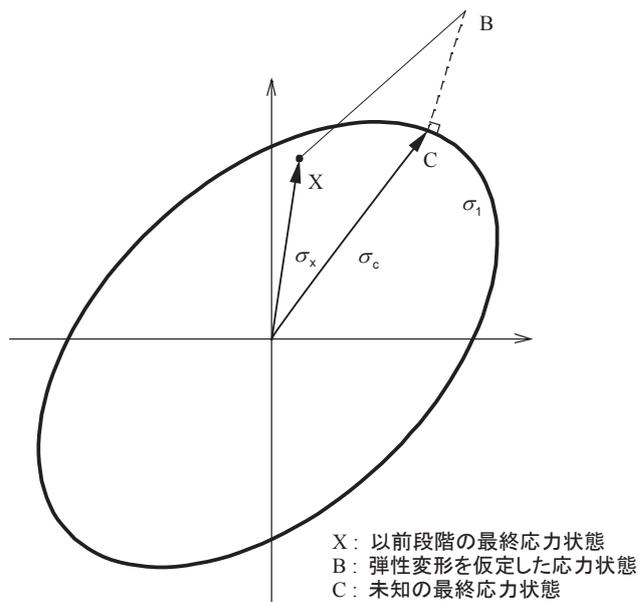


図 8.5.6 陰的なバックワード・オイラーアルゴリズム

陽的方法で塑性流れの方向は‘交差点’すなわち、弾性応力度の増分が降伏面を通る点(図 8.5.4 の A)で計算される。一方、陰的方法では最終応力度の位置(図 8.5.6 の B)で計算される。

陽的方法は相対的に単純で、応力度を直接積分する。すなわち、ガウスポイントでの収斂計算の過程が必要ないが、この方法は次のような短所がある。

計算の安定性が条件による。
許容可能な正確度を得るために応力度補正の中に副-増分を必要とする。
降伏面から離れた程度を補正するために人為的な回帰方法が必要となる。

しかし、この方法では適合剛性マトリックスを構成することができない。

陰的方法は副-増分や人為的回帰方法を用いなくても十分に精度の良い結果を導き出すことができ、条件に関係なく安定的である。ただし、ガウスポイントでの収斂計算が必要となる。この方法では、適合剛性マトリックスが構成できるため、Newton-Raphson 収束計算時、ガウスポイントで繰り返し過程を遂行すれば計算がより効率的である。

(1) 陽的なフォワード・オイラーアルゴリズム

a) ひずみ増分を計算します。

$$d\varepsilon = \underline{\mathbf{B}}d\mathbf{u} \quad (8.5.19)$$

ここで、

$\underline{\mathbf{B}}$: ひずみ-変位関係のマトリックス

$d\varepsilon$: ひずみの変化量

b) 弾性変形を仮定した弾性応力度を算定します(図 8.5.4(a)の B 点)。

$$\begin{aligned} d\sigma &= \underline{\mathbf{D}}^e d\varepsilon \\ \sigma_B &= \sigma_X + d\sigma \end{aligned} \quad (8.5.20)$$

上式での添え字は図 8.5.4 を参照する。

c) 計算された応力度が降伏面の内側にあれば応力度補正は完了して、降伏面の外にあれば塑性変形によって降伏面に戻す必要がある。

d) 次に交差応力度を計算する。弾性応力度の増分は許容可能な応力度増分と許容不可能な応力度増分で分けられ、交差応力度は次式を用いて計算される。

$$\begin{aligned} F(\sigma_X + (1-r)d\sigma) &= 0 \\ r &= \frac{F_B}{F_B - F_X} \end{aligned} \quad (8.5.21)$$

e) 追加的な変形に対しては応力度が降伏面上で移動するようにする。これは許容できない応力度の増分 $rd\sigma$ を m 個の小さな応力度の増分で分けて近似計算する(図 8.5.5)。副増分の個数は誤差の大きさに直接的に係って、次のように計算される。

$$m = \text{INT}\left(8(\sigma_{eB} - \sigma_{eA})/\sigma_{eA}\right) + 1 \quad (8.5.22)$$

f) 最終応力度状態が降伏面上になければ、次の人為的回帰方法によって降伏面上に移動させる必要がある。

$$\begin{aligned} \delta\lambda_c &= \frac{F_c}{\mathbf{a}_c^T \mathbf{D}^e \mathbf{a}_c + h} \\ \underline{\sigma}_D &= \underline{\sigma}_C - \delta\lambda_c \mathbf{D}^e \mathbf{a}_c \end{aligned} \quad (8.5.23)$$

注意

降伏面の形状は各副-増分の終りで硬化則を用いて補正する。

除荷 (Unloading) は弾性で仮定される。

(2) 陰的なバックワード・オイラーアルゴリズム

陰的方法では次式により最終応力度を計算する。

$$\underline{\sigma}_C = \underline{\sigma}_B - d\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{a}_C \quad (8.5.24)$$

ここで添え字は図 8.5.6 を参照する。

式(8.5.24)で C 点は未知点であるため、Newton 収斂計算を利用して未知数を解く方法を使用する。したがって、任意のベクトル $\underline{\mathbf{r}}$ を現在の応力度とバックワード・オイラー応力度間の差を表すために設定する。

$$\underline{\mathbf{r}} = \underline{\sigma}_C - (\underline{\sigma}_B - d\lambda \mathbf{D}^e \mathbf{a}_C) \quad (8.5.25)$$

これより収斂計算は $\underline{\mathbf{r}}$ を 0 と減少させるために導入されて、最終応力度は降伏基準を満たす必要がある。仮定された弾性応力度を使用して、次のように Taylor 展開を適用する。

$$\underline{\mathbf{r}}_n = \underline{\mathbf{r}}_o + \dot{\underline{\sigma}} + \dot{\lambda} \mathbf{D}^e \mathbf{a} \quad (8.5.26)$$

ここで、

$\dot{\underline{\sigma}}$: $\underline{\sigma}$ の変化量

$\dot{\lambda}$: $d\lambda$ の変化量

上式の値を 0 とおいて、 $\dot{\underline{\sigma}}$ に対して解くと次のようになる。

$$\dot{\underline{\sigma}} = -\underline{\mathbf{r}}_o - \dot{\lambda} \mathbf{D}^e \mathbf{a} \quad (8.5.27)$$

また、降伏関数に対して Taylor 展開を適用すると、次のようになる。

$$F_{Cn} = F_{Co} + \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_p} \dot{\varepsilon}_p = F_{Co} + \mathbf{a}_C^T \dot{\underline{\sigma}} - h \dot{\lambda} = 0 \quad (8.5.28)$$

ここで、

ε_p : 有効塑性ひずみ

したがって、 $\dot{\lambda}$ は次のように求められて、最終的な応力度値も得ることができる。

$$\dot{\lambda} = \frac{F_p - \mathbf{a}^T \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}^T \mathbf{D}^e \mathbf{a} + h} \quad (8.5.29)$$

8.5.9 塑性材料モデル

プログラムでは次のような四つの塑性モデルが利用できる。

Tresca, von Mises – 金属のような塑性非圧縮性(plastic incompressibility)をもつ軟性材料に適用する(図 8.5.7)。

Mohr-Coulomb, Drucker-Prager – コンクリートや岩石、地盤のように体積塑性変形を伴う材料に適用する(図 8.5.8)。

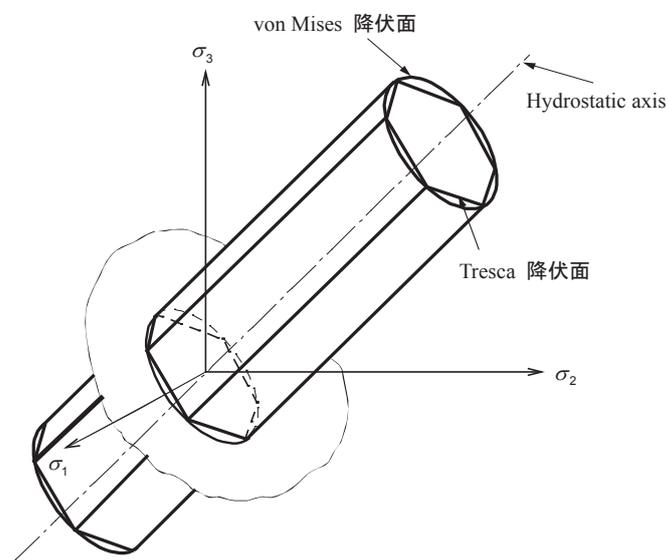


図 8.5.7 Tresca と von Mises の降伏条件

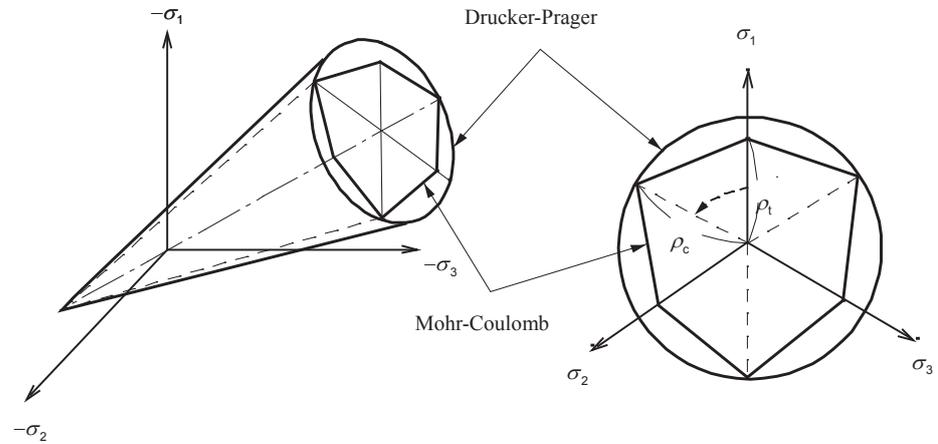


図 8.5.8 Mohr-Coulomb と Drucker-Prager 降伏条件

(1) Tresca 降伏条件

Tresca 降伏条件は金属のように体積塑性変形を伴わないで、軟性である材料に適している。材料の降伏は最大せん断応力度が規定された値に到達した時に始まる。したがって、主応力度(principal stress)が $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) であれば、降伏関数は式(8.5.30)のようになる。

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \sigma_1 - \sigma_3 - \kappa(\varepsilon_p) \quad (8.5.30)$$

応力度状態が降伏なら相議特利点にある時数値的問題が発生することができ、Tresca 基準に対してである偏角(lode angle) θ 街 $\cdot 30^\circ$ に近接する時発生することができる。したがって、この場合には応力度積分方法が補正される必要がある。プログラムでは $\theta > 29^\circ$ 仕事の時、von Mises 降伏基準が流れベクトルを形成するために使われる。

(2) Von Mises 降伏条件

Von Mises 基準は金属材料に1番多く適用される降伏条件である。この条件は変形エネルギーを基準したもので、降伏関数は次のようになる。

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \sqrt{3J_2} - \kappa(\varepsilon_p) \quad (8.5.31)$$

ここで、 J_2 は偏差応力の2次不変量(second deviatoric stress invariant)である。

(3) Mohr-Coulomb 降伏条件

Mohr-Coulomb 降伏条件はコンクリート、地盤、岩石のような体積塑性変形を伴う材料に適している。Mohr-Coulomb 降伏条件は Coulomb 摩擦法則の一般化として、次のように定義される。

$$F(\underline{\sigma}, \kappa) = \tau - (c - \sigma_n \tan \phi) \quad (8.5.32)$$

ここで、

τ : せん断応力度の大きさ

σ_n : 垂直応力度

c : 粘性

ϕ : 内部摩擦角

粘性 c と内部摩擦角 ϕ はすべてひずみ硬化因子 κ による。

Tresca 条件と同じで、応力度が降伏面の特異点にある時に数値的な問題が発生する。Mohr-Coulomb 条件では偏角(lode angle) θ が $\pm 30^\circ$ に近いとか頂点で発生する可能性がある。したがって、この 2 つの場合には応力度の積分方法が補正される必要がある。

(4) Drucker-Prager 降伏条件

Drucker-Prager 基準は地盤、コンクリート、岩石などの体積塑性変形を伴う材料に適している。この条件は Mohr-Coulomb 条件と似ており、von Mises 条件の拡張された形である。降伏関数は静水圧(hydrostatic stress)の影響が考慮できるように定義している。

$$F(\sigma, \kappa) = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} I_1 + \sqrt{J_2} - \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (8.5.33)$$

ここで、 I は応力の 1 次不変量(first stress invariant)

Drucker-Prager 条件では、応力度が降伏面の頂点上にある時に数値的な問題が発生する。

9. 動的非線形解析

9.1 概要

動的非線形解析(Nonlinear Time History Analysis)は構造物の非線形性を考慮した動的解析方法である。解析の効率性を考慮して対象構造物の主要部分是非線形要素を使用して、残りの要素は弾性であると仮定する。

プログラムでは非線形要素を要素タイプとカタタイプに分ける。要素タイプは要素の剛性を変更することによって非線形性を直接的に考慮するもので、カタタイプは要素剛性を変更なしで、節点の部材力を荷重に置換することによって非線形性を考慮する。

表 9.1.1 に要素タイプとカタタイプによる非線形要素の分類を示す。

非弾性ヒンジの属性が与えられた梁要素と汎用リンク要素は、要素タイプの非線形要素である。一方、汎用リンク要素の中で、粘弾性ダンパー、ギャップ、フック、弾塑性ダンパー、鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置、摩擦振り子型免震装置はカタタイプの非線形要素である。

表 9.1.1 非線形要素の分類

要素タイプ		非線形タイプ
梁+非弾性ヒンジ		要素タイプ
汎用 リンク	バネ+非弾性ヒンジ	要素タイプ
	粘弾性ダンパー	カタタイプ
	ギャップ	カタタイプ
	フック	カタタイプ
	弾塑性ダンパー	カタタイプ
	鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置	カタタイプ
	摩擦振り子型免震装置	カタタイプ

9.2 境界非線形の時刻歴解析

9.2.1 概要

境界非線形の時刻歴解析(以下、境界非線形解析)は、構造物の一部にだけ非線形性を考慮する場合に使用する方法で、免制震装置のある構造物の動的特性を把握するときに使用する。免制震装置は設計荷重に対して構造物の塑性変形を防止するために使用されるため、解析では構造部材は弾性挙動し、免制震装置だけが非線形挙動をすると仮定する。境界非線形解析では免制震装置を非線形の汎用リック要素(以下、境界非線形要素)でモデリングし、他の部材は線形弾性体とモデリングする(以下、前者は非線形系、後者は線形系という)。解析時は非線形系で発生した部材力を線形系への外部動的荷重として付加する。

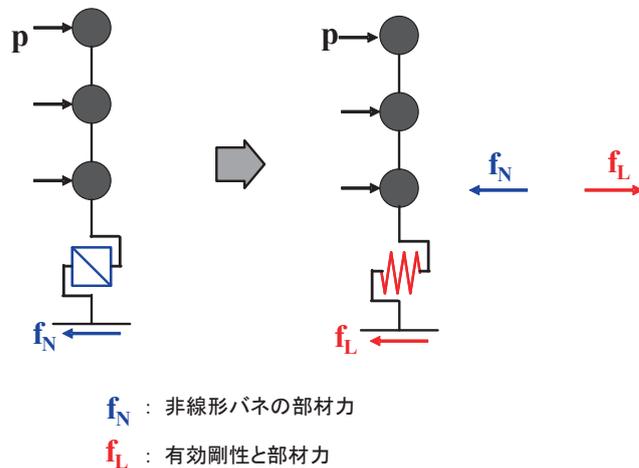


図 9.2.1 境界非線形解析の解析手法

境界非線形解析の解析手法には、非線形のモード重ね合せ法と直接積分法がある。また、境界非線形要素の部材力の計算には常微分方程式を使用する。常微分方程式の解法には Runge-Kutta 法を用い、求めた要素部材力は有効荷重として付加する。

非線形のモード重ね合せ法は、線形の時刻歴解析と同様に重ね合せの原理を適用するため、時間増分ごとに全体構造物の釣り合い方程式を解く直接積分法より解析速度が速い長所がある。しかし、モード法を使用するため、先に固有値解析を行う必要がある。

一方、構造全体に非線形性を考慮する場合は、非線形の直接積分法を用いる。この場合、構造体の非線形挙動を非弾性ヒンジの履歴モデルから表現する。

9.2.2 解析モデル

境界非線形要素は構造物上の2つの節点間を連結したり、構造物と支持点間を連結したりすることでモデリングする。

1つの境界非線形要素は計6つのバネ（1つの軸バネ、2つのせん断バネ、1つのねじりバネ、2つの回転バネ）から構成され、成分ごとに一部だけを選択して利用することができる。

それぞれのバネは基本的に線形特性を持ち、ユーザーの選択によって追加で非線形特性を持たせることができる。非線形特性を持つバネにおいて、線形特性は単に解析アルゴリズム上から必要である。

線形特性は各バネの有効剛性から成り、境界非線形要素の要素剛性マトリックスと全体構造物の剛性マトリックスを構成するときに使用される。線形・非線形の静的解析、線形の動的解析では有効剛性だけを用いて剛性マトリックスを計算する。

プログラムでは非線形バネの種類として、粘弾性ダンパー、ギャップ、フック、弾塑性ダンパー、鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置、摩擦振り子型免震装置の6つのタイプの非線形特性が使用できる。

9.2.3 モード重ね合わせ法

(1) 解析手法

カタイプの境界非線形要素を含む構造の運動方程式は以下ようになる。

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + (K_S + K_N)u(t) = B_P p(t) + B_N (f_L(t) - f_N(t)) \quad (9.2.1)$$

ここで、

M : 質量マトリックス

C : 減衰マトリックス

K_S : 境界非線形要素を除いた他の線形弾性部材の剛性マトリックス

K_N : 境界非線形要素の有効剛性による剛性マトリックス

B_P : 動的荷重の節点荷重への変換マトリックス

B_N : 境界非線形要素の部材力の節点荷重への変換マトリックス

$u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t)$: 節点の変位、速度、加速度

$p(t)$: 動的荷重

$f_L(t)$: 境界非線形要素の有効剛性による部材力

$f_N(t)$: 境界非線形要素の実際の部材力 (非線形結果を含む)

右辺の $f_L(t)$ は左辺の境界非線形要素の有効剛性 K_N による節点力と相殺され、実際には、 $f_N(t)$ だけが動的挙動に影響を与えることとなる。有効剛性マトリックス K_N を用いる理由は、境界非線形要素の設置位置によって、弾性体の構造の剛性マトリックス K_S だけでは不安定構造となる場合があるためである。

質量マトリックスと剛性マトリックスに対するモード形状と固有振動数は、固有値解析、または Ritz ベクトル解析を用いて計算することができる。減衰マトリックスはモード減衰から考慮できる。

上記の運動方程式は、モードの直交性を利用して次のようなモード座標系 (Modal Coordinate) の運動方程式に変換される。

$$q_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{\phi_i^T B_P p(t)}{\phi_i^T M \phi_i} + \frac{\phi_i^T B_N f_L(t)}{\phi_i^T M \phi_i} - \frac{\phi_i^T B_N f_N(t)}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (9.2.2)$$

ここで、

ϕ_i : i 番目モードの固有ベクトル

ξ_i : i 番目モードの減衰定数

ω_i : i 番目モードの固有振動数

$q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$: i 番目モードの一般化変位、速度、加速度

右辺の $f_N(t)$ と $f_L(t)$ は該当の境界非線形要素の要素座標系での変位と速度によって算出される。しかし、実際の変形は特定モードだけでなく、モード全体の成分を含んでいる。したがって、上記のモード座標系の運動方程式はモード間で独立でなく連成した状態となる。しかし、モード解析の長所を活かすために各解析ステップでの $f_N(t)$ と $f_L(t)$ を仮定すると、独立的なモード座標系の運動方程式となる。

まず、前ステップの解析結果から現ステップにおけるモード一般化変位、速度を仮定し、これを基に現ステップでの $f_N(t)$ と $f_L(t)$ を計算する。その後、現ステップでのモード一般化変位と速度を計算して、これを組み合わせて境界非線形要素の変位と速度を計算する。 $f_N(t)$ と $f_L(t)$ の計算と、それによるモード一般化変位と速度の計算過程を、以下の収束誤差が許容範囲内に収まるまで繰り返し行う。

$$\begin{aligned}\varepsilon_q &= \max_i \left\{ \frac{q_i^{(j+1)}(n\Delta t) - q_i^{(j)}(n\Delta t)}{q_i^{(j+1)}(n\Delta t)} \right\} \\ \varepsilon_{\dot{q}} &= \max_i \left\{ \frac{\dot{q}_i^{(j+1)}(n\Delta t) - \dot{q}_i^{(j)}(n\Delta t)}{\dot{q}_i^{(j+1)}(n\Delta t)} \right\} \\ \varepsilon_{f_M} &= \max_i \left\{ \frac{f_{M,i}^{(j+1)}(n\Delta t) - f_{M,i}^{(j)}(n\Delta t)}{f_{M,i}^{(j+1)}(n\Delta t)} \right\}\end{aligned}\quad (9.2.3)$$

ここで、

Δt : 時間増分

n : ステップ

j : 反復計算のステップ

i : モード次数

$q_i^{(j)}(n\Delta t)$: n ステップにおける、 j 回の反復計算時の i 番目モードの一般化変位

$\dot{q}_i^{(j)}(n\Delta t)$: n ステップにおける、 j 回の反復計算時の i 番目モードの一般化速度

$f_{M,i}^{(j)}(n\Delta t)$: n ステップにおける、 j 回の反復計算時の i 番目モードのパネ部材力

以上の過程を解析ステップ別に繰り返す。最大反復計算回数と収束誤差は時刻歴荷重ケースの定義時にユーザーが直接入力する。解が収束しなかった場合は、自動的に解析時間増分 Δt を細分して計算を続ける。

一方、境界非線形要素の動的特性は微分方程式で表現され、反復計算過程で非線形パネの内力を算定する時に使用される。プログラムでは計算手法として **Runge-Kutta Fehlberg method** を使っており、この方法は微分方程式の数値解析で最も広く使われる方法であり、計算時間が速く、精度が良いと知られている。

(2) 固有値解析時の注意事項

境界非線形の時刻歴解析はモード解析をベースとしており、構造物の応答や、境界非線形要素の変形を表現するためには十分な数のモードが必要となる。

代表的な例として、摩擦振り子型免震装置の応答解析を上げる。摩擦型免震装置は要素の軸バネの部材力がせん断バネの挙動を決定する重要な要因となる。したがって、一般的な応答解析とは異なり、鉛直方向モードが重要となり、鉛直方向モードの有効質量比の合計が全体質量に等しくなるほどの十分なモード数を確保する必要がある。

固有値解析時は上記のように多くのモード数が必要となる場合があり、解析時間が長くなる可能性がある。この場合、Ritz ベクトル解析を用いる。Ritz ベクトル解析は各自由度に対する動的荷重の分布を考慮したモード形状と固有振動数を求め、少ないモードでも高次モードの影響まで考慮することができる。

例えば、摩擦振り子型免震装置の場合、Ritz ベクトル解析の解析制御で構造物の Z 方向の加速度や構造物の自重に関わる静的荷重の荷重ケースを選択すると、主に鉛直方向の挙動に関わる固有振動数とモードを求めることができる。固有値解析の場合、Ritz ベクトル解析の方が少ないモードでより正確な解析結果を得ることができる。

(3) 静的荷重と動的荷重の組み合わせ

非線形の時刻歴解析は線形の時刻歴解析と異なり、重ね合わせの原理が適用できない。したがって、静的荷重に対する解析結果と、動的荷重に対する解析結果を単純に足し合わせても荷重が同時に作用した結果にはならない。静的荷重と動的荷重の影響を正確に考慮するためには、静的荷重を動的荷重の形で入力し時刻歴応答解析を行う必要がある。

プログラムでは**静的荷重制御データ** 機能を用いて静的荷重を動的に与える。

先に、**時刻歴荷重** で時刻歴荷重データのタイプが無次元の ramp 関数を入力する。ramp 関数は地盤加速度の遅延時間の前に静的荷重が載荷し終わるように定義し、地盤加速度が作用する間に継続するようにする。次に、**時刻歴荷重ケース** から解析方法を**モード法** にし、静的荷重による振動が十分に減衰されるように減衰定数の大きい荷重ケースを定義する。最後に、**静的荷重制御データ** で垂直方向の静的荷重と既に定義した**時刻歴関数名**と**時刻歴荷重ケース名**を指定する。

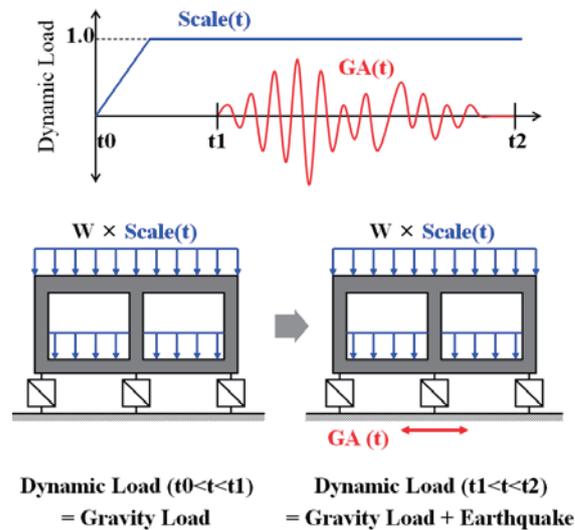


図 9.2.2 静的荷重と動的荷重の組み合わせ

9.2.4 直接積分法

非線形系で発生する非線形部材の力を線形系への外部動的荷重に付加することに関しては、直接積分法もモード重ね合せ法も同様である。

直接積分法の手法としては Newmark- β 法を適用している。

直接積分法でカタイプの境界非線形要素が含まれた構造物の運動方程式は次のようになる。

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + K_N u(t) = p(t) + (f_L(t) - f_N(t)) \quad (9.2.4)$$

ここで、

M : 質量マトリックス

C : 減衰マトリックス

K_N : 境界非線形要素の有効剛性による剛性マトリックス

$u(t)$, $\dot{u}(t)$, $\ddot{u}(t)$: 節点の変位、速度、加速度

$p(t)$: 動的荷重

$f_L(t)$: 境界非線形要素の有効剛性による部材力

$f_N(t)$: 境界非線形要素の実際の部材力(非線形結果を含む)

Newmark- β 法による増分変位 δu に対するつり合い方程式は次のようになる。

$$K_{EFF} \cdot \delta u = \Delta p_{EFF} \quad (9.2.5)$$

ここで、

K_{EFF} : 有効剛性マトリックス

$$K_{EFF} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} M + \frac{1}{\beta\Delta t} C + K_N$$

Δp_{EFF} : 反復計算ごとの有効荷重ベクトル

$$\Delta p_{EFF} = p(t) - \{M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + (f_L(t) - f_N(t))\}$$

δu : 反復計算ごとの変位増分ベクトル

β : 数値積分パラメータ

9.2.5 有効剛性

境界非線形の時刻歴解析は全体構造物を線形系と非線形系に分けて、非線形係で発生した部材力を線形系への外部動的荷重として付加する。ここで、境界非線形要素の設置位置によって線形系だけでは不安定となる場合があり、有効剛性の概念を取り入れる。

境界非線形要素を無視した場合に構造が不安定になる場合は、全体構造の固有振動数とモード形状が実際の非線形挙動と合うように適切な有効剛性を入力する必要がある。この場合の適切な有効剛性には一般的に'0'より大きく、非線形特性の初期剛性より小さいか同じ値を使用する。非線形特性の初期剛性とは、粘弾性ダンパーの k_b 、ギャップ、フック、および弾塑性ダンパーの k 、積層ゴム型免震装置と摩擦振り子型免震装置の k_y 、 k_b である。

時刻歴解析の前に応答の規模を把握するために、線形静的解析または線形動的解析を実行する場合、初期剛性に有効剛性を入力する。初期剛性は非線形解析時と類似の挙動ができるように、下図のように境界非線形要素の最大予想変形を基準に割線剛性(secant stiffness)を使って定義する。解析結果が収束しない場合、有効剛性値を適切に調節すれば、解が収束する場合がある。

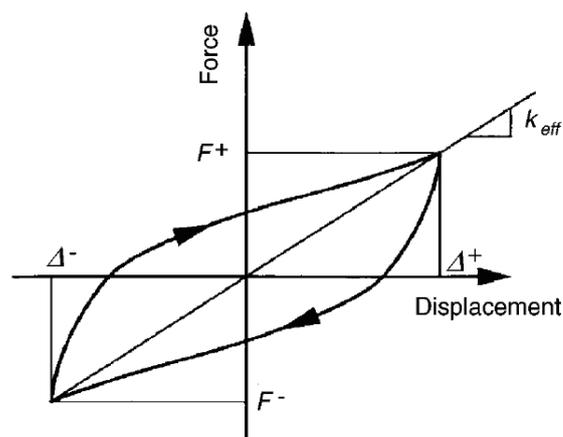


図 9.2.3 境界非線形要素の有効剛性

9.2.6 境界非線形要素(カタイプ)の動的特性

カタイプの非線形要素には、粘弾性ダンパー(Viscoelastic Damper)、ギャップ(Gap)、フック(Hook)、弾塑性ダンパー(Hysteretic System)、鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置(Lead Rubber Bearing Isolator)、摩擦振り子型免震装置(Friction Pendulum System Isolator)の6つのタイプがあり、それぞれの動的特性は次の通りである。

(1) 粘弾性ダンパー(Visco-elastic Damper)

粘弾性ダンパーは、変形に比例して力が発生する弾性と、変形の速度に比例して力が発生する粘性を同時に持つ。粘弾性ダンパーは構造の減衰性能を増大させ、地震、風などによる動的応答を減少させ、構造の安全性と使用性を向上するために使用する。

ゴムやバネなどの弾性体は、図 9.2.4(a)に示すように力を加えると力に比例して変形が発生し、力を取り除くと元の形に戻る。しかし、粘土のような粘性体は、力を加えて発生した変形が、力を取り除いてもそのまま残る。図 9.2.4(b)に粘性体モデルとその性質を表す。粘弾性体は弾性と粘性の両方の性質を持つもので、図 9.2.4(c,d)のように加えた力を取り除くと変形が瞬間的に減る特徴を持つ。粘弾性ダンパーはこのような粘弾性の性質を利用した減衰装置である。

粘弾性ダンパーの代表的な数学的モデルには線形バネと粘性減衰が直列で繋がった Maxwell モデルと、並列で繋がった Kelvin モデルであり、プログラムでは適切な変数を入力することによって、この2つの粘弾性ダンパーと取付バネの剛性をモデリングすることができる。

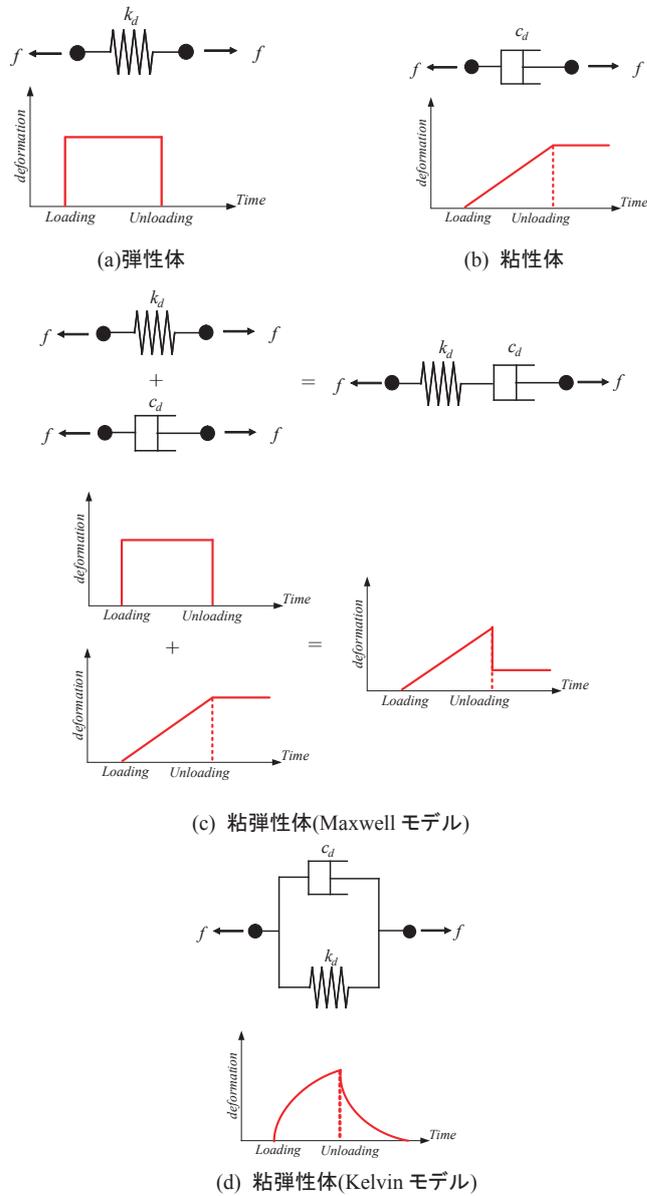


図 9.2.4 Elastic Object と Visco Object

粘弾性ダンパーは線形バネと粘性減衰が並列で繋がった Kelvin モデルと線形弾性の取り付けバネで構成される。取り付けバネがない場合、または取り付けバネの剛性が減衰装置の剛性に比べて非常に大きい場合は、取り付けバネを剛体と設定することができる。

粘弾性ダンパーの力-変位関係は次式のように表される。

$$f = k_d d_d + c_d \text{sign}(\dot{d}_d) |\dot{d}_d|^s = k_b d_b \quad (9.2.6)$$

$$d = d_d + d_b$$

ここで、

f : 粘弾性ダンパーの断面力

k_d : 粘弾性ダンパーの剛性

c_d : 粘弾性ダンパーの減衰係数

k_b : 取り付けバネの剛性

S : 粘弾性ダンパーの非線形減衰特性を定義する指数(exponent)

d : 要素の相対変位

d_d : 粘弾性ダンパーの変位

d_b : 取り付けバネの変位

上式から粘性減衰は変形の変化に比例する線形粘性減衰($s=1.0$)だけでなく変形の変化の指数乗に比例する非線形の粘性減衰($0.0 < s < 1.0$)でモデリングすることができる。非線形の減衰特性指数 s は 0.35~1.00 の範囲が一般的である。プログラムでは s 値を 0.20~1.00 に制限している。

上式で $c_d \text{sign}(\dot{d}_d) \left| \dot{d}_d \right|^s$ 項は減衰力を表し、力の単位を持つ。しかし、非線形の減衰特性指数が $s < 1.0$ の場合、次のように減衰力 f_d^D は $N \cdot (m/sec)^{s-1}$ のような単位になる問題が起きる。

$$\frac{c_d}{\frac{N}{m/sec}} \frac{\text{sign}(\dot{d}_d) \left| \dot{d}_d \right|^s}{(m/sec)^s} = \frac{f_d^D}{N \cdot (m/sec)^{s-1}} \quad (9.2.7)$$

したがって、プログラムでは \dot{d}_d が無次元量になるように参照速度(Reference Velocity) v_0 を適用する。 v_0 を適用すると、減衰力と粘弾性減衰モデルの力-変位関係は次のように示すことができる。

$$f = k_d d_d + c_d \text{sign}(\dot{d}_d) \left| \frac{\dot{d}_d}{v_0} \right|^{cexp} = k_b d_b \quad (9.2.8)$$

ここで、減衰定数 c_d の単位は $N/m/sec$ と同様であるが、速度の項が v_0 に一般化されるので、力の単位である N 、 $tonf$ などの単位を持つようになる。したがって、参照速度 v_0 は一般的に 1.0 の値を使用する。ただし、プログラムでの単位変換時は変換する長さの単位によって v_0 値が自動で変換されるので注意が必要である。

上式に基づき、粘弾性減衰モデルの非線形物性値の単位は次のようになる。

表 9.2.1 粘弾性減衰モデルの非線形属性の単位

非線形属性	単位
粘弾性減衰モデルの要素断面力、 f	$N, tonf$
粘弾性減衰モデルの変形の変化、 \dot{d}_d	$m/sec, cm/sec$
参照速度、 v_0	$m/sec, cm/sec$
\dot{d}_d/v_0	無次元
粘弾性減衰モデルの減衰定数、 c_d	$N, tonf$

プログラムでの単位変換から、粘弾性ダンパーの非線形物性値は次のように変換される。

1. 初期設定(単位系を kN, m に設定)

粘弾性ダンパーの非線形属性を次のように設定する。

非線形プロパティ	
ダンパーの剛性 (k _d)	: 1000 kN/m
減衰係数 (C _d)	: 1 kN
参照速度 (V ₀)	: 1 m/sec
減衰特性指数 (s)	: 1
取付バネ (k _b)	: 1000 kN/m

2. 単位系を N, cm に変換

- 参照速度、 v_0 を考慮しない場合

$$k_d = 10,000 N/cm$$

$$C_d = \frac{1 \cdot 1000}{100} = 10 N \cdot sec/cm$$

$$s = 1$$

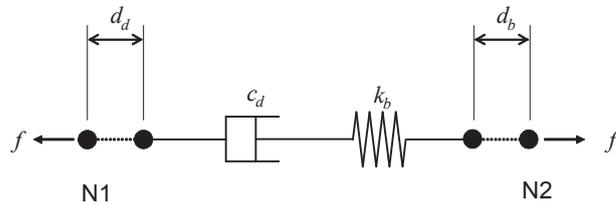
$$k_b = 10,000 N/cm$$

- 参照速度、 v_0 を考慮する場合

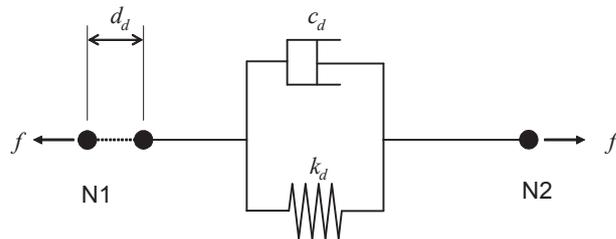
$$C_d = 1 kN = 1,000 N$$

$$v_0 = 1 m/sec = 100 cm/sec$$

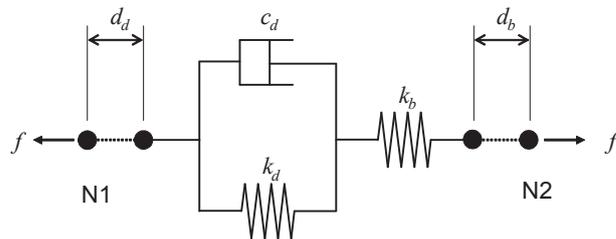
非線形プロパティ	
ダンパーの剛性 (k _d)	: 10000 N/cm
減衰係数 (C _d)	: 1000 N
参照速度 (V ₀)	: 100 cm/sec
減衰特性指数 (s)	: 1
取付バネ (k _b)	: 10000 N/cm



(a) Maxwell モデル



(b) Kelvin モデル



(c) 取り付けバネの混合モデル

図 9.2.5 粘弾性減衰モデル

A. Maxwell モデル

Maxwell モデルは図 9.2.5(a)に示すように、線形バネと粘性減衰が直列で繋がったモデルで、流体の粘弾性装置(F Fluid Viscoelastic Device)の解析で使われる。

Maxwell モデルの力-変位関係は次式のようになる。

$$f = c_d \operatorname{sign}(\dot{d}_d) \left| \frac{\dot{d}_d}{\gamma_0} \right|^s = k_b d_b \quad (9.2.9)$$

上式は常微分方程式の初期値問題となり、Runge-Kutta 法を使用して、未知数である粘弾性減衰モデルの変位 d_d を求める。

B. Kelvin(Voigt)モデル

Kelvin モデルは図 9.2.5(b)に示すように、線形バネと粘性減衰が並列で繋がったモデルで固体の粘弾性装置(Solid Viscoelastic Device)の解析に使用される。

Kelvin モデルの力-変位関係は次式のようになり、右項はすべて既知なので、式を直接解いて粘弾性減衰モデルに作用する力を計算することができる。

$$f = k_d d + c_d \operatorname{sign}(\dot{d}) \left| \frac{\dot{d}}{v_0} \right|^s \quad (9.2.10)$$

C. 混合モデル

取り付けバネの混合モデルは Kelvin モデルにバネが繋がったモデルで、図 9.2.5(c)のように制震ブレース解析に使用する。

混合モデルの力-変位関係は次式のようになる。次式は常微分方程式の初期値問題となり、Runge-Kutta 法を使用して未知数である粘弾性減衰モデルの変位 d_d を求める。

$$f = k_d d_d + c_d \operatorname{sign}(\dot{d}_d) \left| \frac{\dot{d}_d}{v_0} \right|^s = k_b d_b \quad (9.2.11)$$

Maxwell モデルと混合モデルは先に述べたように未知数である粘弾性減衰モデルの変位 d_d を求めるために、微分方程式の数値解法である Runge-Kutta 法を使用する。プログラムでは、非線形の減衰特性指数 s が 1 である線形減衰 ($s=1.0$)の場合、解析の効率を高めるために Runge-Kutta 法の代わりに、次のような近似式を使って未知数である粘弾性減衰モデルの変位 d_d を求める。

$$d_d(t + \Delta t) = \frac{k_b d(t + \Delta t) + \frac{c_d}{v_0} \frac{1}{\Delta t} d_d(t)}{k_d + k_b + \frac{c_d}{v_0} \frac{1}{\Delta t}} \quad ; (s=1.0) \quad (9.2.12)$$

ただし、Maxwell モデル : $k_d = 0.0$

D. 粘弾性ダンパーの非線形静的解析

静的の非線形解析時はダンパー変形の変化率を $\dot{d}_d = 0.0$ にし、粘弾性減衰モデルの有効剛性 k を求めて計算する。

$$f = k \cdot d \quad (9.2.13)$$

ここで、Maxwell モデル : $k = 0.0$

Kelvin モデル : $k = k_d$

混合モデル : $k = \frac{k_b \cdot k_d}{k_b + k_d}$

(2) ギャップ (Gap)

ギャップは他の境界非線形要素と同様に 6 つのバネで構成され、要素座標系で自由度別に N_1 節点に対する N_2 節点の相対変位 (d) がバネ内部の初期間隔 (o) より大きい負の値 ($d + o \leq 0$) となった時、該当のバネ剛性が発生すると仮定する。軸バネだけを定義する場合は圧縮専用要素となり、接触問題などの場合に使用できる。

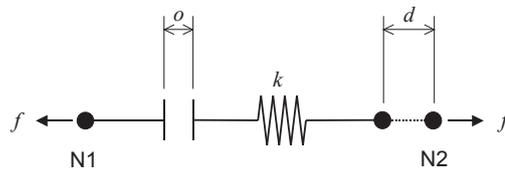


図 9.2.6 ギャップ

6 つのバネは独立的に挙動し、力-変位関係は次式のように表される。

$$f = \begin{cases} k(d+o) & \text{if } d+o \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9.2.14)$$

ここで、

k : ギャップバネの剛性

o : 初期間隔

d : 要素座標系におけるバネの相対変位

(3) フック (Hook)

フックは他の境界要素と同じく 6 つのバネで構成され、要素座標系で自由度別に N_1 節点に対する N_2 節点の相対変位 (d) がバネ内部の初期間隔 (o) より大きい正の値 ($d - o \geq 0$) となった時、該当のバネの剛性が発生すると仮定する。軸バネだけを定義する場合は引張専用要素となり、Wind Brace や Hook Element などの場合で使用できる。

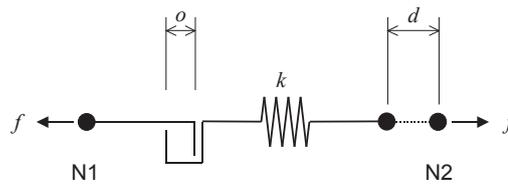


図 9.2.7 フック

6 つのバネは独立的に挙動し、力-変位関係は次式のように表される。

$$f = \begin{cases} k(d - o) & \text{if } d - o \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9.2.15)$$

ここで、

k : フックバネの剛性

o : 初期間隔

d : 要素座標系におけるバネの相対変位

(4) 弾塑性ダンパー (Hysteretic System)

弾塑性ダンパーは 1 軸塑性(Uniaxial Plasticity)の特性を持つ 6 つのバネで構成される。弾塑性ダンパーは履歴挙動によるエネルギー吸収装置(Energy Dissipation Device)をモデリングするのに用いられ、代表的な例として金属降伏型減衰モデル(Metallic Yield Damper)がある。金属降伏型減衰モデルは構造体より相対的に大きい剛性を持ちながら降伏強度が小さい特性を持つ。したがって、周辺の部材より先に塑性変形を起こし、主構造を保護するために使用される。

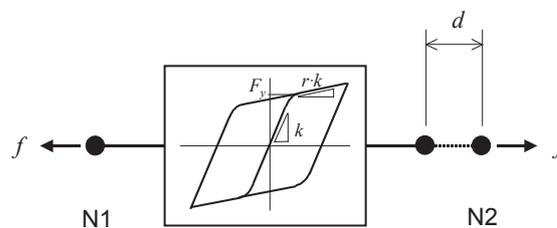


図 9.2.8 履歴挙動システム

弾塑性ダンパーの力-変位関係は次式のように表される。

$$f = r \cdot k \cdot d + (1-r) \cdot F_y \cdot z \quad (9.2.16)$$

ここで、

k : 初期剛性

F_y : 降伏強度

r : 降伏後の剛性低下率

d : バネの相対変位

z : 履歴挙動特性に関する内部パラメータ

z は履歴挙動特性を定義する内部パラメータであり、Wen(1976)によって提案されて、次式のような微分方程式で表される。

$$\dot{z} = \frac{k}{F_y} \left[1 - |z|^s \left\{ \alpha \operatorname{sgn}(\dot{z}) + \beta \right\} \right] \dot{d} \quad (9.2.17)$$

ここで、

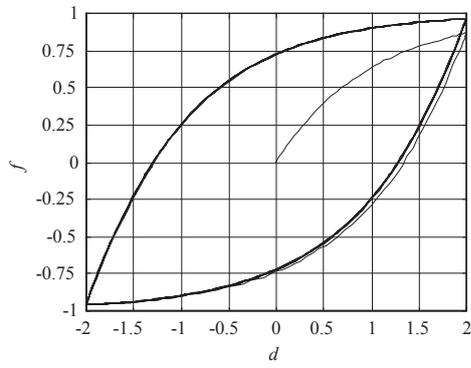
α, β : 履歴挙動曲線の形状を定義する定数

s : 降伏時の力-変位関係を定義する降伏特性指数

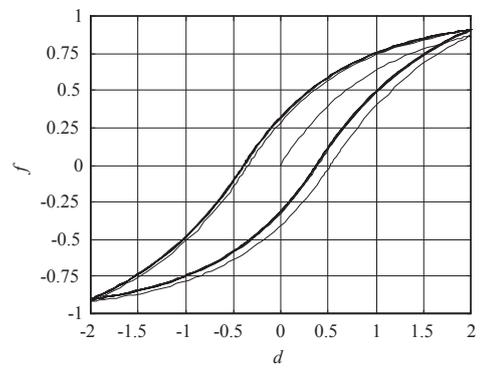
\dot{d} : バネの相対速度

α と β は、降伏後の挙動を定義する定数として、 $\alpha + \beta > 0$ の場合は Softening System、 $\alpha + \beta < 0$ の場合は Hardening System をモデリングすることができる。履歴挙動によるエネルギー吸収量は履歴挙動曲線による閉曲線の面積が大きくなるほど増加し、Softening System の場合に $(\beta - \alpha)$ が小さな値を持つほど増加する。 α と β の変化による履歴挙動の変化を図 9.2.9 に示す。

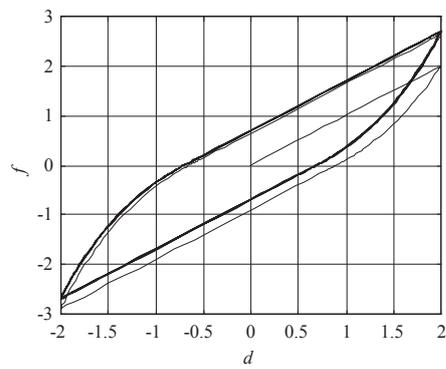
s は弾性変形と塑性変形間の転移区間、すなわち降伏時の力-変位関係を定義する定数であり、大きい値を持つほど降伏点をはっきりと現われる理想的なバイリニアの弾塑性体に近づく。 s による転移区間の変化を図 9.2.10 に示す。



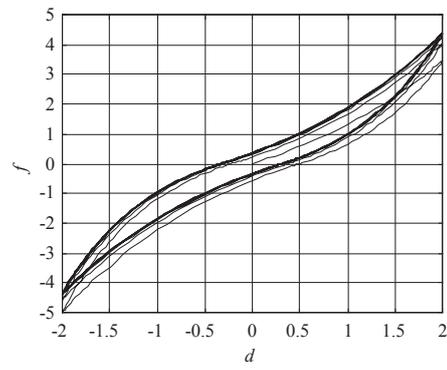
(a) $\alpha=0.9$ 、 $\beta=0.1$



(b) $\alpha=0.1$ 、 $\beta=0.9$

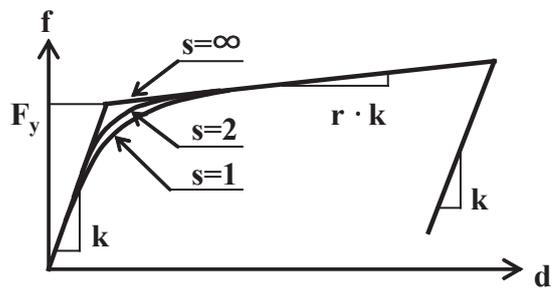


(c) $\alpha=0.5$ 、 $\beta=-0.5$



(d) $\alpha=0.25$ 、 $\beta=-0.75$

図 9.2.9 履歴挙動特性($r=0$ 、 $k=F_y=s=1.0$)



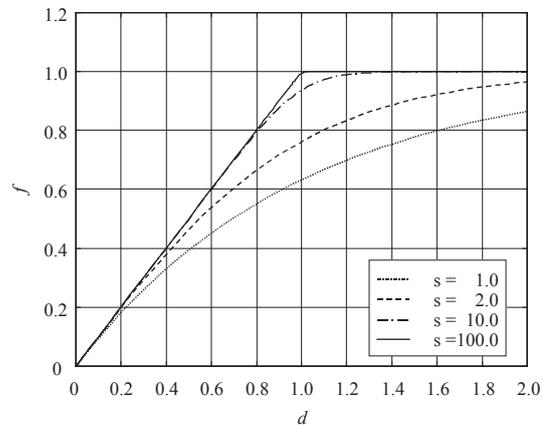


図 9.2.10 弾性変形と塑性変形間の転移区間(降伏区間)

(5) 鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置 (Lead Rubber Bearing type Isolator)

免震装置は地盤の振動から構造物を保護する目的で振動の伝達を遮断する装置として、橋梁の橋脚と桁の間、あるいは建築物の地上構造と基礎の間に設置される。鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置は鉛の低い剛性によって、構造物の固有振動数を地震動の重要振動数成分と隔離させ、履歴挙動からは免震装置内で振動エネルギーを吸収する。

鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置は、2つのせん断変形に対しては相互に関連された2軸塑性(Biaxial Plasticity)の特性を持ち、残りの4方向の変形に対しては相互に独立した線形弾性バネとしての特性を持つ。

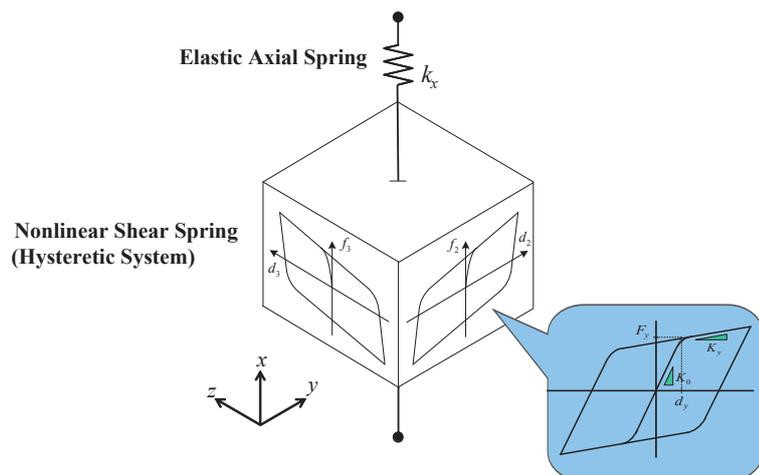


図 9.2.11 鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置のバネ

鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置におけるせん断バネの力-変位関係は、次式のように表される。

$$\begin{cases} f_y = r_y k_y \cdot d_y + (1-r_y) F_{y,y} z_y \\ f_z = r_z k_z \cdot d_z + (1-r_z) F_{y,z} z_z \end{cases} \quad (9.2.18)$$

ここで、

k_y, k_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの初期剛性

$F_{y,y}, F_{y,z}$: 要素座標系 y, z 方向せん断バネの降伏強度

r_y, r_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの降伏後の剛性低下率

d_y, d_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの相対変位

z_y, z_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの履歴挙動特性に関するパラメータ

z_y, z_z は履歴挙動特性を定義する内部パラメータであり、Wen(1976)の1軸塑性モデルを拡張させた Park, Wen, and Ang(1986)の2軸塑性(biaxial plasticity)モデルによって、次式のような微分方程式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_y \\ \dot{z}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - z_y^2 \{ \alpha_y \operatorname{sgn}(\dot{d}_y z_y) + \beta_y \} & -z_y z_z \{ \alpha_z \operatorname{sgn}(\dot{d}_z z_z) + \beta_z \} \\ -z_y z_z \{ \alpha_y \operatorname{sgn}(\dot{d}_y z_y) + \beta_y \} & 1 - z_z^2 \{ \alpha_z \operatorname{sgn}(\dot{d}_z z_z) + \beta_z \} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{k_y}{F_{y,y}} \dot{d}_y \\ \frac{k_z}{F_{y,z}} \dot{d}_z \end{Bmatrix} \quad (9.2.19)$$

ここで、

$\alpha_y, \beta_y, \alpha_z, \beta_z$: 要素座標系 y, z 方向せん断バネの履歴挙動曲線の形状定数

\dot{d}_y, \dot{d}_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの相対速度

本モデルは、せん断バネが1つの場合には弾塑性ダンパーの $s=2$ の場合と同じになり、各定数も弾塑性ダンパーのそれと同様であるため、説明は省略する。

(6) 摩擦振り子型免震装置 (Friction Pendulum System type Isolator)

摩擦振り子型免震装置は鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置に代表される免震装置であり、固有振動数移動と履歴挙動によるエネルギー吸収によって構造物を地震動から保護する。違いは、摩擦振り子型免震装置は摩擦面の振り子によって復元力を発生させ、振り子半径を調整することにより全体構造物の固有振動数を変更することができる。また、履歴挙動によるエネルギー吸収作用は摩擦面のスライド現象により行われる。

摩擦振り子型免震装置は 2 方向のせん断変形に対しては相互連結された 2 軸塑性の特性を持ち、軸方向変形に対してはギャップと同じ非線形特性を持ち、残り 3 つの回転変形に対しては相互に独立した線形弾性バネとしての特性を持つ。

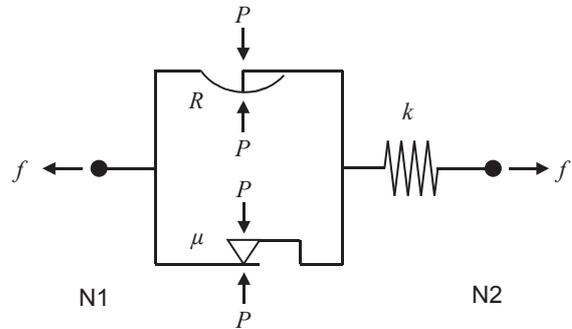


図 9.2.12 摩擦振り子型免震装置のせん断バネ

摩擦振り子型免震装置における軸バネの力-変位関係は、次式のように初期間隔が 0 であるギャップ(Gap)と同様である。

$$f_x = P = \begin{cases} k_x d_x & \text{if } d_x \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9.2.20)$$

ここで、

P : 摩擦振り子型免震装置に作用する軸方向荷重

k_x : 要素座標系 x 方向バネの線形剛性

d_x : 要素座標系 x 方向バネの相対変位

摩擦振り子型免震装置におけるせん断バネの力-変位関係は、次式に表される。

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{|P|}{R_y} d_y + |P| \mu_y z_y \\ f_z &= \frac{|P|}{R_z} d_z + |P| \mu_z z_z \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

ここで、

P : 摩擦振り子型免震装置に作用する軸方向荷重

R_y, R_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの摩擦面の振り子半径

μ_y, μ_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの摩擦係数

d_y, d_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの相対変位

z_y, z_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの履歴特性に関するパラメータ

摩擦面の摩擦係数を表す μ_y, μ_z は 2 つのせん断変形の数値により、Constantinou、Mokha and Reinhorn(1990)によって提案され、次式のように表される。

$$\begin{aligned}\mu_y &= \mu_{fast,y} - (\mu_{fast,y} - \mu_{slow,y}) e^{-r|v|} \\ \mu_z &= \mu_{fast,z} - (\mu_{fast,z} - \mu_{slow,z}) e^{-r|v|}\end{aligned}\quad (9.2.22)$$

$$\text{where } \begin{cases} v = \sqrt{\dot{d}_y^2 + \dot{d}_z^2} \\ r = \frac{r_y \dot{d}_y^2 + r_z \dot{d}_z^2}{v^2} \end{cases}$$

ここで、

$\mu_{fast,y}, \mu_{fast,z}$: 要素座標系 y, z 方向摩擦面の高速域の摩擦係数

$\mu_{slow,y}, \mu_{slow,z}$: 要素座標系 y, z 方向摩擦面の低速域の摩擦係数

r_y, r_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの摩擦係数特性のパラメータ

\dot{d}_y, \dot{d}_z : 要素座標系 y, z 方向せん断バネの相対速度

z_y, z_z は履歴特性を定義する内部パラメータであり、Wen(1976)の 1 軸塑性モデルを拡張させた Park, Wen, and Ang(1986)の 2 軸塑性モデルによって、次式のような微分方程式で表される。

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_y \\ \dot{z}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - z_y^2 \{ \alpha_y \operatorname{sgn}(\dot{d}_y z_y) + \beta_y \} & -z_y z_z \{ \alpha_z \operatorname{sgn}(\dot{d}_z z_z) + \beta_z \} \\ -z_y z_z \{ \alpha_y \operatorname{sgn}(\dot{d}_y z_y) + \beta_y \} & 1 - z_z^2 \{ \alpha_z \operatorname{sgn}(\dot{d}_z z_z) + \beta_z \} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{k_y}{|P| \mu_y} \dot{d}_y \\ \frac{k_z}{|P| \mu_z} \dot{d}_z \end{Bmatrix}\quad (9.2.23)$$

ここで、

k_y, k_z : すべり発生前の要素座標系 y, z 方向のせん断成分の初期剛性
(取り付けバネの剛性)

$\alpha_y, \beta_y, \alpha_z, \beta_z$: 要素座標系 y, z 方向せん断成分の履歴曲線の形状関連定数

\dot{d}_y, \dot{d}_z : 要素座標系 y, z 方向せん断成分の 2 つ節点間の変形の変化率

上記のモデルは降伏強度に該当する値が軸方向荷重の絶対値と摩擦係数の積で表されること以外は、鉛プラグ入り積層ゴム型免震装置と同じ形となり、各定数

の作用に関する説明は省略する。一方、非線形のせん断成分が1つである場合は $s=2$ の1縮塑性特性と同じくなる。

9.2.7 Runge-Kutta 法

(1) Cash-Karp(Adaptive Stepsize Control)

境界非線形解析では常微分方程式の数値解析手法として Runge-Kutta 法を使用する。常微分方程式を解くためには区間間隔を設定する必要がある。ここでの区間間隔は一定の時間増分間隔となる。しかし、図 9.2.13 のように微分方程式の解が急に変化する場合は一定の区間間隔で解を求めると、正確な解が求められない可能性がある。

したがって、プログラムでは Runge-Kutta 法の収束性を高めるために区間間隔の時間増分 Δt を細分する計算手法を用いる。区間間隔の Δt を細分することは全体構造物の運動方程式を解くときは一定の時間増分で計算し変形を求め、Runge-Kutta 法を利用して境界非線形要素の部材力を求めるときに、区間間隔 Δt を細分するということである。

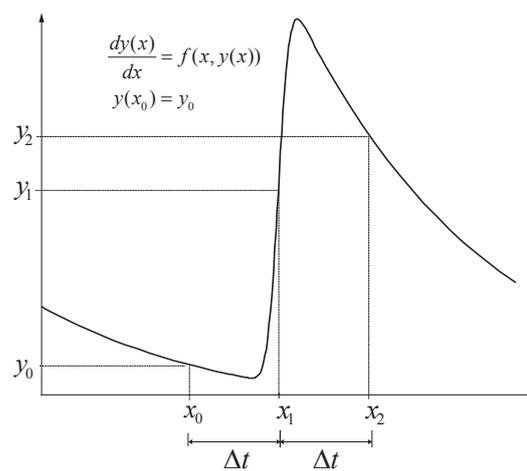


図 9.2.13 微分方程式の初期値の問題

(2) Cash-Karp(Adaptive Stepsize Control)

次数の異なる Runge-Kutta 法の予測値を利用して誤差を求めて、区間間隔を自動で調節する方法である。Adaptive Stepsize Control の基本概念は、図 9.2.14 のように誤差が小さい場合は区間間隔を大きくし、誤差が大きい場合は区間間隔を小さくすることである。

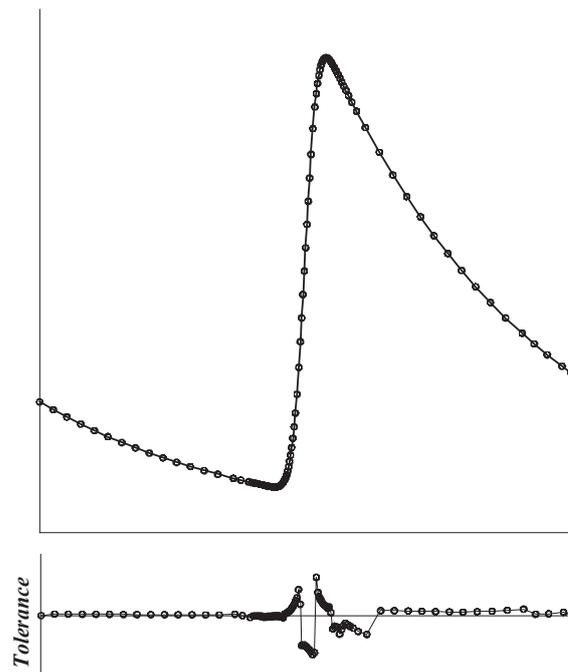


図 9.2.14 Cash-Karp(Adaptive Stepsize Control)

区間間隔の設定には Press et al.(1992)によって提案された次式を使用する。

$$h_{new} = h_{present} \left| \frac{\Delta_{new}}{\Delta_{present}} \right|^a \quad (9.2.24)$$

ここで、

h_{new} : 新しい区間間隔

$h_{present}$: 現在の区間間隔

Δ_{new} : 要求される正確度 ($\Delta_{new} = \varepsilon \Delta_{scal}$)

$\Delta_{present}$: 計算された現在の正確度

a : 区間間隔による定数

$\Delta_{present} \leq \Delta_{new}$: $a = 0.2$

$\Delta_{present} > \Delta_{new}$: $a = 0.25$

ε : 全体の許容誤差レベル

許容誤差レベル ε が小さいほど誤差は小さくなるが、解析時間と収束性を考慮して経験値である $1.0e-8$ 程度の値を適用する。

(3) Fehlberg(Stepsize Sub-Division for Non-convergence Control)

初期の区間間隔を時間増分 Δt にし、Runge Kutta 法の 4 次公式と 5 次公式による予測値を利用して誤差を求めて、求めた誤差が許容誤差レベル ε を満足するまで区間間隔を 1/2 ずつ分割して解を求める方法である。

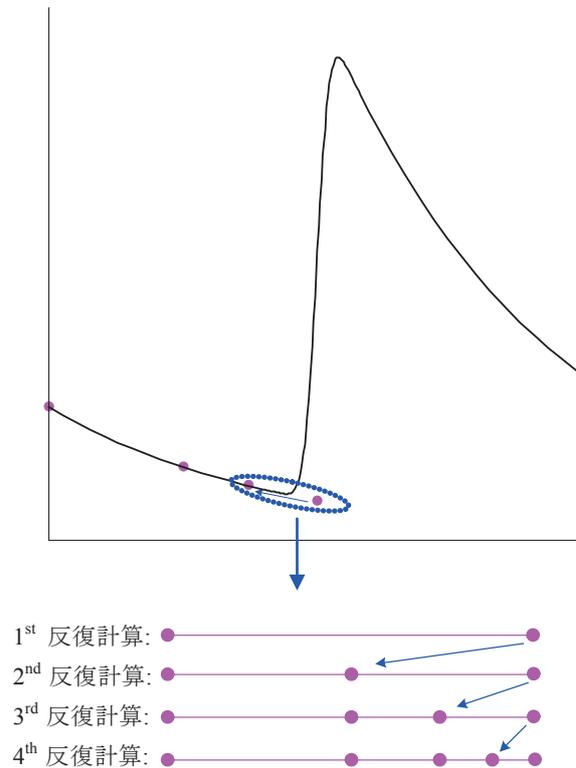


図 9.2.15 Fehlberg(Stepsize Sub-Division for Non-convergence Control)

9.3 動的フレーム非線形解析

9.3.1 概要

構造物に地震動が作用すると、最初は変形が小さく弾性範囲内で挙動するが、外力の増加とともに変形も大きくなり、ひび割れ、降伏など部材内の応力が弾性限界を超えて非弾性領域に入ってしまう。この時、復元力と変形の関係は履歴ループを画くようになる。このような復元力特性は弾塑性復元力特性と呼ばれる。動的フレーム非線形解析では部材の弾塑性復元力特性を履歴モデルで表現し、構造物の非線形の動的挙動を把握する時刻歴解析方法である。

解析時は計算上の効率を考慮して、損傷が大きいと予想される部分には非線形要素を使用して、残り部分は弾性であると仮定する。使用できる非線形要素には要素タイプとして、非弾性ヒンジの属性が与えられた梁要素とリンク要素がある。

9.3.2 運動方程式

動的フレーム非線形解析の運動方程式は以下のようになる。

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + K_S u + f_I + f_N = p \quad (9.3.1)$$

ここで、

M : 質量マトリックス

C : 減衰マトリックス

K_S : 非線形部材を除いた弾性部材の剛性マトリックス

u, \dot{u}, \ddot{u} : 節点の変位、速度、加速度

p : 節点への動的荷重

f_I : 非線形梁要素の全体座標系での節点内力

f_N : 非線形リンク要素の全体座標系での節点内力

動的フレーム非線形解析は線形の時刻歴解析と異なり、重ね合せの原理が適用できない。したがって、微小な時間間隔ごとに運動方程式を数値的に積分して解を定めてゆく数値積分法(以下、直接積分法)を用いる。プログラムでは直接積分法としてNewmark- β 法を使用する。また、時間ステップごとに発生する不平衡力の収斂にはNewton-Raphson法の反復計算を適用する。

Newmark- β の基本仮定により、時刻 t での加速度と変位を用いて $t + \Delta t$ での速度と変位を以下のように表す。

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{u}_t + \gamma \Delta t \ddot{u}_{t+\Delta t} \quad (9.3.2)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_t + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{t+\Delta t} \quad (9.3.3)$$

上式を変位で整理すると、次式のように表すことができる。

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_{t+\Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{u}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{u}_t \quad (9.3.4)$$

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left(\Delta u_{t+\Delta t} - \Delta t \dot{u}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_t \right) \quad (9.3.5)$$

変位、速度、加速度の増分は次のように表される。

$$\Delta u_{t+\Delta t} = u_{t+\Delta t} - u_t \quad (9.3.6)$$

$$\Delta \dot{u}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_{t+\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{u}_t \quad (9.3.7)$$

$$\Delta \ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta u_{t+\Delta t} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_t - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_t \quad (9.3.8)$$

Newton-Raphson 法による反復計算時の増分応答は次のように表される。

$$\delta \dot{u}^{(i)} = \Delta \dot{u}^{(i)} - \Delta \dot{u}^{(i-1)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta u^{(i)} \quad (9.3.9)$$

$$\delta \ddot{u}^{(i)} = \Delta \ddot{u}^{(i)} - \Delta \ddot{u}^{(i-1)} = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \delta u^{(i)} \quad (9.3.10)$$

また、時刻 $t + \Delta t$ での(i)番目の反復計算時の変位、速度、加速度は次のようになる。

$$u_{t+\Delta t}^{(i)} = u_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \delta u^{(i)} \quad (9.3.11)$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} = \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \delta \dot{u}^{(i)} = \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \delta u^{(i)} \quad (9.3.12)$$

$$\ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} = \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \delta \ddot{u}^{(i)} = \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \delta u^{(i)} \quad (9.3.13)$$

したがって、時刻 $t + \Delta t$ での(i)番目の反復計算時の非線形運動方程式は次のようになる。

$$M \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} + C \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i)} + f(u)_{t+\Delta t}^{(i)} = p_{t+\Delta t} \quad (9.3.14)$$

式(9.3.14)に式(9.3.12)、(9.3.13)を代入すると、増分変位 $\delta u^{(i)}$ に対する釣り合い方程式が以下のよう求められる。

$$K_{Eff}^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} = \Delta p_{Eff}^{(i)} \quad (9.3.15)$$

ここで、

K_{Eff} : 有効剛性マトリックス

$$K_{Eff} = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} M + \frac{1}{\beta \Delta t} C + K_{t+\Delta t}^{(i)}$$

Δp_{Eff} : 各反復計算段階での有効荷重ベクトル

$$\Delta p_{Eff} = p_{t+\Delta t} - \left(M \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + C \dot{u}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + f_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right)$$

$K_{t+\Delta t}^{(i)}$: 非弾性要素を含んだ接線剛性マトリックス

$\delta u^{(i)}$: 各反復計算段階での変位増分ベクトル

β : Newmark- β 法の数値解析パラメータ

9.3.3 静的非線形解析

非線形動的解析では質量と減衰の効果を除くことで、非線形静的解析を行うことができる。プログラムの**時刻歴荷重ケースの静的解析**がこれに該当する。非線形静的解析の結果は非線形動的解析時の初期条件として考慮することができる。

非線形静的解析は荷重増分による Newton-Raphson 法に基づき、総ステップ数さえ指定すれば、定義した静的荷重をステップ数で当分割した増分解析を行う。

静的荷重はプログラムの**静的荷重制御データ**の静的荷重ケースから指定でき、静的荷重の載荷様子は**時刻歴荷重の時刻歴荷重データのタイプ**を**無次元**にして指定できる。この場合、荷重係数は 0 から 1 まで線形増加するようにし、時間の概念は無視して良い。

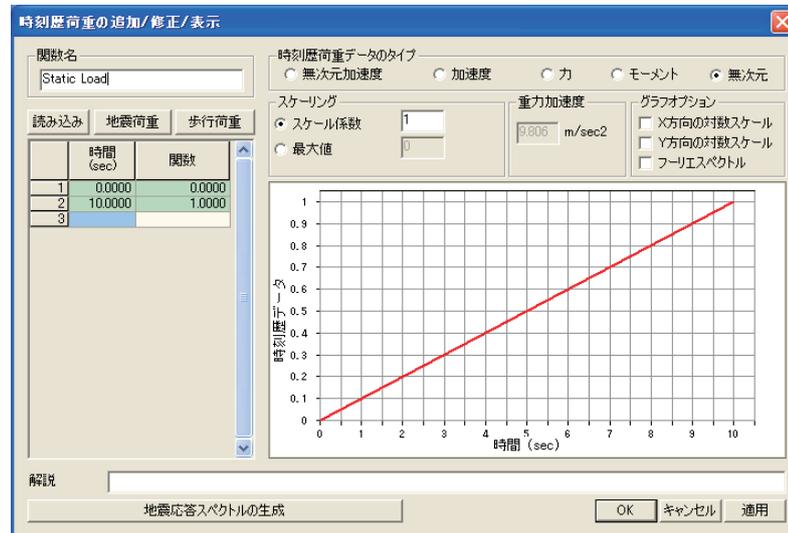


図 9.3.1 静的荷重の増分様子の入力例

9.3.4 初期断面力の考慮

動的フレーム非線形解析で、重力荷重による静的解析の結果を動的解析の初期条件として考慮する方法には、1)重力荷重に対して非線形静的解析を行った後に時刻歴解析を行う方法と、2)重力荷重に対する静的解析の結果を初期断面力として入力して時刻歴解析の結果に反映する方法がある。

静的解析結果を初期断面力として入力する場合、線形解析では入力した初期断面力を単純に動的解析の結果と組み合わせることができる。一方、非線形動的解析では部材に発生する断面力が外力によって発生するため、入力された初期断面力を部材力としてつり合い方程式にそのまま反映すると、つり合い条件が成立しなくなる。

プログラムでは、入力された初期断面力に対して仮想の変形を求め、非線形部材の降伏状態の判定時に考慮することで非線形動的解析を行う。ただし、動的つり合い方程式を構成する際は初期断面力を無視する。計算方法を以下に示す。

1. 動的解析の初期増分に入る前に、初期剛性 K_0 を利用して、入力された初期断面力に対する非弾性ヒンジの仮想変形 D_{ini} を求める。
 - (a) 計算した D_{ini} が降伏変形内にあれば(弾性範囲)、入力した初期断面力をそのまま解析に反映する。
 - (b) 計算した D_{ini} が降伏変形を超えた場合は、履歴ルーチンから変形 D_{ini} に対する復元力 P_{ini} を求めて解析に反映する。
ただし、 D_{ini} と P_{ini} は初期増分から 1 回だけ計算する。
2. 動的つり合い方程式を解き、増分変位 $\delta u_{t+\Delta t}$ を求める。ただし、初期断面力は内力で入力されるので、動的つり合い方程式を構成する際は無視する。
3. 増分変位 $\delta u_{t+\Delta t}$ を利用して、数値積分法で $\ddot{u}_{t+\Delta t}, \dot{u}_{t+\Delta t}, u_{t+\Delta t}$ を計算する。変位を利用して非線形ヒンジの変形 D と復元力 P を求める。
4. 非線形部材の状態を判定するために履歴ルーチンに入る。ただし、履歴ルーチンに入る前に非弾性ヒンジの変形と部材力は初期断面力を考慮して次のように修正する。

$$D^* = D + D_{ini}$$

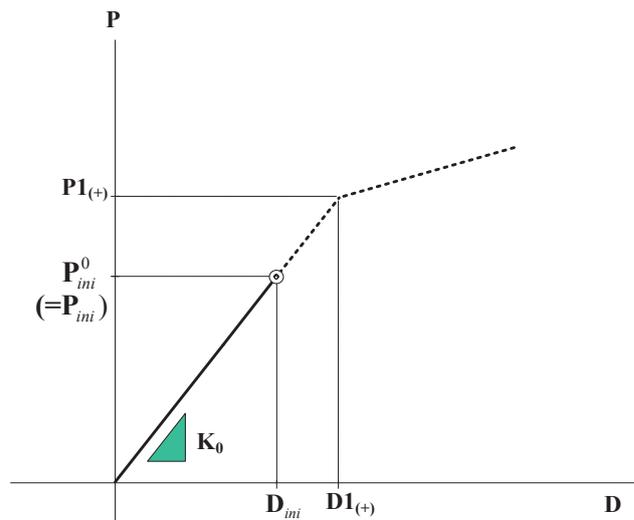
$$P^* = P + P_{ini}$$
5. 履歴ルーチンから変形 D^* を使って剛性と復元力 \bar{P}^* を計算する。
6. 非弾性ヒンジの解析結果を出力する。

7. 動的つり合い方程式を構成するために変形と復元力を次のように修正する。

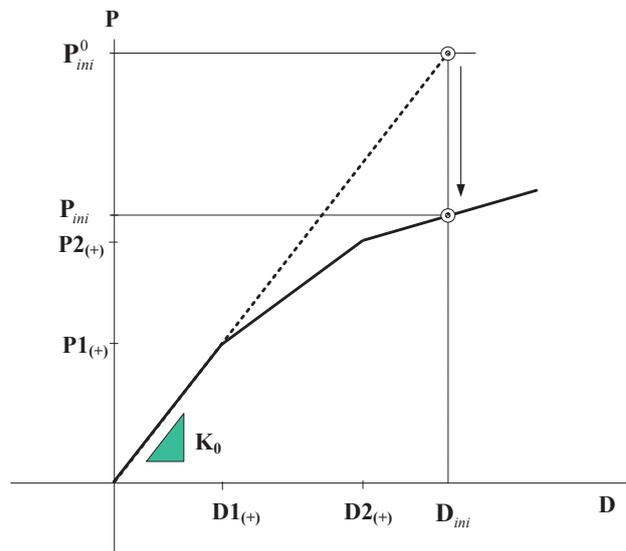
$$D = D^* - D_{ini}$$

$$\bar{P} = \bar{P}^* - P_{ini}$$

8. 動的つり合い方程式を構成して、2.~8.の過程を最後の時間増分まで繰り返し計算する。



(a) 初期断面力が弾性範囲の場合



(b) 初期断面力が弾性限界を超えた場合

図 9.3.2 入力された初期断面力の処理

9.3.5 初期剛性

非線形部材の初期剛性はプログラムの**非線形特性**のプロパティの**初期剛性**から次のように設定できる。

弾性剛性：弾性剛性を初期剛性として使用。ただし、集中型ヒンジの曲げ成分は

$6EI/L$ 、 $3EI/L$ 、 $2EI/L$ の中から選択

ユーザー：非線形部材の初期剛性を直接入力

スケルトン曲線から求める：入力された降伏強度と降伏変形から初期剛性を計算

‘弾性剛性’と‘ユーザー’の場合、(+)、(-)側で同じ初期剛性を持つ。

‘スケルトン曲線から求める’を選択した場合、(+)、(-)側の降伏変形を別々に入力することができる。この場合、(+)、(-)側の降伏強度と降伏変形との傾きから初期剛性を求め、解析では大きい値を適用する。ただし、原点志向型、非線形弾性型/Bilinear、非線形弾性型/Trilinear、非線形弾性型/Tetralinear の履歴は非対称に入力された(+)、(-)側の初期剛性をそのまま使用する。

9.3.6 非線形要素

(1) 非線形梁要素

非線形梁要素は非弾性ヒンジの属性が与えられた梁要素である。非線形梁要素は柔性法(Flexibility Method)で定式化され、荷重が載荷される間、微小変形、平面保持の仮定を前提とする Euler Bernoulli 梁理論に基づく。ねじり成分は、軸力、モーメント成分と連成しないと仮定する。

非線形梁要素は幾何学的には線形に定式化する。ただし、**初期断面力(荷重> 初期断面力> 微小変形> 初期断面力)** から初期断面力を入力し、**初期軸力制御データ** の**初期軸力による幾何剛性を反映** を選択すると、入力した初期断面力による幾何剛性を要素剛性に追加することができる。ただし、解析中に幾何剛性は更新されない。

構造部材の非線形挙動を把握し変位の軟性能力を評価するためには、部材の降伏後の領域に対する解析が必要となる。しかし、既存の剛性度法(Stiffness-Based Method)では要素を形状関数から定式化するため、実際の変形と定式化で仮定された形状関数間では違いが生じる場合がある。柔性法(Flexibility Method)ではモデルを断面形状だけでなく、断面力に対しても形状関数を適用して定式化するため、柔性法での部材の断面力分布は実際と一致し、より正確な解析が可能である。柔性法が断面力に対して線形の形状関数を適用することは、放物線の形で剛性度の変化を仮定することに該当する。これは剛性度法で 3 次の形状関数を使うことが線形の曲率分布を仮定することと同じで、より少ない数の断面でも剛性度法のような精度の結果を出すことができる。一般的に柔性法を使うと、少ない要素でも正確な結果を得ることができ、解析速度も速くなる利点がある。

非線形梁要素は部材の弾塑性領域の分布可否、および解析方法によって、集中型ヒンジモデルと分布型ヒンジモデルに区分される。

集中型ヒンジモデルは地震荷重が作用する場合、梁要素の逆対称モーメントによって部材端部に発生する塑性ヒンジを効果的に表現する方法である。したがって、非弾性ヒンジでは曲げ、せん断成分は要素の両端に発生し、軸成分のヒンジは要素中央に発生すると仮定する。集中型ヒンジモデルの曲げ成分の履歴は曲げモーメント-回転角の関係で表される。

分布型ヒンジモデルは部材内に複数の非弾性ヒンジを割り当て、各ヒンジの位置で弾塑性判定を行い、ヒンジの剛性を更新した後、数値積分によって要素剛性を構成する。分布型ヒンジモデルの曲げ成分の履歴は曲げモーメント-曲率の関係で表される。

集中型ヒンジは分布型ヒンジに比べて、計算量が少ない長所があるが、図 2.62 に示すように断面力の分布を仮定するため、実際の断面力分布がここでの仮定と大きく異なる

る場合は結果の信頼性が落ちてしまう。また、非弾性ヒンジを部材両端に固定するため、変形が大きくなってもヒンジ領域は拡張しないと仮定する。

一方、分布型ヒンジは非弾性ヒンジの数に比例して計算時間が長くなる短所はあるが、断面力の分布をより正確に考慮することができ、変形の進行につれてヒンジ領域も拡散するため、集中型ヒンジに比べてより正確な解析ができる。

プログラムでは1つの梁要素に属するヒンジは同じ属性を持つように制限している。したがって、橋梁の上部構造のようにテーパ断面を持つ部材に対しては、両端の剛性を平均して等断面の梁要素として処理している。したがって、断面の変化が大きい変断面要素の場合は、等断面に置換しても結果に大きい影響がないように要素を長さ方向に適切に分割した方がよい。

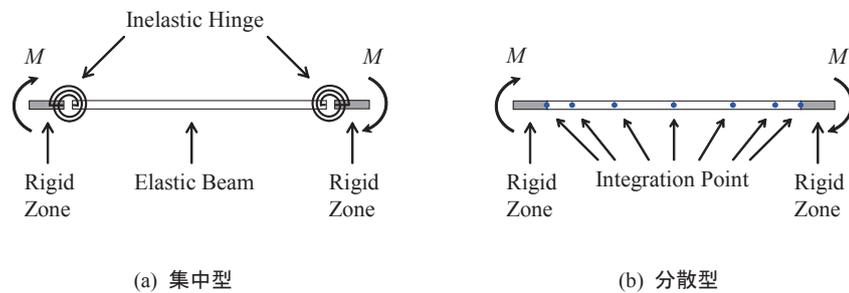


図 9.3.3 非弾性ヒンジ

A. 集中型ヒンジモデル

集中型ヒンジは非線形の並進または回転バネでモデリングされ、材軸方向の変形に対しては部材中央、曲げに対しては部材の両端部に指定される。ヒンジの定義は非線形ヒンジの追加/修正ダイアログボックスから、要素タイプを**材端バネ付きビーム要素**にして定義する。一方、梁要素で集中型ヒンジを除いた他の部分は弾性梁要素としてモデリングされる。

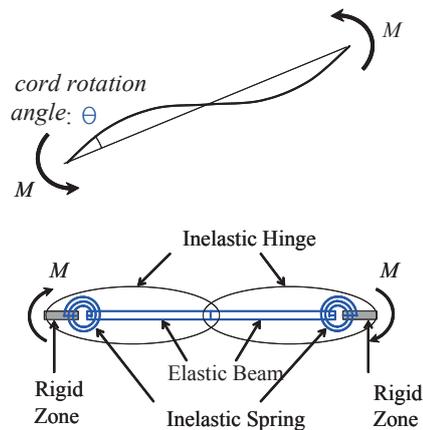


図 9.3.4 集中型ヒンジモデル

ヒンジを定義する弾塑性バネは軸変形の場合には力-変位関係で、曲げ変形の場合にはモーメント-回転角関係で定義されます。ヒンジの柔性(flexibility)は弾塑性バネの接線柔性マトリックスと初期柔性マトリックスとの差で定義されて、降伏の前は0で、降伏し始めると柔性が発生します。弾塑性バネの接線柔性マトリックスは次で説明する一軸、または多軸ヒンジ履歴モデルによって定義される。

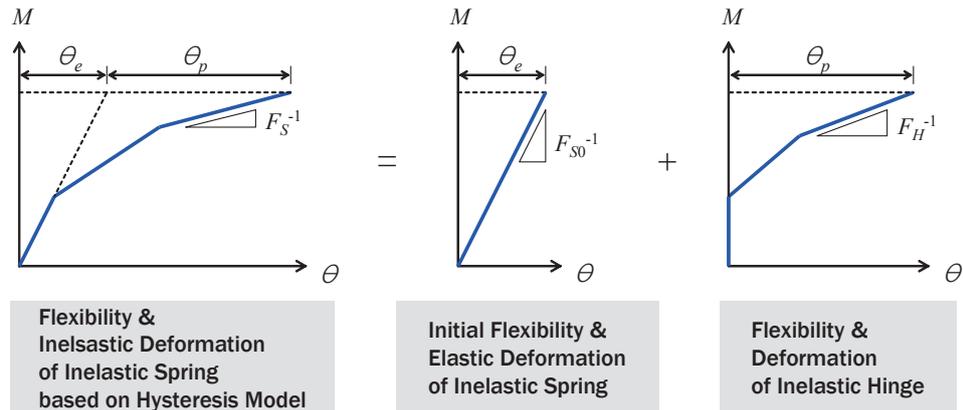


図 9.3.5 弾塑性ヒンジの柔性

$$F_H = F_S - F_{S0}$$

$$F = F_B + \sum F_H$$

$$K = F^{-1} \tag{9.3.16}$$

ここで

F_H : 弾塑性ヒンジの柔性マトリックス

F_{S0} : 弾塑性バネの初期柔性マトリックス

F_S : 弾塑性バネの柔性マトリックス

F_B : 弾性梁の柔性マトリックス

F : 弾塑性梁の要素柔性マトリックス

K : 弾塑性梁の要素剛性マトリックス

曲げ変形によるヒンジのモーメント-回転角関係は端部の曲げモーメントだけでなく、部材中間部の曲げモーメント分布にも影響を受ける。したがって、曲げ変形によるヒンジのモーメント-回転角関係を定めるためには曲げモーメントの分布を仮定する必要がある。以下に仮定したモーメント分布とそれに対応する初期剛性を示す。

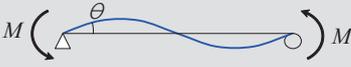
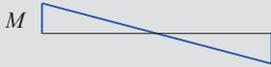
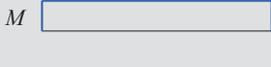
Deflection Shape	Moment Distribution	Initial Stiffness
		$\frac{6EI}{L}$
		$\frac{3EI}{L}$
		$\frac{2EI}{L}$

図 9.3.6 曲げ変形に対する非弾性ヒンジの初期剛性(全体長さ=L、断面曲げ剛性=EI)

B. 分布型ヒンジモデル

分布型ヒンジは部材の材軸方向の積分点における断面の柔性度から計算し定義される。断面の柔性度は次式によって定義され、Gauss-Lobatto 積分から計算される。

要素剛性マトリックスは柔性度行列の逆行列から計算される。部材軸方向の積分点での部材断面の柔性度は一軸または多軸ヒンジの履歴モデルの状態判定から決定される。そして、履歴は軸成分の場合に力-変位関係で、曲げ成分の場合にモーメント-曲率関係から定義される。プログラムでのヒンジ定義は非線形ヒンジの追加/修正ダイアログボックスから、要素タイプをビーム要素にして行う。

$$F = \int_0^L b^T(x) f(x) b(x) dx$$

$$K = F^{-1} \quad (9.3.17)$$

ここで

$f(x)$: x 位置での断面の柔性マトリックス

$b(x)$: x 位置での断面力の分布関数マトリックス

F : 要素柔性マトリックス

K : 要素剛性マトリックス

L : 部材長さ

x : 断面の位置

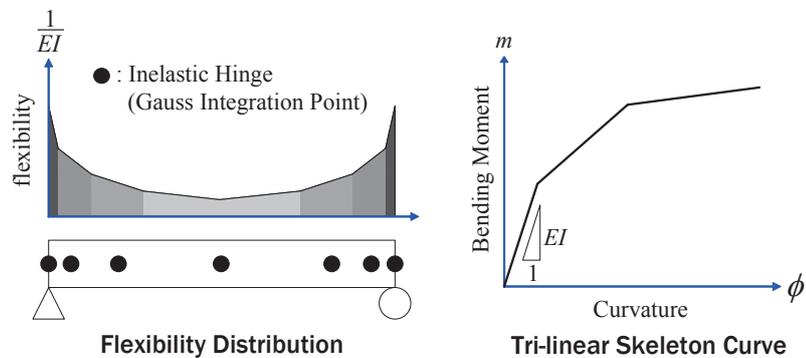


図 9.3.7 分布型ヒンジモデル

梁-柱部材の非線形性は主に部材端部に集中される場合が多い。したがって、プログラムでは部材端部に積分点が取れる Gauss-Lobatto 積分法を使用して分布型ヒンジ要素の柔性マトリックスを求める。

積分点の数は要素内の非弾性ヒンジの数を意味し、1個から最大20個まで設定することができる。積分点の位置は図9.3.8に示すように積分点の数によって決まり、端部になるほど積分点の間隔も狭くなる。ただし、Gauss-Lobatto法は要素端部に積分点を取るため、積分点が2つの場合は使用できない。したがって、積分点が2つの場合はClassical Gauss Integrationを使用して柔性マトリックスを構成する。

積分点の数と結果の精度は必ず比例するとはいえなく、むしろ積分点数が多いと、ヒンジの状態判定に必要な計算量が増える短所がある。研究結果によると、積分点の数が5つ以上の場合には結果にあまり差がないと知られている。したがって、要素長さと要素分割数による影響はあるが、1要素における積分点の数は5つ以下が適切だといえる。

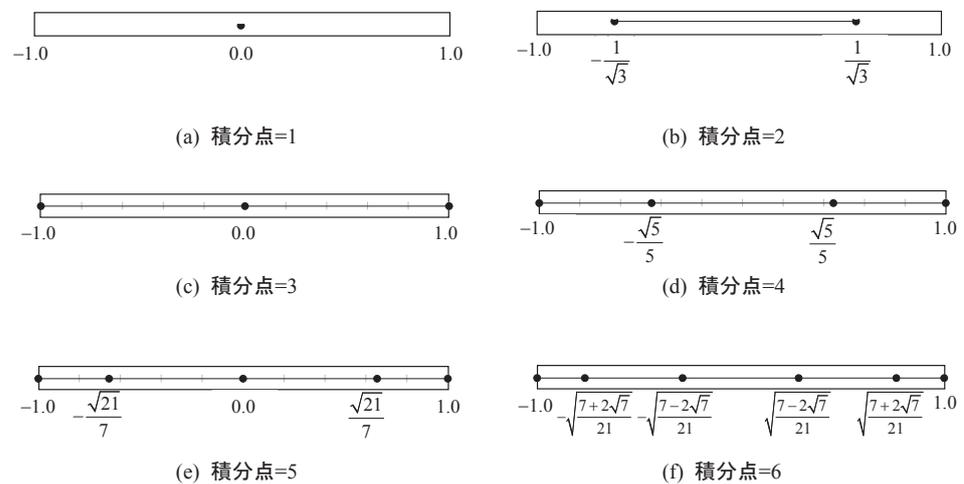


図 9.3.8 Gauss-Lobatto Integration での積分点位置

(2) 非線形リンク要素

非線形リンク要素(General Link)は、要素座標系の x , y , z の3方向の変位と回転で表現される2節点間を結ぶ6つのバネである。汎用リンク要素で非弾性ヒンジが適用できるのは要素タイプのパネだけとなる。汎用リンク要素は本来成分別に弾性剛性だけを持っているが、それに非線形特性を与えることで非線形要素として使用することができる。

非線形リンク要素は構造物の特定部分、あるいは地盤の塑性変形が1つのバネに集中される場合に使用され、非線形ヒンジの追加/修正ダイアログボックスから要素タイプをバネにして定義する。汎用リンク要素は一般構造の部材と異なり、部材の材料や断面特性を定義することができなく、要素剛性を自動算定することもできない。したがって、ユーザーが成分ごとに剛性を定義しなければならない、入力された剛性は非線形解析時の初期剛性として使用される。

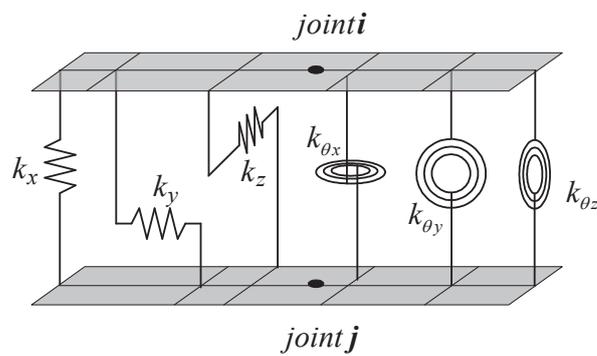


図 9.3.9 汎用リンク要素のパネ剛性

(3) 非線形トラス要素

非線形トラス要素は軸方向の剛性だけを持つ要素で、非線形ヒンジの追加/修正ダイアログボックスから要素タイプをトラスにして定義する。非線形トラス要素の非線形性は軸方向の成分だけが定義でき、非弾性ヒンジは一軸ヒンジの履歴モデルから状態判定を行い剛性を構成する。

非線形トラス要素は幾何学的に線形に定式化される。ただし、非線形梁要素と同じように、初期断面力(荷重) 初期断面力> 微小変形> 初期断面力) から初期断面力を入力し、初期軸力制御データ の初期軸力による幾何剛性を反映 を選択すると、入力した初期断面力による幾何剛性を要素剛性に追加することができる。ただし、解析中に幾何剛性は更新されない。

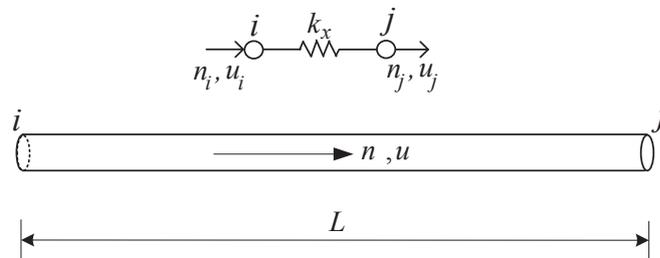


図 9.3.10 非線形トラス要素と軸方向剛性

9.3.7 履歴モデル

(1) 概要

部材の 1 軸方向の荷重に対する力と変位関係をスケルトンカーブと呼ぶ。履歴モデルはこのスケルトンカーブに基づき、正(+)、負(-)の繰り返し荷重が作用する時、除荷と再載荷の場合の力と変形関係の規則を決めるもので、非線形解析時は部材の復元力特性を履歴モデルで定義する。

非線形解析時に使用する履歴モデルと非線形解析の条件によって解析結果が大きく変わるため、適切な解析結果を得るためには使用材料と部材の復元力特性を十分に反映できる履歴モデルを定義する必要がある。表 9.3.1 は、プログラムで使用できる履歴モデルを用途別に分類したものである。

表 9.3.1 の中で軸-曲げの相互作用が表現できる P-M、P-M-M タイプについては、後述の‘P-M および P-M-M 相関作用’編で説明する。

A. 非弾性ヒンジの属性

非弾性ヒンジの属性は集中型、分布型、バネ型、トラス型に区分することができる。集中型と分布型は梁要素だけに適用でき、バネ型は汎用リンク要素、トラス型はトラス要素に適用できる。

非弾性ヒンジの属性は、成分ごとに定義される非線形特性の集合で、梁要素はねじりを除いた 5 成分、汎用リンク要素は 6 成分、トラス要素は軸成分だけが定義できる。ここで、非弾性ヒンジの非線形特性は履歴モデルによって定義され、各成分の特性は一軸ヒンジの履歴モデル(uni-axial hinge hysteresis model)から独立的に定義するか、軸-曲げの相互作用を考慮した多軸ヒンジの履歴モデル(multi-axial hinge hysteresis model)で定義することができる。

表 9.3.1 履歴モデルの種類

分類	履歴モデル	適用要素	軸-曲げの相互作用	主な用途
一般型	ノーマルトリニア型 (Kinematic Hardening/Trilinear)	B, T, S	P-M, P-M-M	鋼材
	原点志向型/ Trilinear	B, T, S	P-M	橋梁上部構造
	最大点志向型/ Trilinear	B, T, S	P-M	橋梁上部構造
	ノーマルバイリニア型	B, T, S	P-M	鋼材、簡略モデル
剛性 低減型	Clough型/ Bilinear	B, T, S	P-M	鉄筋コンクリート部材
	深田型/ Trilinear	B, T, S	P-M	鉄筋コンクリート部材
	オリジナル武田型/ Trilinear	B, T, S	P-M	鉄筋コンクリート部材
	オリジナル武田型/ Tetralinear	B, T, S	P-M	鉄筋コンクリート部材
	修正武田型/ Trilinear	B, T, S	P-M	鉄筋コンクリート部材
	修正武田型/ Tetralinear	B, T, S	P-M	鉄筋コンクリート部材
非線形 弾性型	非線形弾性型/ Bilinear	B, T, S	P-M	橋梁上部構造
	非線形弾性型/ Trilinear	B, T, S	P-M	橋梁上部構造
	非線形弾性型/ Tetralinear	B, T, S	P-M	橋梁上部構造
スリップ 型	スリップ Bilinear	B, T, S	P-M	鋼材、ゴム支持
	スリップ Bilinear /引張のみ	B, T, S	P-M	鋼材、ゴム支持
	スリップ Bilinear /圧縮のみ	B, T, S	P-M	鋼材、ゴム支持
	スリップ Trilinear	B, T, S	P-M	鋼材、ゴム支持
	スリップ Trilinear /引張のみ	B, T, S	P-M	鋼材、ゴム支持
	スリップ Trilinear /圧縮のみ	B, T, S	P-M	鋼材、ゴム支持
履歴 関数型	Ramberg Osgood	S	-	非線形地盤
	Hardin Drnevich	S	-	非線形地盤
マルチ リニア型	マルチリニア-弾性	B, T, S	-	簡略モデル化
	マルチリニア-塑性移動硬化	B, T, S	-	鋼材、簡略モデル化
	マルチリニア-塑性武田	B, T, S	-	鉄筋コンクリート部材
	マルチリニア-塑性ピボット	B, T, S	-	鉄筋コンクリート部材

*B: 梁、T: トラス、S: バネ

B. 梁要素の降伏強度

非弾性ヒンジに設定される履歴モデルは降伏強度と降伏後の剛性低減率で定義する。要素の降伏強度はユーザーが直接入力するか、プログラムで自動計算して定義することができる。

プログラムの自動計算では、梁要素の曲げによる降伏を図 9.3.12 のように定義する。鉄骨部材の場合、1 次降伏は部材端部の曲げ応力が降伏応力に達したときと見なし、2 次降伏は全断面の曲げ応力が降伏応力に達したときと見なす。RC 部材の場合、1 次降伏は部材端部の曲げ応力がコンクリートのひび割れ応力に達したときと見なし、2 次降伏はコンクリートの圧縮縁のひずみが最大ひずみに達したときと見なし、その時、鉄筋の応力は降伏応力より小さいか同じと仮定する。SRC 部材でコンクリート充填鋼管の場合は鉄骨断面、コンクリート被服型の場合は RC 断面の基準に従う。

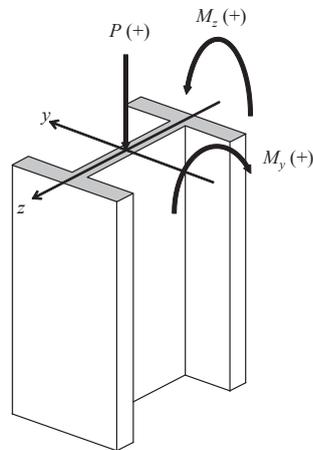
軸と曲げの相関作用を考慮する P-M、P-M-M タイプの場合は、軸力による中立軸の移動を考慮し、軸力-モーメントの相関曲線(降伏曲面)を作成する必要があり、この場合も自動計算ができる。

(2) 軸ヒンジの履歴モデル

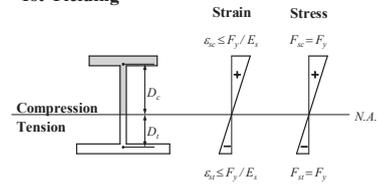
A. 概要

一軸ヒンジ(Uni-Axial Hinge)モデルは、3 つの並進と 3 つの回転成分が互いに独立的に挙動するヒンジである。一軸ヒンジが利用できる履歴モデルはスケルトンカーブに基づき、表 9.3.1 のすべての履歴モデルが一軸ヒンジとして使用できる。ここでの履歴モデルは 1 次、2 次の降伏強度と、正(+)、負(-)別々の剛性低減率が定義できる。ただし、移動硬化型の場合は剛性低減率を非対称に定義することができない。

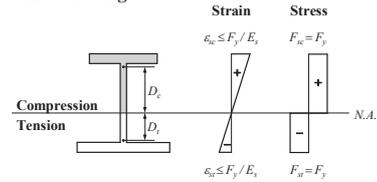
以下の履歴モデルの説明において、応答点(Response Point)は履歴モデルの経路上に位置した荷重-変位の座標を意味する。載荷は荷重の絶対値が増加することを、除荷は荷重の絶対値が減少することを、再載荷は載荷途中に荷重の符号が変わって絶対値が増加することを意味し、除荷点は除荷から再載荷に変わる応答点を意味する。



1st Yielding

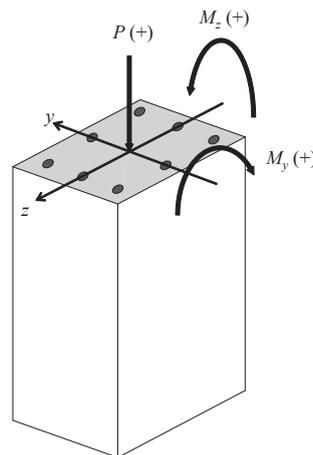


2nd Yielding



D_c : Center of Steel Compressive Force
 D_t : Center of Steel Tensile Force

(a) 鉄骨

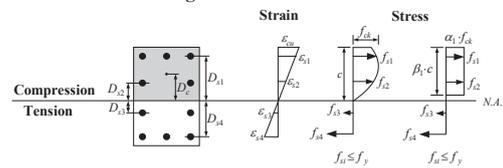


1st Yielding (Cracking)

$$M_{cr} = k\sqrt{f_{ck}}Z - \frac{Z}{A}N$$

M_{cr} : Cracking Moment
 k : Coefficient for Cracking Moment
 (ACI=7.5 in lb-in unit, AIJ=1.8 in kgf-cm unit)
 f_{ck} : Specified Compressive Strength of Concrete
 Z : Elastic Section Modulus

2nd Yielding



D_c : Center of Concrete Compressive Force

(b) RC

図 9.3.11 梁要素の降伏強度の算定基準

鉄筋コンクリート部材の場合、コンクリートのひび割れ、鉄筋の降伏によって剛性低減が起きる。また、繰り返し荷重が作用する場合、降伏後の載荷時も剛性が低下され、荷重の方向が変わると過去に経験した最大変位点を志向する特性がある。鉄筋コンクリート部材の復元力特性をモデル化した履歴モデルは多く提案されているが、どのモデルも剛性低下と最大点志向は考慮している。鉄筋コンクリートの代表的な履歴モデルとしては武田モデルがあり、Clough 型、深田型/Trilinear など良く使用される。

鋼材はある荷重方向で塑性変形が起きると、逆方向の荷重が作用した場合に本来の降伏応力よりも小さい応力で塑性化すると知られている。これを Bauschinger 効果と呼ぶ。また、ひずみが大きくなると応力が増加する性質、ひずみ硬化(Strain Hardening)が

発生する。このような鋼材の履歴モデルには移動硬化型のノーマルバイリニアが一般的で、ノーマルトリニア型を適用する場合もある。

コンクリートで充填された鋼材橋脚の履歴モデルには武田型、あるいは降伏点で剛性が変化する移動硬化型のノーマルバイリニアを使用する。ノーマルバイリニア型は鉄筋コンクリート部材と異なり、剛性低下が発生しない。

コンクリートで充填されない鋼材橋脚の履歴モデルにはノーマルバイリニアが一般的である。一方、橋脚は重力荷重による圧縮力により圧縮側で降伏した後に引張側で降伏が生じるため、圧縮側と引張側の降伏に達する荷重が違う。このために、履歴モデルにノーマルトリニアを使用する場合がある。

(3) ノーマルバイリニア型

A. 履歴の概要

スケルトンカーブはバイリニア型である。入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

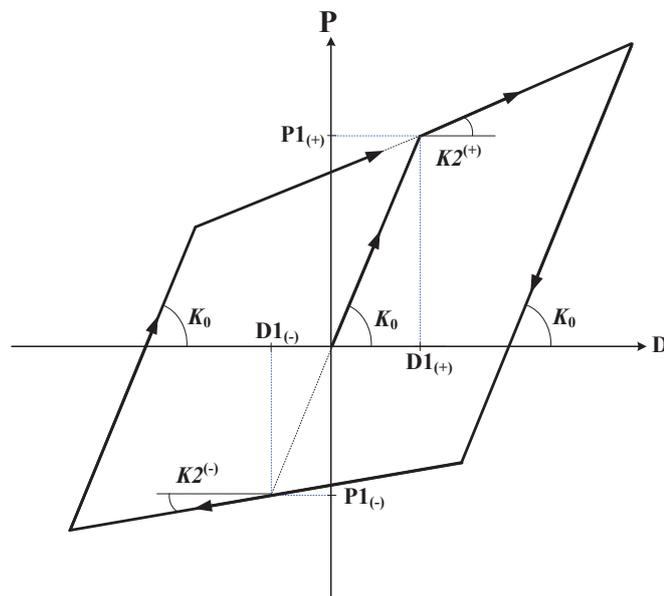


図 9.3.12 ノーマルバイリニアの履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}$: (+),(-)側第 2 剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$

$K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$\alpha1^{(+)}, \alpha1^{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏後の剛性低下率

C. ノーマルバイリニア型の履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D1$ の場合は線形弾性で、原点を通る弾性勾配 K_0 の直線上で移動する。
- 2) D がはじめて $D1_{(\pm)}$ を超えた場合、また、これまでの最大変形点を超えた場合は、第 2 勾配 $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 直線上を進む。
- 3) $D1_{(+)} < D, D < D1_{(-)}$ の状態で除荷を受けた場合は、折れ点までは弾性勾配 K_0 で戻り、折れ点を超えると $K2^{(-)}, K2^{(+)}$ 直線上を進む。

(4) ノーマルトリリニア型(移動硬化)

A. 履歴の概要

スケルトンカーブはトリリニア型である。モデルの特性により降伏後の剛性低減率は(+),(-)対称のみ可能である。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

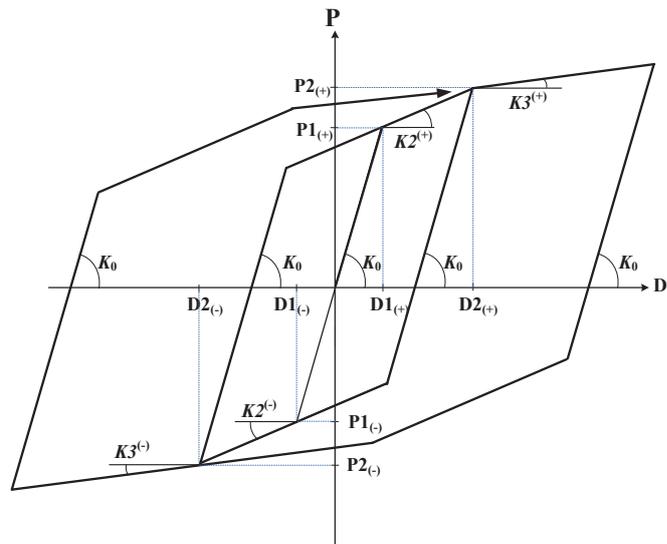


図 9.3.13 ノーマルトリリニア型(移動硬化) の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第2剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第3剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

$\alpha1^{(+)}, \alpha1^{(-)}$: (+),(-)側第1降伏後の剛性低下率

$\alpha2^{(+)}, \alpha2^{(-)}$: (+),(-)側第2降伏後の剛性低下率

C. ノーマルトリリニア型の履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D2$ の場合、通常のバイリニアとして挙動する。
- 2) $|D_{\max}| > D2$ の場合は、トリリニアとして移動する。
- 3) 除荷時は弾性剛性で移動する。

(5) 原点指向型

A. 履歴の概要

スケルトンカーブはトリリニアで、除荷時は反対側の最大点を目指して進み、この勾配は原点を通過してもそのまま、反対側のスケルトンカーブに至るとその曲線上を移動する。除荷過程で再載荷された場合は除荷と同じ勾配の直線上で動く。

入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

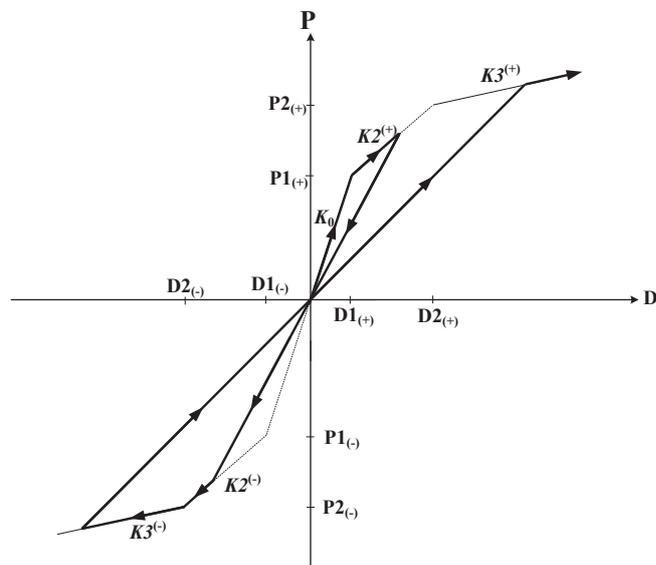


図 9.3.14 原点指向型の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1(+), P1(-)$: (+),(-)側第1降伏強度

$P2(+), P2(-)$: (+),(-)側第2降伏強度

$D1(+), D1(-)$: (+),(-)側第1降伏変形

$D2(+), D2(-)$: (+),(-)側第2降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2(+), K2(-)$: (+),(-)側第2剛性。但し、 $K2(+)=\alpha1(+)\cdot K_0$, $K2(-)=\alpha1(-)\cdot K_0$

$K3(+), K3(-)$: (+),(-)側第3剛性。但し、 $K3(+)=\alpha2(+)\cdot K_0$, $K3(-)=\alpha2(-)\cdot K_0$

$\alpha1(+), \alpha1(-)$: (+),(-)側第1降伏後の剛性低下率

$\alpha2(+), \alpha2(-)$: (+),(-)側第2降伏後の剛性低下率

(6) 最大点指向型

A. 履歴の概要

スケルトンカーブはトリニアで、除荷時は反対側の最大変位点を目指して進む。反対側が 1 次降伏していない場合は 1 次降伏点を最大変形点と見なす。反対側のスケルトンカーブに至るとその曲線上を移動する。除荷過程で再載荷された場合は除荷と同じ勾配の直線上で動く。

入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

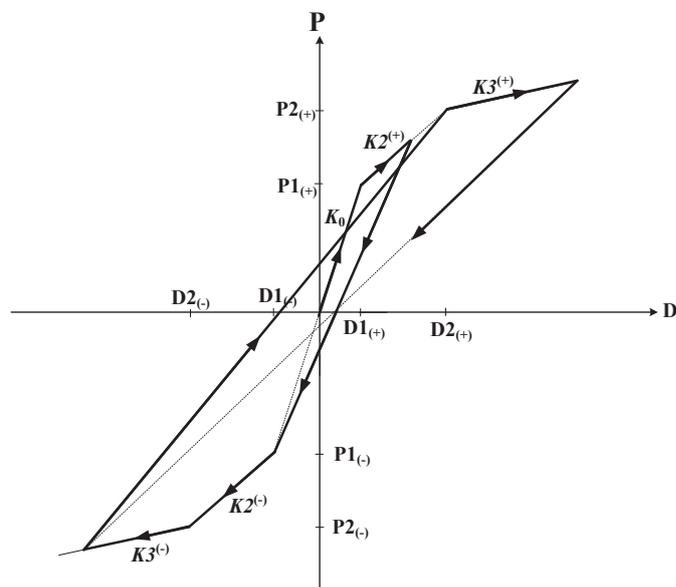


図 9.3.15 最大点指向型の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第2剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第3剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

$\alpha1^{(+)}, \alpha1^{(-)}$: (+),(-)側第1降伏後の剛性低下率

$\alpha2^{(+)}, \alpha2^{(-)}$: (+),(-)側第2降伏後の剛性低下率

(7) CLOUGH 型

A. 履歴の概要

スケルトンカーブはバイリニアで、降伏後の変形の進展により除荷剛性が漸進的に減少するディグレイディングバイリニア型である。入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

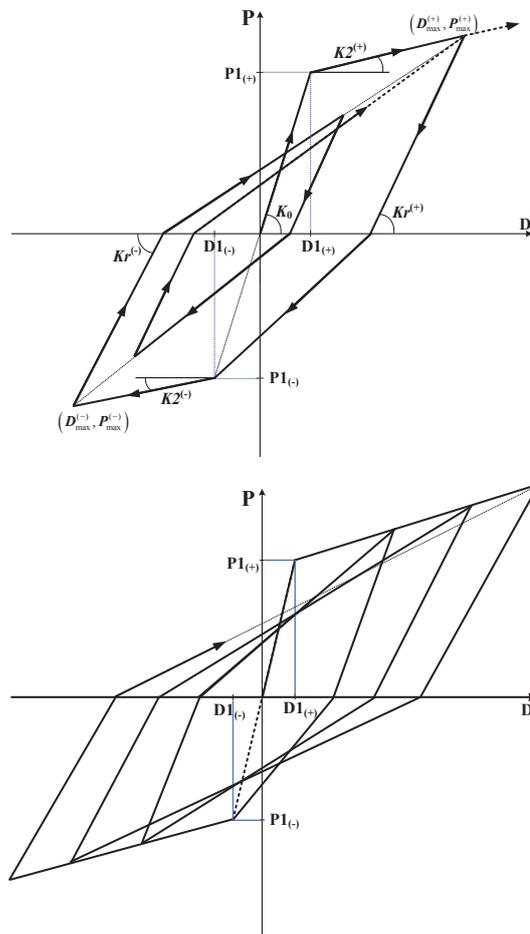


図 9.3.16 CLOUGH 型の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第2剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$\alpha1^{(+)}, \alpha1^{(-)}$: (+),(-)側第1降伏後の剛性低下率

$Kr^{(+)}, Kr^{(-)}$: (+),(-)側除荷時の剛性

$$Kr^{(+)} = K_0 \cdot \left| \frac{D1^{(+)}}{D_{\max}^{(+)}} \right|^{\beta} \leq K_0, \quad Kr^{(-)} = K_0 \cdot \left| \frac{D1^{(-)}}{D_{\max}^{(-)}} \right|^{\beta} \leq K_0$$

ここで、

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側降伏変形

$D_{\max}^{(+)}, D_{\max}^{(-)}$: (+),(-)側の最大変形

β : 除荷剛性算定用定数

C. CLOUGH 型の履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D1$ の場合は線形弾性で、原点を通る弾性勾配 K_0 の直線上で移動する (Rule: 0)。
- 2) D がはじめて $D1_{(\pm)}$ を超えた場合、また、これまでの最大変形点を超えた場合は、第2勾配 $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 直線上を進む (Rule: 1)。
- 3) $D1_{(+)} < D, D < D1_{(-)}$ の状態で除荷を受けた場合は、復元力が 0 になるまでは、除荷剛性 $Kr^{(+)}, Kr^{(-)}$ の勾配で移動する (Rule: 2)。
- 4) 復元力が 0 になる前に再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き (Rule: 3)、スケルトンカーブに至ると $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む (Rule: 4)。
- 5) 除荷曲線が復元力 0 点を超えた場合、最大変位点を目指して移動する。まだ降伏していない場合は、降伏点を最大変形点と見なす (Rule: 5)。
- 6) 最大変位点を目指して進み、スケルトンカーブに至ると $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む (Rule: 6)。
- 7) 最大変形点を指向する直線上で、スケルトンカーブに至る前に除荷を受けた場合は復元力が 0 になるまでは除荷剛性 $Kr^{(-)}, Kr^{(+)}$ の勾配で移動する (Rule: 7)。
- 8) その後は 3)~7) のルールで動く。

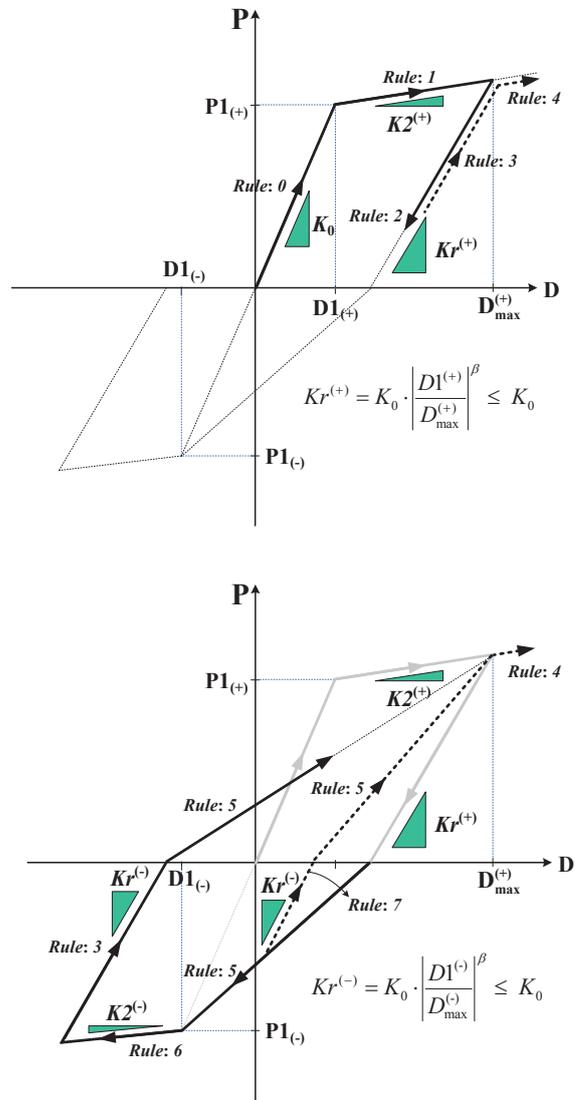


図 9.3.17 CLOUGH 型の履歴ルール

(8) 深田型(Degrading Tri-Linear)

A. 履歴の概要

スケルトンカーブはトリニアで、1次降伏後2次降伏する前はバイリニアで挙動し、2次降伏後は変形の進展により除荷剛性が漸進的に減少するデグレイディングトリニア型で挙動ある。入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

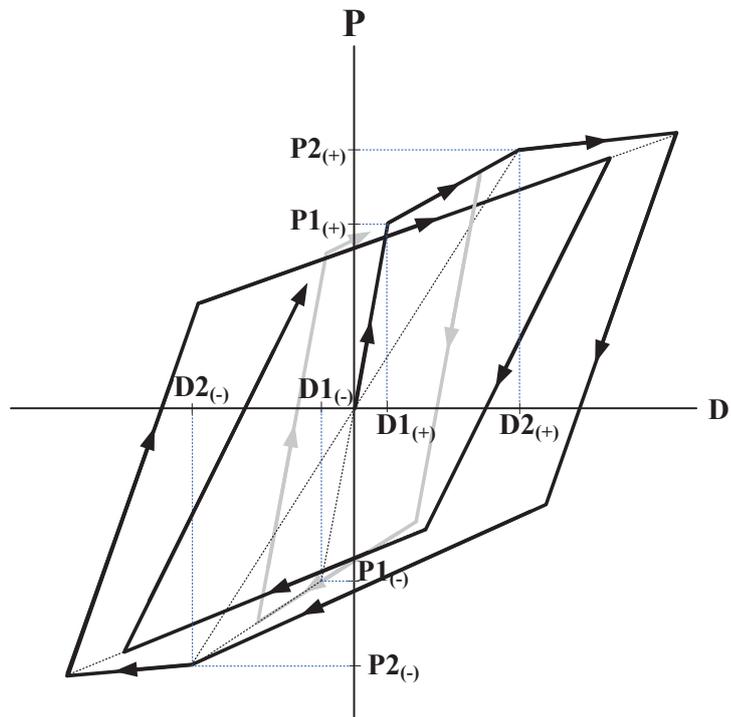


図 9.3.18 深田型の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第2剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第3剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

$\alpha1^{(+)}, \alpha1^{(-)}$: (+),(-)側第1降伏後の剛性低下率

$\alpha2^{(+)}, \alpha2^{(-)}$: (+),(-)側第2降伏後の剛性低下率

C. 深田型の履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D1$ の場合は線形弾性で、原点を通る弾性勾配 K_0 の直線上で移動する (Rule: 0)。
- 2) D がはじめて $D1_{(\pm)}$ を超えた場合は、第2勾配 $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 直線上を進む (Rule: 1)。この状態で除荷を受けた場合は弾性勾配 K_0 の直線上で移動し (Rule: 2)、2次降伏する前はバイリニアで挙動する。
- 3) i) D がはじめて $D2_{(\pm)}$ を超えた場合、また、これまでの最大変形点を超えた場合は第3勾配 $K3^{(+)}, K3^{(-)}$ 直線上で移動する (Rule: 3)。はじめて降伏した場合は、反対側の第2次降伏点反対側の最大変形点になる。
ii) この直線上で、除荷を受けて反対方向に進む場合は勾配 $Kr1$ で進む (Rule: 4)。

$$Kr1 = \left(\frac{P_{\max}^{(+)} - P_{\max}^{(-)}}{D_{\max}^{(+)} - D_{\max}^{(-)}} \cdot \frac{1}{K1} \right) \cdot K_0 = \alpha \cdot K_0, \quad K1 = \frac{P2_{(+)} - P2_{(-)}}{D2_{(+)} - D2_{(-)}}$$

ここで、

K_0 : 初期剛性

$K1$; 第2折れ点までの等価剛性

$$\alpha \cdot K1 = \frac{P_{\max}^{(+)} - P_{\max}^{(-)}}{D_{\max}^{(+)} - D_{\max}^{(-)}}$$

- iii) 折れ点に至る前に再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き、スケルトンカーブに至ると $K3^{(+)}, K3^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む (Rule: 5)。

- iv) 除荷曲線が折れ点を超えた場合は、 $Kr2^{(\mp)}$ 勾配で反対側の最大変形点を目指して移動する (Rule: 6)。

$$Kr2^{(\mp)} = \alpha \cdot K2^{(\mp)}$$

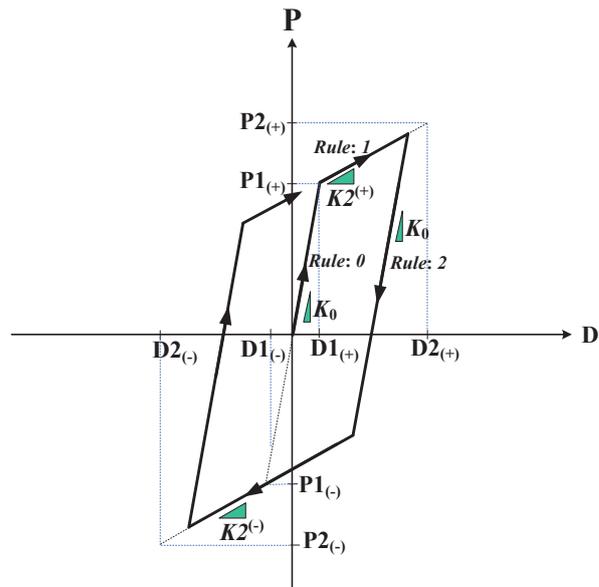


図 9.3.19 深田型の履歴ルール(1)

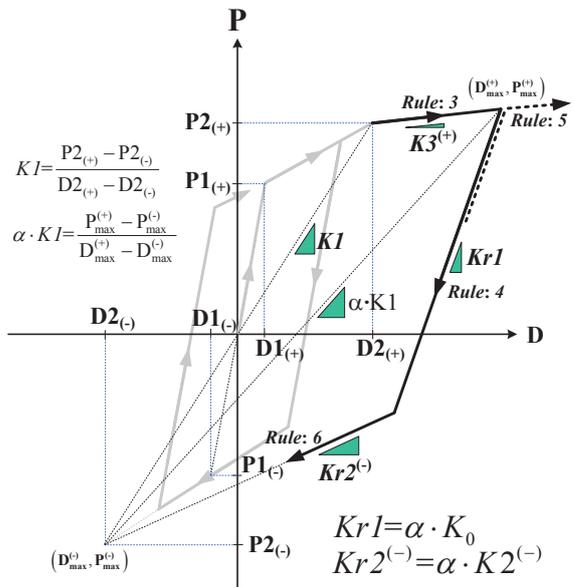


図 9.3.20 深田型の履歴ルール(2)

- v) 最大変位点を目指して進み、スケルトンカーブに至ると $K3^{(+)}$, $K3^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む(Rule: 7)。
 - vi) 最大変形点を指向する直線上で、スケルトンカーブに至る前に除荷を受けた場合は反対側の折れ点までは勾配 $Kr1$ で進み(Rule: 8)、折れ曲がって勾配 $Kr2^{(+)}$ で反対側の最大変形点を目指す(Rule: 9)。
 - vii) この直線上で除荷を受けた場合は、勾配 $Kr1$ を骨格とするバイリニアで挙動する(Rule: 10,11)。
- 4) その後は 3v)~vii)のルールで動く。

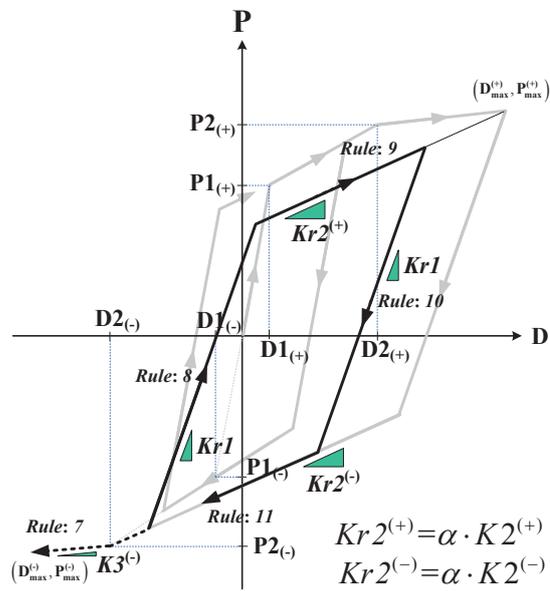


図 9.3.21 深田型の履歴ルール(3)

(9) オリジナル武田型/トリリニア

A. 履歴の概要

オリジナル武田型は 剛性低減トリリニアで、入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

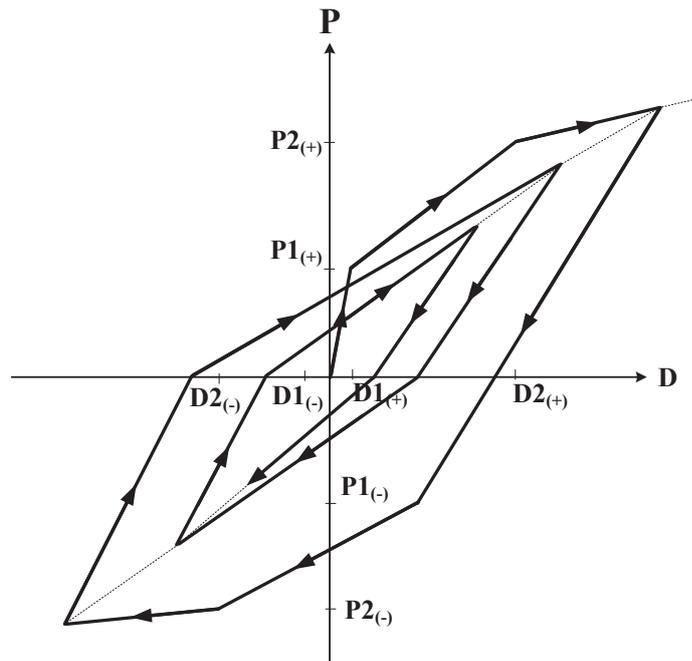


図 9.3.22 オリジナル武田型/トリリニアの履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第 2 剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第 3 剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

β : 除荷剛性パラメータ

α : 内部ループ反復時の剛性低減率

C. オリジナル武田型の履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D1$ の場合は線形弾性で、原点を通る弾性勾配 K_0 の直線上で移動する (Rule: 0)。
- 2) i) D がはじめて $D1_{(\pm)}$ を超えた場合、第 2 勾配 $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 直線を進む (Rule: 1)。はじめて降伏した場合は、反対側の第 1 降伏点が反対側の最大変形点になる。
ii) この直線上で、除荷を受けた場合は、反対側の最大変形点を目指して移動する (Rule: 2)。
iii) 反対側の最大変形点に至る前に再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き (Rule: 3)、スケルトンカーブに至ると $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 勾配で骨格直線を進む (Rule: 4)。
iv) 反対側の最大変形点に至ると $K2^{(-)}, K2^{(+)}$ 勾配で骨格直線を進む (Rule: 5)。
v) この骨格直線上で除荷を受けた場合、復元力が 0 になるまでは、反対側の第 1 降伏点を目指す直線上で動き (Rule: 6)、また再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き (Rule: 7)、スケルトンカーブに至ると $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 勾配で骨格直線を進む (Rule: 8)。
vi) 反対側の第 1 降伏点を目指す直線上で移動して復元力が 0 を超えてからは反対側の最大変形点を目指して進み (Rule: 9)、最大変形点に至ると $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 勾配で骨格直線を進む (Rule: 10)。

- vii) 反対側の最大変形点を目指す直線上で、除荷を受けた場合は反対側の最大変形点からの除荷剛性で戻り(*Rule: 11*)、復元力 0 点を超えると反対側の最大点を目指す(*Rule: 12*)。
- viii) 反対側の最大点に至る前に、再除荷を受けた場合は内部ループに入る。第 2 降伏を経験する前($|D_{\max}| < D2$)に内部ループに入ると、(+側)は(-側)の除荷剛性で、(-側)は(+側)の除荷剛性で戻り(*Rule: 11*)、復元力 0 点を超えると反対側の最大点を目指す(*Rule: 12*)ループを描きながら動く。

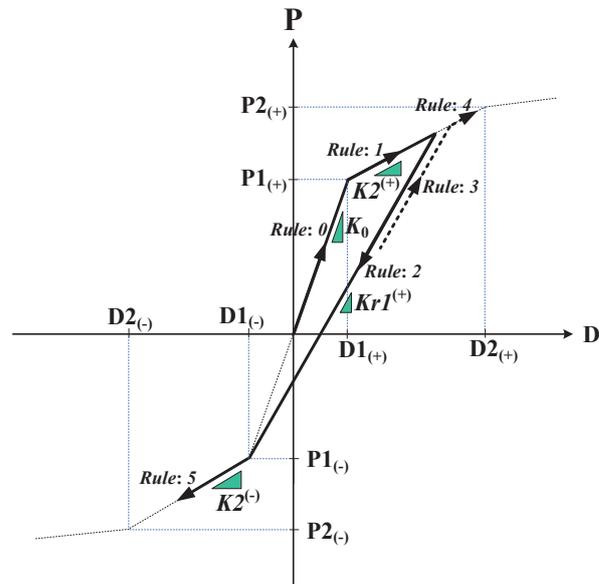


図 9.3.23 オリジナル武田型/トリリニアの履歴ルール(1)

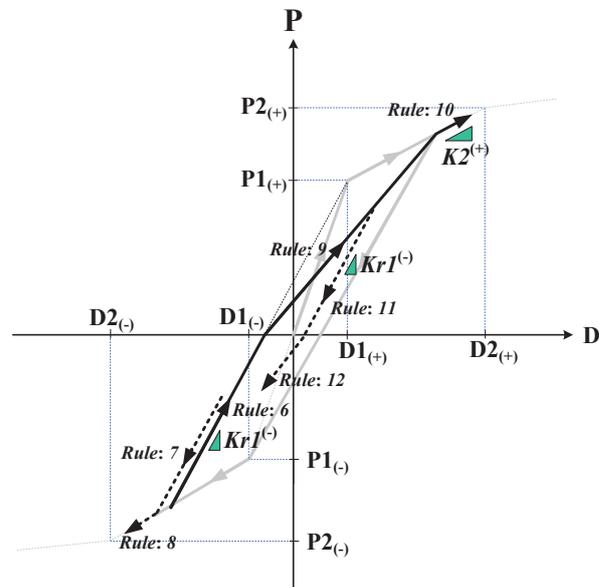


図 9.3.24 オリジナル武田型/トリリニアの履歴ルール(2)

3) i) D がはじめて $D2_{(\pm)}$ を超えた場合、第 3 勾配 $K3^{(+)}$, $K3^{(-)}$ 直線上を進む (Rule: 13)。

ii) この直線上で、除荷を受けた場合は、除荷点から勾配 $Kr^{(+)}$, $Kr^{(-)}$ で移動する (Rule: 14)。

また、この状態で再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き (Rule: 15)、スケルトンカーブに至ると $K3^{(+)}$, $K3^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む (Rule: 16)。

$$Kr^{(+)} = K_b^{(+)} * \left| \frac{D_{\max}^{(+)}}{D2^{(+)}} \right|^{-\beta}, \quad Kr^{(-)} = K_b^{(-)} * \left| \frac{D_{\max}^{(-)}}{D2^{(-)}} \right|^{-\beta}$$

ここで、

$$K_b^{(+)} = \frac{P2_{(+)} - P1_{(-)}}{D2_{(+)} - D1_{(-)}} \quad K_b^{(-)} = \frac{P2_{(-)} - P1_{(+)}}{D2_{(-)} - D1_{(+)}}$$

β : 除荷剛性パラメータ ($\beta = 0.4, \text{Default}$)

iii) 反対側の最大変形点が $D1_{(\pm)}$ を超えてない場合は勾配 $Kr^{(\pm)}$ 範囲は反対側の $P1$ までとする (Rule: 17)。さらにこの $P1$ を超えた場合は第 2 降伏点を目指し (Rule: 18)、スケルトンカーブに至ると $K3^{(+)}$, $K3^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む (Rule: 19)。

iv) 反対側の最大変形点を目指す直線上で、除荷された場合は $K_{un}^{(-)}$, $K_{un}^{(+)}$ の勾配上で動き(Rule: 20)、復元力 0 点を超えると、反対側の直前除荷点を目指す直線上で動く(Rule: 21)。

$$K_{un}^{(+)} = \alpha \cdot Kr^{(+)}, \quad K_{un}^{(-)} = \alpha \cdot Kr^{(-)}$$

ここで、 α : 内部ループ反復時の剛性低減率

v) 反対側の最大点に至る前に、再除荷を受けた場合は内部ループに入る。第 2 降伏を経験後 ($|D_{\max}| > D2$) に内部ループに入ると、 $K_{un}^{(+)}$, $K_{un}^{(-)}$ の勾配で戻り (Rule:22)、復元力 0 点を超えると反対側の直前除荷点を目指す (Rule: 23)。

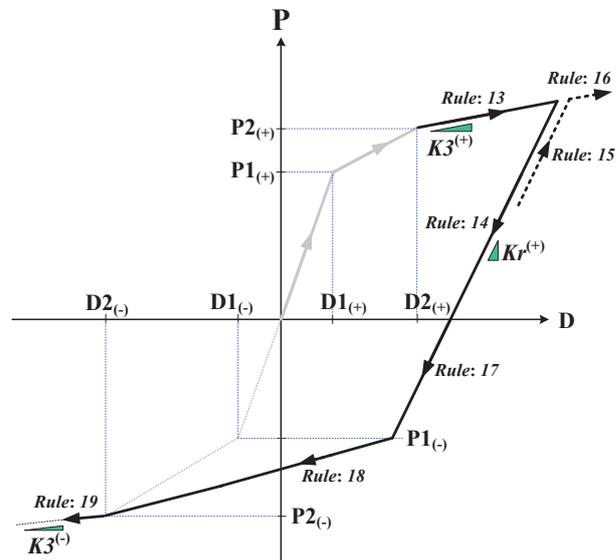


図 9.3.25 オリジナル武田型/トリリアの履歴ルール(3)

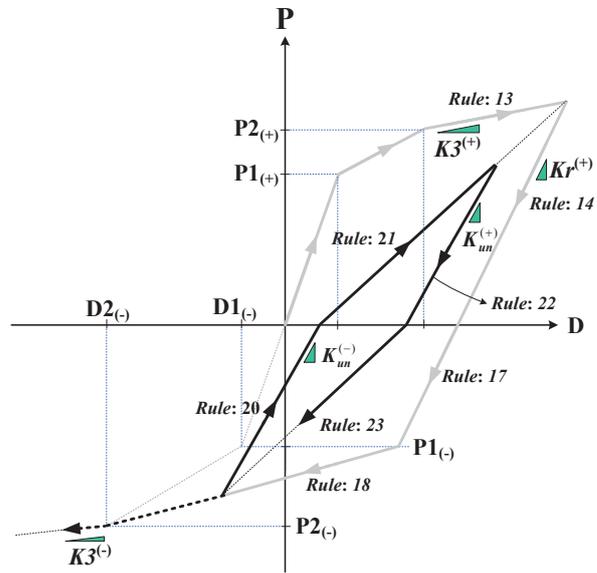


図 9.3.26 オリジナル武田型/トリリニアの履歴ルール(4)

- 4) i) 一方が第 2 降伏点を超え、反対側は第 1 降伏後、第 2 降伏前の場合に、第 2 降伏を経験した側から除荷を受けた場合は $K_r^{(+)}$, $K_r^{(-)}$ の勾配上で動き、復元力 0 点を超えると、次のルールで移動する。
- $K_x > K_y$ の場合は、勾配 K_x で最大変形点を目指す。
 - $K_x < K_y$ の場合は、勾配 K_y で第 2 降伏点を目指す。

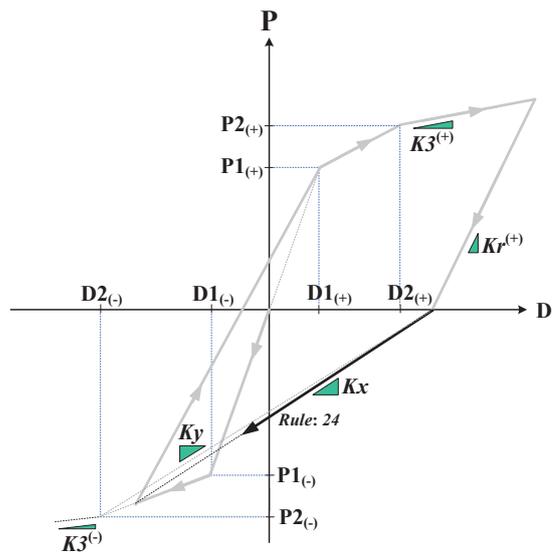


図 9.3.27 オリジナル武田型/トリリニアの履歴ルール(5)

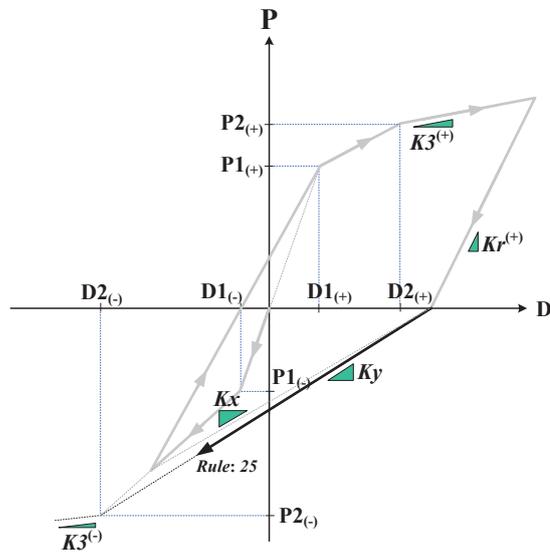


図 9.3.28 オリジナル武田型/トリリニアの履歴ルール(6)

- ii) この直線上で、除荷を受けた場合は $K_{un}^{(+)}$, $K_{un}^{(-)}$ の勾配上で動き (Rule: 26)、復元力 0 点を超えると、反対側の直前除荷点を指す直線上で動く (Rule: 27)。
- iii) 反対側の最大点に至る前に、再除荷を受けた場合は内部ループに入る。第 2 降伏を経験後 ($|D_{max}| > D2$) に内部ループに入ると、 $K_{un}^{(+)}$, $K_{un}^{(-)}$ の勾配で戻り (Rule: 28)、復元力 0 点を超えると反対側の直前除荷点を指す (Rule: 29)。

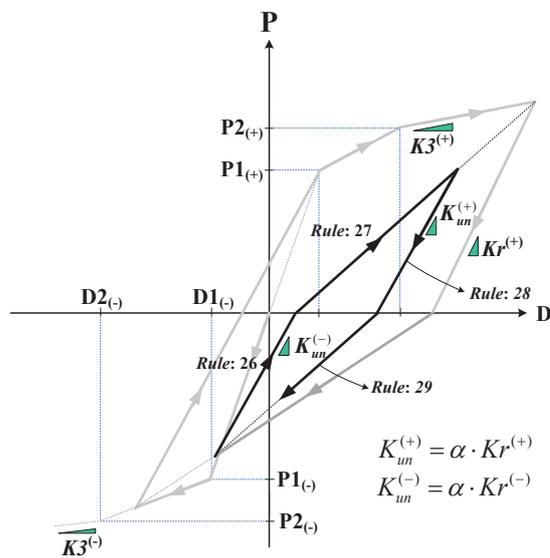


図 9.3.29 オリジナル武田型/トリリニアの履歴ルール(7)

(10) オリジナル武田型/テトラリニア

A. 履歴の概要

オリジナル武田型/テトラリニアは 剛性低減テトラリニアで、入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。第3折点後の勾配率は、負勾配で処理する。

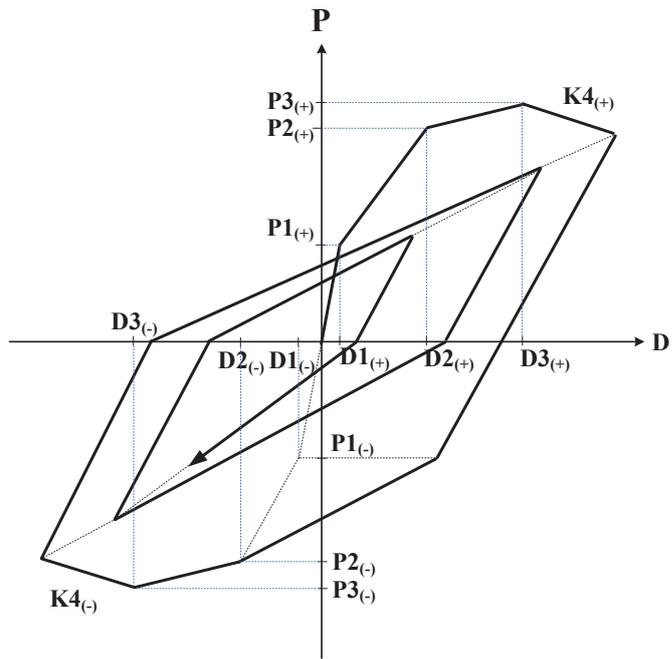


図 9.3.30 オリジナル武田型/テトラリニアの履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏強度

$P3_{(+)}, P3_{(-)}$: (+),(-)側第 3 降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏変形

$D3_{(+)}, D3_{(-)}$: (+),(-)側第 3 降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第 2 剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第 3 剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

$K4^{(+)}, K4^{(-)}$: (+),(-)側第 4 剛性。但し、 $K4^{(+)} = \alpha3^{(+)} \cdot K_0$, $K4^{(-)} = \alpha3^{(-)} \cdot K_0$

$$(K4^{(+)} < 0.0, K4^{(-)} < 0.0)$$

β : 除荷剛性パラメータ

α : 内部ループ反復時の剛性低減率

C. オリジナル武田型/テトラリニアの履歴ルール

- 1) 初期載荷時はテトラリニアスケルトンカーブ上で移動する。
- 2) 変形 D が $D3_{(\pm)}$ を超える前の履歴ルールは、オリジナル武田型トリニアと全く同じである。
 - i) D がはじめて $D3_{(\pm)}$ を超えた場合、第 4 勾配 $K4^{(+)}, K4^{(-)}$ 直線上を進む(*Rule: 1*)。
 - ii) この直線上で、除荷を受けた場合は、除荷点から勾配 $Kr^{(+)}, Kr^{(-)}$ で移動する(*Rule: 2*)。また、この状態で再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き(*Rule: 3*)、スケルトンカーブに至ると $K4^{(+)}, K4^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む(*Rule: 4*)。

$$Kr^{(+)} = K_b^{(+)} * \left| \frac{D_{\max}^{(+)}}{D2^{(+)}} \right|^{-\beta}, \quad Kr^{(-)} = K_b^{(-)} * \left| \frac{D_{\max}^{(-)}}{D2^{(-)}} \right|^{-\beta}$$

ここで、

$$K_b^{(+)} = \frac{P2_{(+)} - P1_{(-)}}{D2_{(+)} - D1_{(-)}} \quad K_b^{(-)} = \frac{P2_{(-)} - P1_{(+)}}{D2_{(-)} - D1_{(+)}}$$

β : 除荷剛性パラメータ ($\beta = 0.4, \text{Default}$)

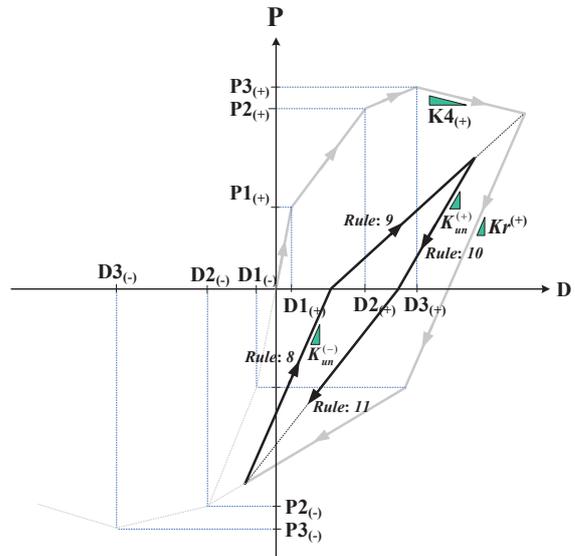


図 9.3.32 オリジナル武田型/テトラニアの履歴ルール(2)

vi) $K4^{(+)}$, $K4^{(-)}$ の負勾配に入り、復元力が 0 になる点を超えた場合、変形軸(D 軸)上で動く。また、戻りは直前の復元力が 0 になった点までは、 D 軸上で戻り、その後は通常のルールで移動する。

(11) 修正武田型トリリニア

A. 履歴の概要

修正武田型は 剛性低減トリリニアで、入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

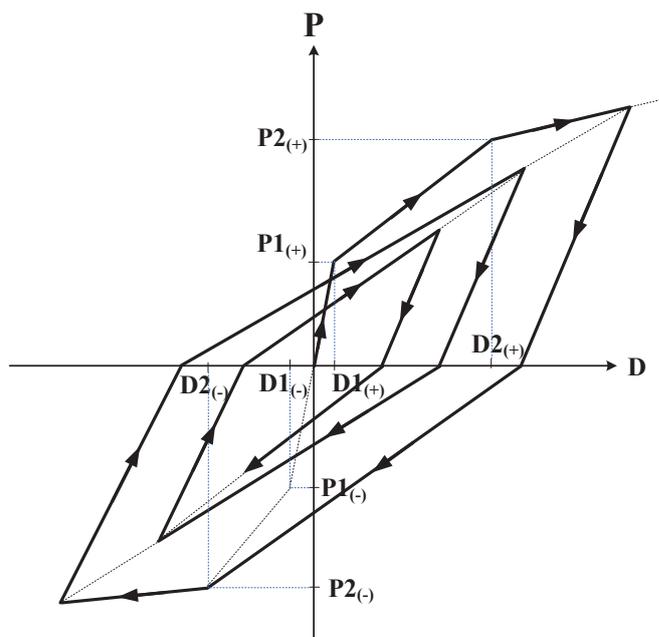


図 9.3.33 修正武田型トリリニアの履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第 2 剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第 3 剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

β : 除荷剛性パラメータ

C. 修正武田型の履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D1$ の場合は線形弾性で、原点を通る弾性勾配 K_0 の直線上で移動する (Rule: 0)。
- 2) i) D がはじめて $D1_{(\pm)}$ を超えた場合、第 2 勾配 $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 直線上を進む (Rule: 1)。はじめて降伏した場合は、反対側の第 1 降伏点が反対側の最大変形点になる。
- ii) この直線上で、除荷を受けた場合は除荷点から復元力が 0 になるまでは勾配 $Kr^{(+)}, Kr^{(-)}$ で移動する (Rule: 2)。復元力 0 点を越える前に再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き (Rule: 3)、スケルトンカーブに至ると $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む (Rule: 4)。

$$Kr^{(\pm)} = \max \left(K_0 * \left| \frac{D_{\max}^{(\pm)}}{D1^{(\pm)}} \right|^{-\beta}, K_b \right)$$

ここで、

$$K_b = \frac{P_{\max}^{(+)} - P_{\max}^{(-)}}{D_{\max}^{(+)} - D_{\max}^{(-)}}$$

β : 除荷剛性パラメータ ($\beta = 0.4, \text{Default}$)

- iii) 復元力 0 点を越えると反対側の最大変形点を目指して移動する (Rule: 5)。
- iv) 反対側の最大変形点を目指す直線上で、除荷を受けた場合は 内部ループに入る。内部ループでは、復元力 0 点までは $Kr^{(+)}, Kr^{(-)}$ の勾配で戻り (Rule: 6,8)、復元力 0 点を越えると反対側の最大点を目指す (Rule: 7,9) ループを描きながら動く。

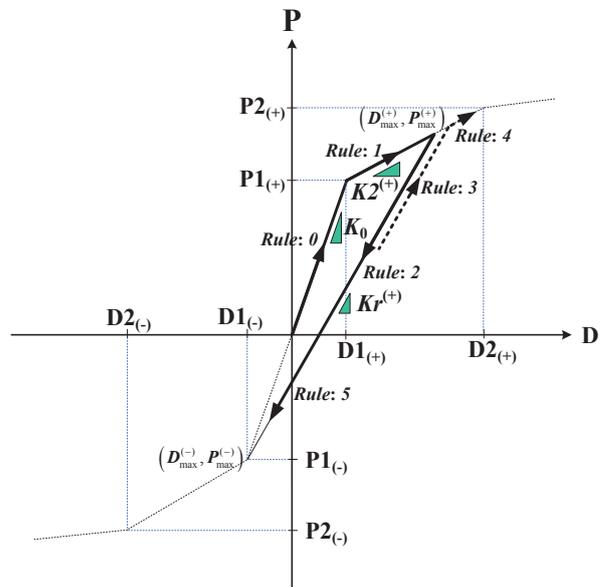


図 9.3.34 修正武田型/トリリニアの履歴ルール(1)

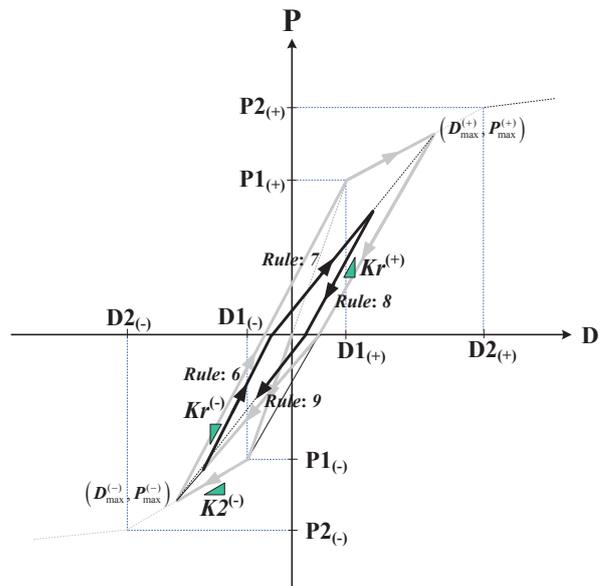


図 9.3.35 修正武田型/トリリニアの履歴ルール(2)

- 3) i) D がはじめて $D2_{(\pm)}$ を超えた場合、第 3 勾配 $K3^{(+)}$, $K3^{(-)}$ 直線上を進む (Rule:10)。

- ii) この直線上で、除荷を受けた場合は、除荷点から勾配 $Kr^{(+)}$, $Kr^{(-)}$ で移動する (Rule:11)。
 また、この状態で再载荷された場合は同じ除荷直線上で動き (Rule:12)、スケルトンカーブに至ると $K3^{(+)}$, $K3^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む (Rule:13)。
- 反対側が第 2 降伏を経験していない場合は、反対側の第 2 降伏点が反対側の最大変形点になる。
- iii) 復元力 0 点を超えると、反対側の最大変形点を目指す直線上で動く (Rule:14)。
- iv) 反対側の最大変形点を目指す直線上で、除荷を受けた場合は 内部ループに入る。内部ループでは、復元力 0 点までは $Kr^{(-)}$, $Kr^{(+)}$ の勾配で戻り (Rule:15,17)、復元力 0 点を超えると反対側の最大点を目指す (Rule:16,18) ループを描きながら動く。
- v) 最大点に至ると骨格直線上を進む (Rule:19,20)。

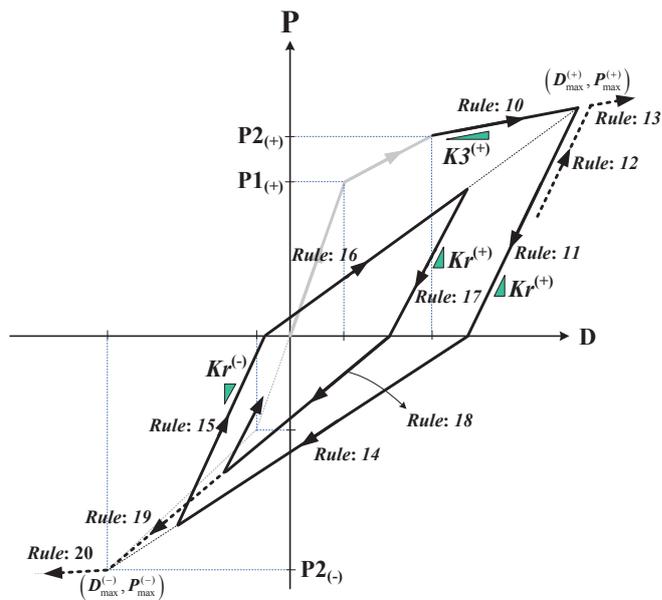


図 9.3.36 修正武田型/トリリニアの履歴ルール(3)

(12) 修正武田型/テトラリニア

A. 履歴の概要

修正武田型テトラリニア履歴は、入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

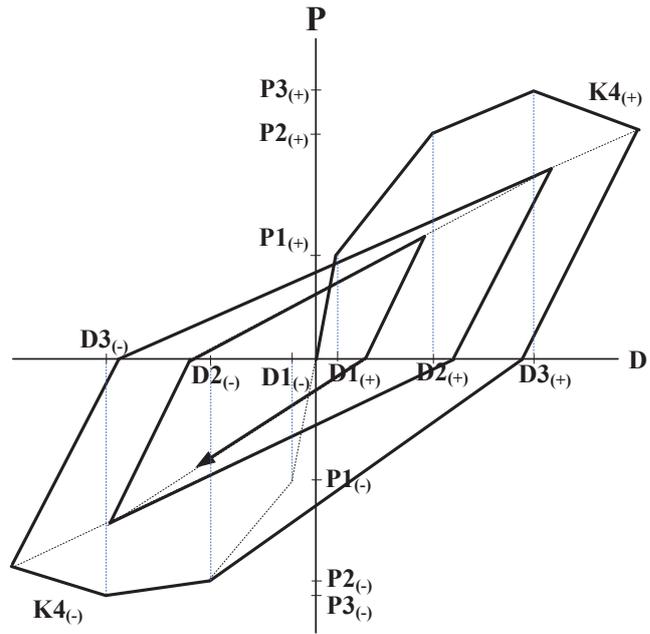


図 9.3.37 修正武田型/テトラリニアの履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏強度

$P3_{(+)}, P3_{(-)}$: (+),(-)側第3降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏変形

$D3_{(+)}, D3_{(-)}$: (+),(-)側第3降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第2剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第3剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

$K4^{(+)}, K4^{(-)}$: (+),(-)側第4剛性。但し、 $K4^{(+)} = \alpha3^{(+)} \cdot K_0$, $K4^{(-)} = \alpha3^{(-)} \cdot K_0$

($K4^{(+)} < 0.0$, $K4^{(-)} < 0.0$)

β : 除荷剛性パラメータ

C. 修正武田型/テトラリニアの履歴ルール

- 1) 初期載荷時はテトラリニアスケルトンカーブ上で移動する。
- 2) 変形 D が $D3_{(\pm)}$ を超える前の履歴ルールは、修正武田型トリリニアと全く同じである。
- 3) i) D がはじめて $D3_{(\pm)}$ を超えた場合、第4勾配 $K4^{(+)}, K4^{(-)}$ 直線上を進む(*Rule: 1*)。
 - ii) この直線上で、除荷を受けた場合は、除荷点から勾配 $Kr^{(+)}, Kr^{(-)}$ で移動する(*Rule: 2*)。また、この状態で再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き(*Rule: 3*)、スケルトンカーブに至ると $K4^{(+)}, K4^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む(*Rule: 4*)。

$$Kr^{(\pm)} = \max \left(K_0 * \left| \frac{D_{\max}^{(\pm)}}{D1^{(\pm)}} \right|^{-\beta}, K_b \right)$$

ここで、

$$K_b = \frac{P_{\max}^{(+)} - P_{\max}^{(-)}}{D_{\max}^{(+)} - D_{\max}^{(-)}}$$

β : 除荷剛性パラメータ ($\beta = 0.4, \text{Default}$)

- iii) 復元力 0 点を超えると反対側の直前除荷点を目指す直線上で動き(*Rule: 5*)、スケルトンカーブに至ると骨格直線上を進む(*Rule: 6*)。ただし、反対側が第2降

伏を経験していない場合は、反対側の第2降伏点が反対側の最大変形点になる。
 iv) 反対側の最大変形点を目指す直線上で、除荷を受けた場合は 内部ループに入る。内部ループでは、復元力 0 点までは $K_r^{(-)}$, $K_r^{(+)}$ の勾配で戻り(**Rule: 7,9**)、復元力 0 点を超えると反対側の最大点を目指す(**Rule: 8,10**)ループを描きながら動く。

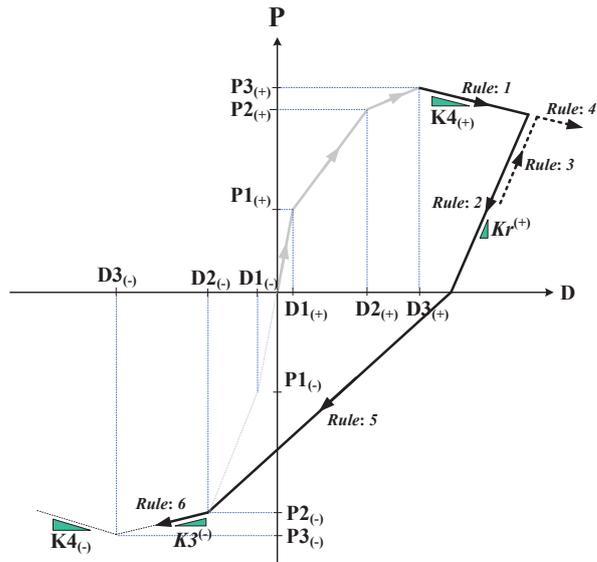


図 9.3.38 修正武田型/テトラリアニアの履歴ルール(1)

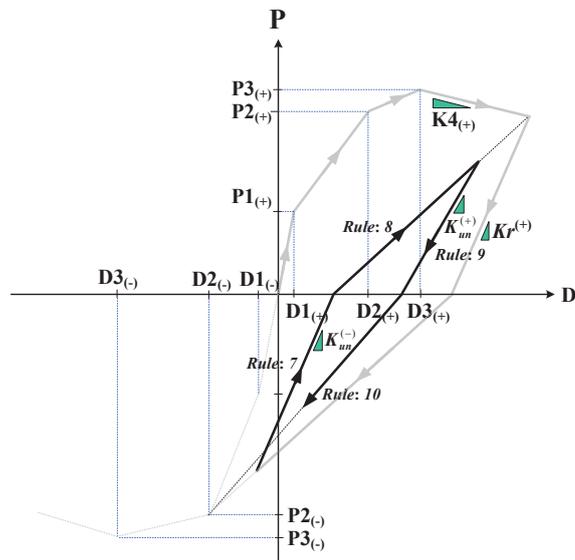


図 9.3.39 修正武田型/テトラリアニアの履歴ルール(2)

v) $K4^{(+)}$, $K4^{(-)}$ の負勾配に入り、復元力が 0 になる点を超えた場合、変形軸(D 軸)上で動き、また、戻りは直前の復元力が 0 になった点までは、 D 軸上で戻り、その後は通常のルールで移動する。

(13) 非線形弾性型/バイリニア

A. 履歴の概要

本履歴モデルは、非線形弾性でスケルトンカーブはバイリニア型である。載荷と除荷に関係なくループを描かないタイプで、バイリニアスケルトンカーブ上で行き来する。入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

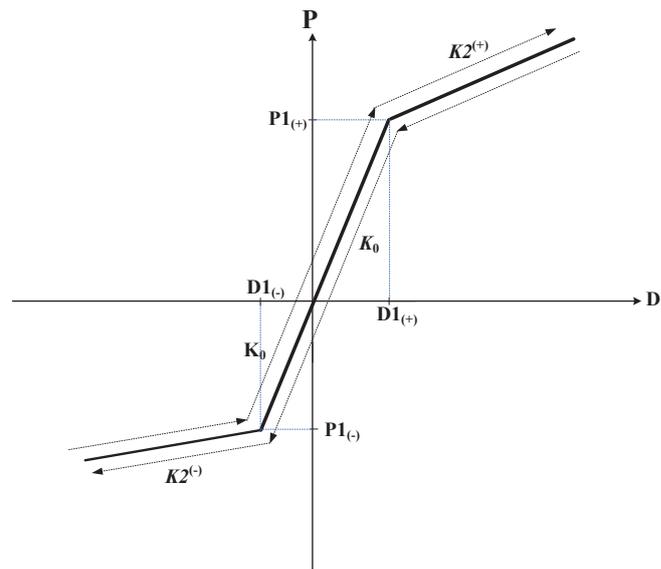


図 9.3.40 非線形弾性/バイリニア型の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+), (-)側第1降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+), (-)側第1降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+), (-)側第2剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$\alpha1^{(+)}, \alpha1^{(-)}$: (+), (-)側第1降伏後の剛性低下率

(14) 非線形弾性型トリリニア

A. 履歴の概要

本履歴モデルは、非線形弾性でスケルトンカーブはトリリニア型である。載荷と除荷に関係なくループを描かないタイプで、トリリニアスケルトンカーブ上で行き来する。入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。

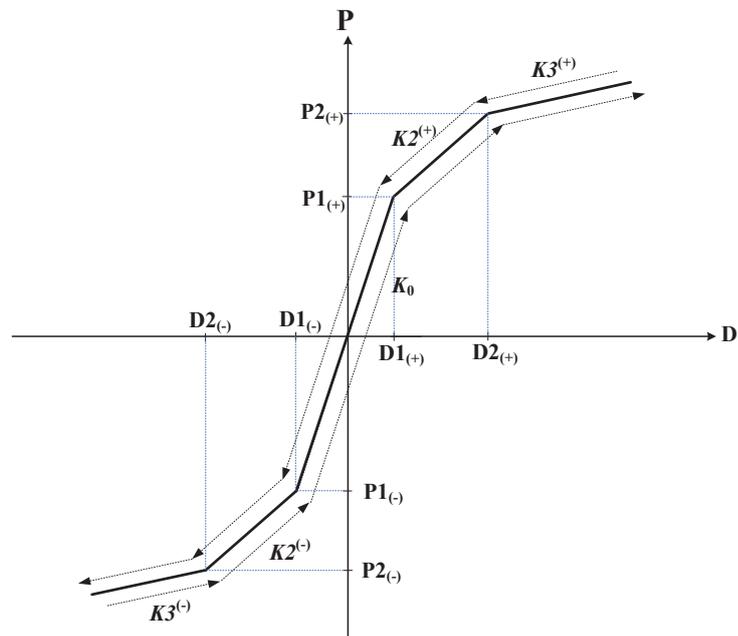


図 9.3.41 非線形弾性型トリリニア型の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第1降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第2降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第2剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第3剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

$\alpha1^{(+)}, \alpha1^{(-)}$: (+),(-)側第1降伏後の剛性低下率

$\alpha2^{(+)}, \alpha2^{(-)}$: (+),(-)側第2降伏後の剛性低下率

(15) 非線形弾性型/テトラリニア

A. 履歴の概要

本履歴モデルは、非線形弾性でスケルトンカーブはテトラリニア型である。載荷と除荷に関係なくループを描かないタイプで、テトラリニアスケルトンカーブ上で行き来する。入力によって対称あるいは非対称が定義できる。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。第3折点後の勾配率は、負勾配で処理する。

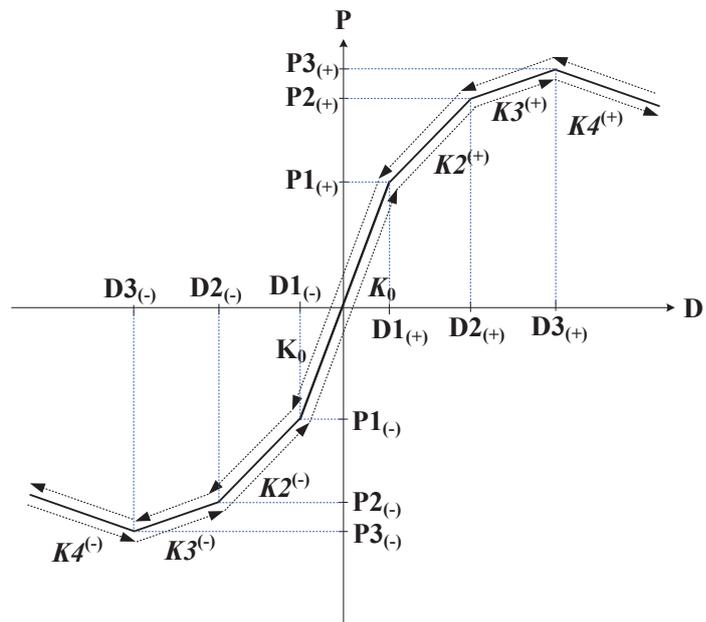


図 9.3.42 非線形弾性/トリリニア型の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏強度

$P3_{(+)}, P3_{(-)}$: (+),(-)側第 3 降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏変形

$D3_{(+)}, D3_{(-)}$: (+),(-)側第 3 降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第 2 剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第 3 剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

$K4^{(+)}, K4^{(-)}$: (+),(-)側第 4 剛性。但し、 $K4^{(+)} = \alpha3^{(+)} \cdot K_0$, $K4^{(-)} = \alpha3^{(-)} \cdot K_0$

($K4^{(+)} < 0.0$, $K4^{(-)} < 0.0$)

$\alpha1^{(+)}, \alpha1^{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏後の剛性低下率

$\alpha2^{(+)}, \alpha2^{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏後の剛性低下率

$\alpha3^{(+)}, \alpha3^{(-)}$: (+),(-)側第 3 降伏後の剛性低下率

C. 非線形弾性/テトラリニア型の履歴ルール

- 1) 荷重と除荷に関係なくループを描かずに、テトラリニア・スケルトンカーブ上で移動する。
- 2) 負勾配に入り、復元力が 0.0 となる点を超えた場合、変形軸(D 軸)の上で動く。また、戻りは通常のルールで動き、反対側でも同じく、0.0 となる点を超えた場合、変形軸(D 軸)の上で動く。

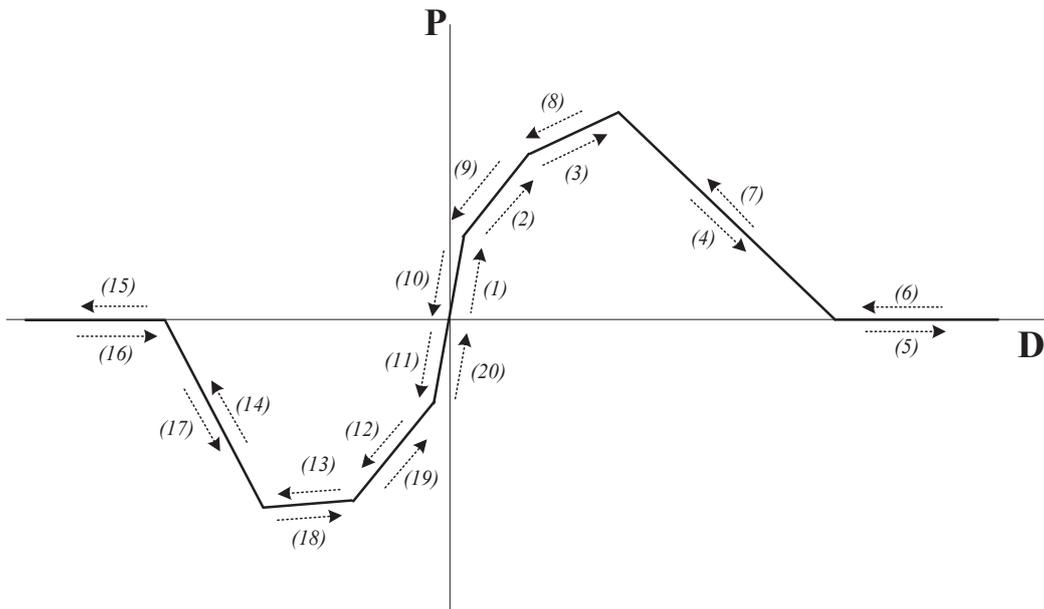
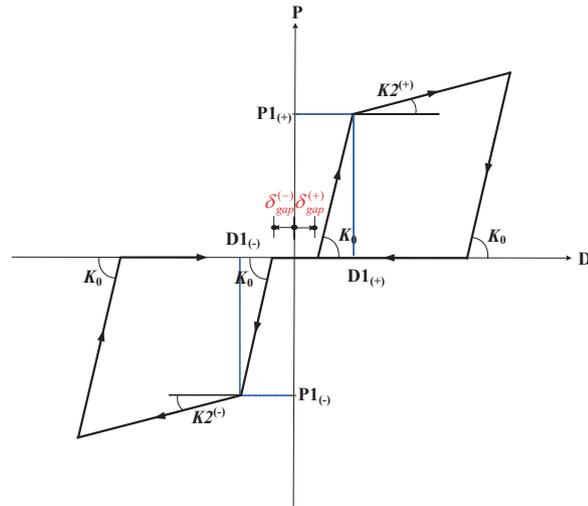


図 9.3.43 非線形弾性/テトラリニア型の履歴ルール

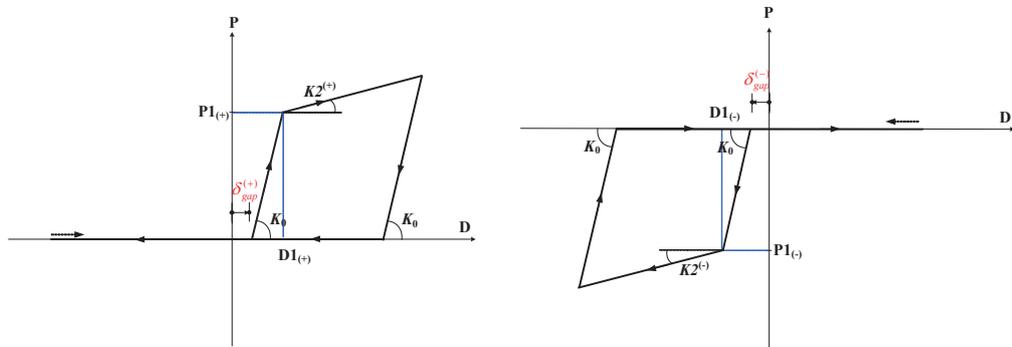
(16) スリップ型/バイリニア

A. 履歴の概要

スケルトンカーブはバイリニアで、入力によって対称あるいは非対称が定義できて、さらに初期ギャップの定義が可能である。対応要素は、材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。



(a) 標準型



(b) 引張のみ

(c) 圧縮のみ

図 9.3.44 スリップ型/バイリニア(初期ギャップあり)の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+), (-)側第1降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+), (-)側第1降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+), (-)側第2剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$\alpha 1^{(+)}, \alpha 1^{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏後の剛性低下率

$\delta_{gap}^{(+)}, \delta_{gap}^{(-)}$: (+),(-)側の初期ギャップ

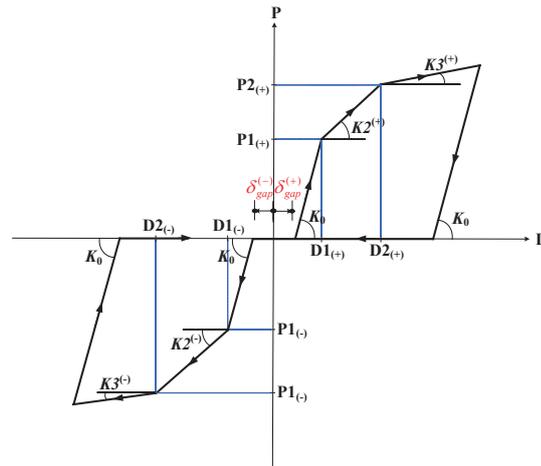
C. スリップ型トリリニアの履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D1$ の場合は線形弾性で、弾性勾配 K_0 の直線上で移動する(Rule: 0)。
- 2) D がはじめて $D1_{(\pm)}$ を超えた場合は第 2 勾配 $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 直線上を進む(Rule: 1,7)。
- 3) この直線上で、除荷を受けた場合、復元力が 0 になるまでは、弾性勾配 K_0 で移動する(Rule: 2)。
- 4) 復元力が 0 になる前に再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き(Rule: 3)、スケルトンカーブに至ると $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む(Rule: 4)。
- 5) 除荷曲線が復元力 0 点に至ると、原点までは変形軸(D 軸)上で動く(Rule: 5)。さらに除荷され原点 を超えると弾性勾配 K_0 の直線上で移動する(Rule: 6)。
- 6) スケルトンカーブ上で、除荷を受けると弾性勾配 K_0 で移動する(Rule: 8)。
- 7) 以降、 D が $B < D < A$ の範囲では変形軸(D 軸)上で動く(Rule: 9)。また、 A 点或いは B を超えると弾性勾配 K_0 の直線上で移動し(Rule:10)、スケルトンカーブに至ると骨格直線上を進む(Rule:11)。
- 8) その後は 3)~7)のルールで動く。

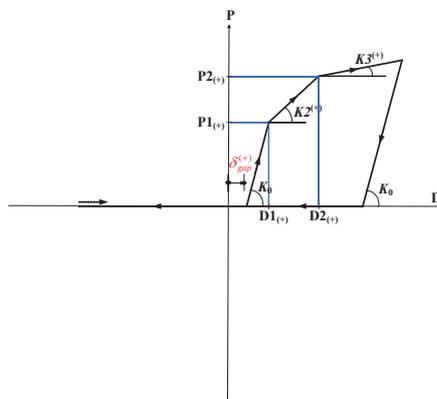
(17) スリップ型トリリニア

A. 履歴の概要

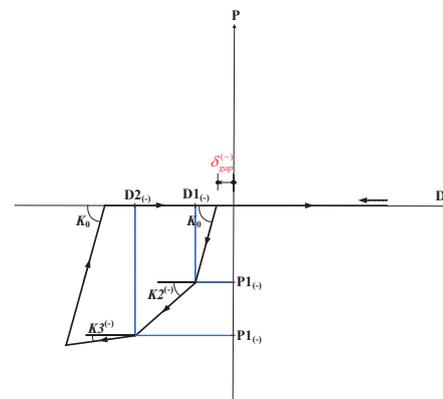
スケルトンカーブはトリリニアで、入力によって対称あるいは非対称が定義できて、さらに初期ギャップの定義が可能である。対応要素は材端バネ付きビーム要素、ビーム要素、バネ要素、トラス要素である。



(a) 標準型



(b) 引張のみ



(c) 圧縮のみ

図 9.3.44 スリップ型トリリニア(初期ギャップあり)の履歴曲線

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

$P1_{(+)}, P1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏強度

$P2_{(+)}, P2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏強度

$D1_{(+)}, D1_{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏変形

$D2_{(+)}, D2_{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏変形

K_0 : 初期剛性

$K2^{(+)}, K2^{(-)}$: (+),(-)側第 2 剛性。但し、 $K2^{(+)} = \alpha1^{(+)} \cdot K_0$, $K2^{(-)} = \alpha1^{(-)} \cdot K_0$

$K3^{(+)}, K3^{(-)}$: (+),(-)側第 3 剛性。但し、 $K3^{(+)} = \alpha2^{(+)} \cdot K_0$, $K3^{(-)} = \alpha2^{(-)} \cdot K_0$

$\alpha1^{(+)}, \alpha1^{(-)}$: (+),(-)側第 1 降伏後の剛性低下率

$\alpha2^{(+)}, \alpha2^{(-)}$: (+),(-)側第 2 降伏後の剛性低下率

$\delta_{gap}^{(+)}, \delta_{gap}^{(-)}$: (+),(-)側の初期キャップ

C. スリップ型トリリニアの履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D1$ の場合は線形弾性で、弾性勾配 K_0 の直線上で移動する(Rule: 0)。
- 2) D がはじめて $D1_{(\pm)}$ を超えた場合は第 2 勾配 $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 直線上を進む(Rule: 1,7)。
- 3) この直線上で、除荷を受けた場合、復元力が 0 になるまでは、弾性勾配 K_0 で移動する(Rule: 2)。
- 4) 復元力が 0 になる前に再載荷された場合は同じ除荷直線上で動き(Rule: 3)、スケルトンカーブに至ると $K2^{(+)}, K2^{(-)}$ 勾配で骨格直線上を進む(Rule: 4)。
- 5) 除荷曲線が復元力 0 点に至ると、原点までは変形軸(D 軸)上で動く(Rule: 5)。さらに除荷され原点 を超えると弾性勾配 K_0 の直線上で移動する(Rule: 6)。
- 6) スケルトンカーブ上で、 D がはじめて $D2_{(\pm)}$ を超えた場合は第 3 勾配 $K3^{(+)}, K3^{(-)}$ 直線上を進み(Rule: 8,12)、除荷を受けると弾性勾配 K_0 で移動する(Rule: 9)。
- 7) 以降、 D が $B < D < A$ の範囲では変形軸(D 軸)上で動く(Rule:10)。また、 A 点或いは B を超えると弾性勾配 K_0 の直線上で移動し(Rule:11)、スケルトンカーブに至ると骨格直線上を進む(Rule:12)。
- 8) その後は 3)~7)のルールで動く。

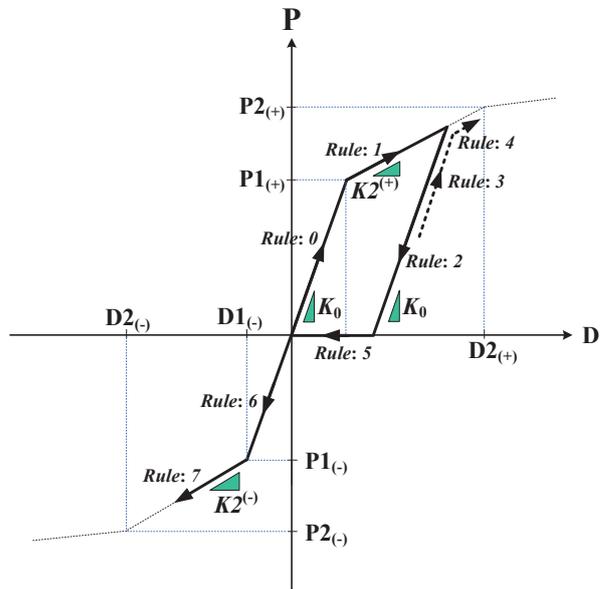


図 9.3.45 スリップ型トリリニア(初期ギャップあり)の履歴ルール(1)

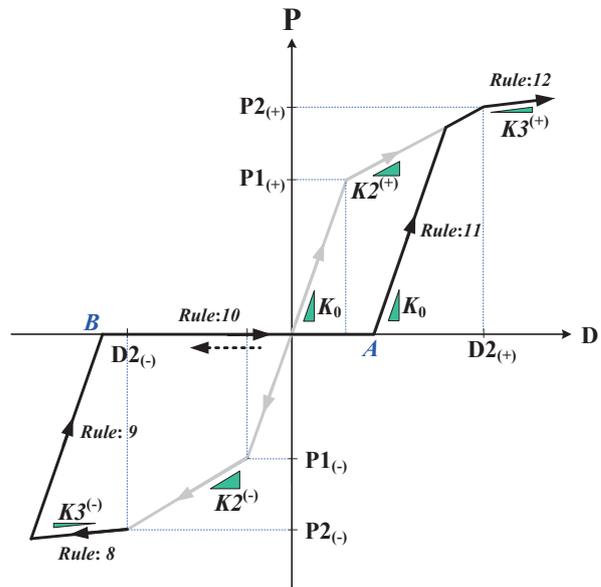


図 9.3.46 スリップ型トリリニア(初期ギャップあり)の履歴ルール(2)

(18) Ramberg-Osgood Type

A. 履歴の概要

Ramberg-Osgood 履歴モデルは金属材料の非線形解析のために提案されたもので、履歴曲線は Masing 法則に従います。地盤非線形の Ramberg-Osgood モデルのスケルトンカーブと履歴曲線は以下のように表現される。

$$\text{スケルトンカーブ} : \gamma = \frac{\tau}{G_0} \left(1 + \alpha |\tau|^\beta \right)$$

$$\text{履歴曲線} : \frac{\gamma \pm \gamma_0}{2} = \frac{\tau \pm \tau_0}{2G_0} \left(1 + \alpha \left| \frac{\tau \pm \tau_0}{2} \right|^\beta \right)$$

$$\beta = \frac{2\pi h_{\max}}{2 - \pi h_{\max}}, \quad \alpha = \left(\frac{2}{\gamma_r G_0} \right)^\beta$$

ここで、

γ	: せん断ひずみ,
τ	: せん断応力
G_0	: せん断弾性係数
γ_r	: 基準せん断ひずみ
α, β	: Ramberg-Osgoodモデルのパラメータ

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

- G_0 : 初期剛性(せん断弾性係数)
 γ_r : 基準せん断ひずみ
 h_{\max} : 最大減衰定数

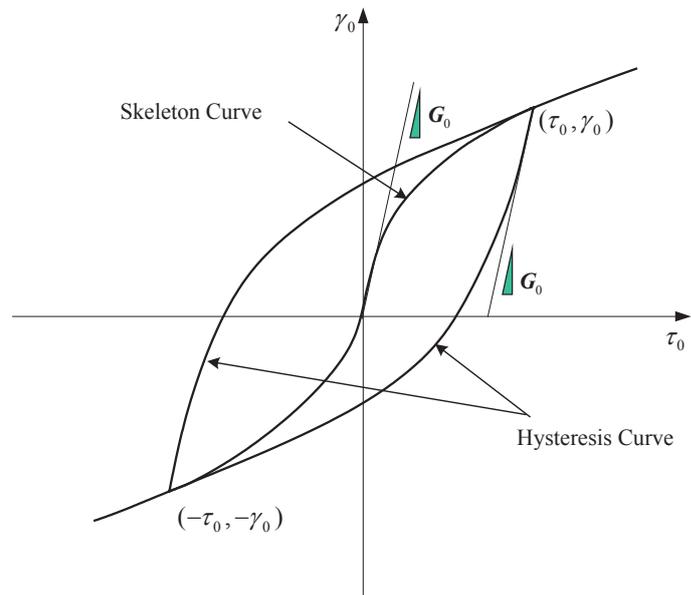


図 9.3.47 Ramberg-Osgood 履歴モデル

(19) Hardin-Drnevich Type

A. 履歴の概要

Hardin-Drnevich モデルの履歴曲線は土の静的な応力-ひずみ関係で主に使用される双曲線モデルをそのままスケルトンカーブとして使用する。

$$\text{スケルトンカーブ} : \tau = \frac{G_0 \cdot \gamma}{1 + |\gamma/\gamma_r|}$$

$$\text{履歴曲線: } \tau - \tau_m = \frac{G_0(\gamma - \gamma_m)}{1 + |\gamma - \gamma_m|/2\gamma_r} \text{ (下降曲線)}$$

$$\tau + \tau_m = \frac{G_0(\gamma + \gamma_m)}{1 + |\gamma + \gamma_m|/2\gamma_r} \text{ (上昇曲線)}$$

ここで、

γ	: せん断ひずみ
τ	: せん断応力
G_0	: せん断弾性係数
γ_r	: 基準せん断ひずみ
(γ_m, τ_m)	: 履歴曲線上の反転点

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下の値で定義される。

- G_0 : 初期剛性(せん断弾性係数)
 γ_r : 基準せん断ひずみ

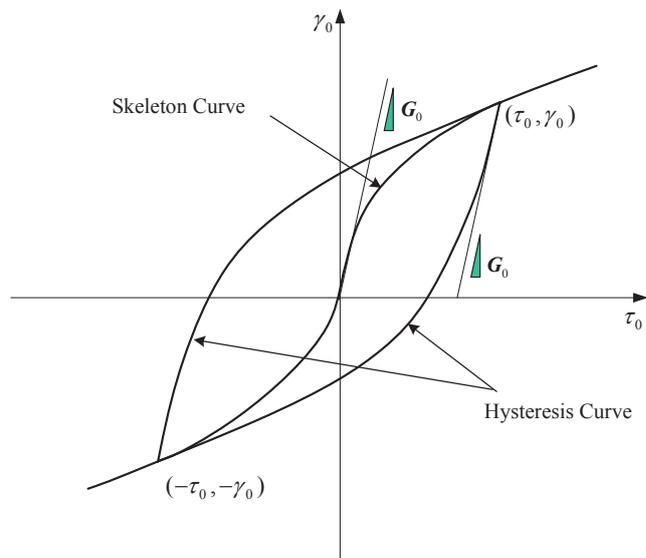


図 9.3.48 Hardin-Drnevich 履歴モデル

(20) マルチリニア-弾性

A. 履歴の概要

マルチリニア-弾性型は非線形弾性型でスケルトンカーブの力と変位の関係はマルチリニア曲線で定義される。載荷と除荷時に履歴ループを書かず、スケルトンカーブ上でのみ移動する。スケルトンカーブは対称と非対称の両方の定義ができ、使用できる要素には集中型ヒンジ(M- θ モデル)と分布型ヒンジ(M- ϕ モデル)、バネ要素、トラス要素がある。

B. スケルトンカーブの定義

■ カー変位関係

スケルトンカーブは使用者が指定した力と変位の関係で定義される。カー変位関係は以下の規則に基づく。

- カー変位関係のデータ数には制限がない。
- 初期値は“0, 0”で、必ず定義する必要がある。
- 変位は同じ値を重複設定できず、入力したデータは変位の大きさ順で整列される。
- ペアとなる力と変位は符号を同じくする。
- カー変位関係は最終値以外には負の勾配を許さない。したがって、力は最終値以外には(+)側で漸増増加する形で入力し、(-)側で漸増減少する形で入力する。

C. マルチリニア-弾性型の履歴ルール

- 1) マルチリニア-弾性型の履歴ルールは弾性テトラリニア型と同様である。

(21) マルチリニア-塑性移動硬化

A. 履歴の概要

マルチリニア-塑性移動硬化型はマルチリニアのスケルトンカーブ上で移動硬化規則に沿って挙動する。スケルトンカーブは対称と非対称の両方の定義ができ、使用できる要素には集中型ヒンジ(M- θ モデル)と分布型ヒンジ(M- φ モデル)、バネ要素、トラス要素がある。

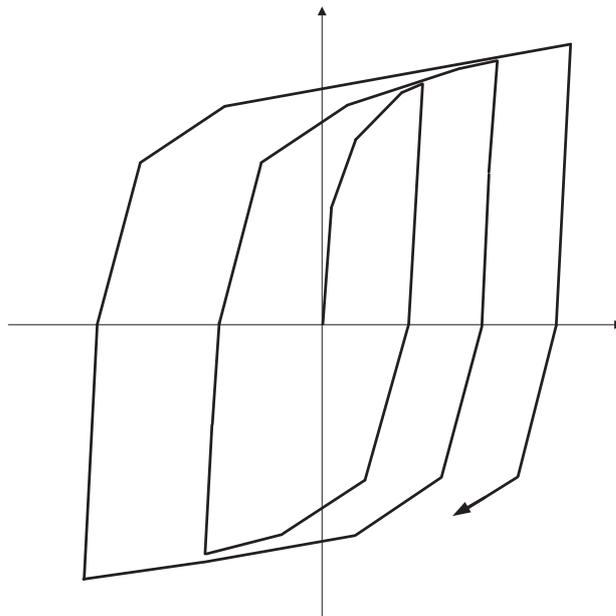


図 9.3.49 マルチリニア-塑性移動硬化型の履歴モデル

B. スケルトンカーブの定義

■ カー変位関係

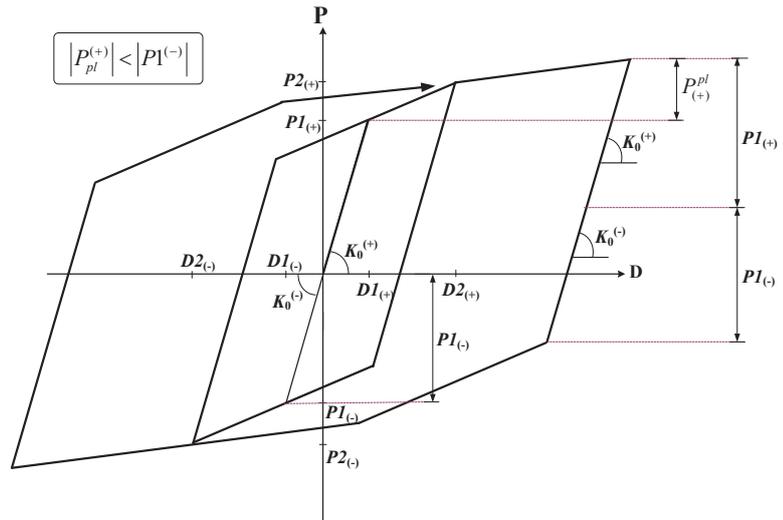
スケルトンカーブは使用者が指定した力と変位の関係で定義される。カー変位関係は以下の規則に基づく。

- カー変位関係のデータ数には制限がない。
- (+)側と(-)側の両方とも最低 1 個以上のデータを定義し、(+)側と(-)側のデータ数は同じで無ければならない。
- 初期値は“0, 0”で、必ず定義する必要がある。
- 変位は同じ値を重複設定できず、入力したデータは変位の大きさ順で整列される。
- ペアとなる力と変位は符号を同じくする。

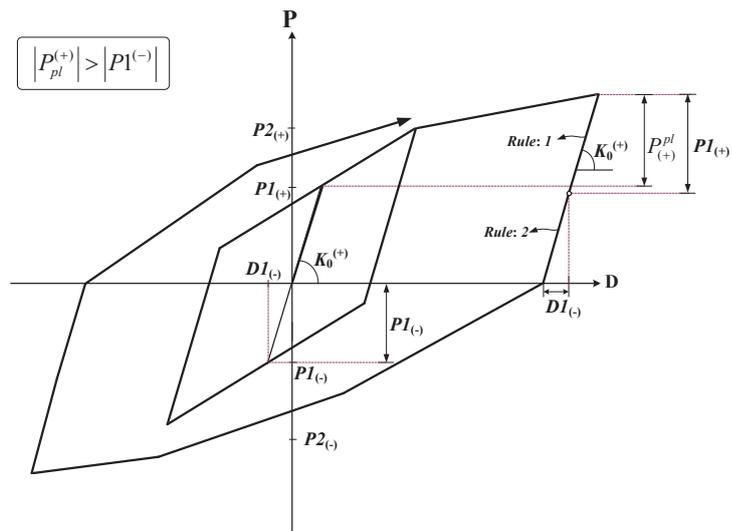
- カ-変位関係は負の勾配を許さない。したがって、力は(+側)で漸増増加する形で入力し、(-側)で漸増減少する形で入力する。

C. マルチリニア-塑性移動硬化型の履歴ルール

- 1) $|P_{pl}^{(\pm)}| < |P1^{(\mp)}|$ の場合は通常の移動硬化則に基づいて挙動する。



- 2) $|P_{pl}^{(\pm)}| > |P1^{(\mp)}|$ の場合はスケルトンカーブ上で除荷時に除荷側の 1 次降伏耐力 (P1(+)) 又は P1(-)) だけ除荷された後(Rule:1)、復元力が 0 となる点までは反対側の 1 次降伏変形(D1(-)) 又は D1(+)) だけ除荷される点に向かって移動する(Rule:2)。復元力が 0 を超えると移動硬化則に基づいて挙動する。



(22) マルチリニア-塑性武田

A. 履歴の概要

マルチリニア-塑性武田型の履歴は剛性低減のマルチリニア型モデルである。スケルトンカーブは対称と非対称の両方の定義ができ、使用できる要素には集中型ヒンジ(M- θ モデル)と分布型ヒンジ(M- ϕ モデル)、バネ要素、トラス要素がある。

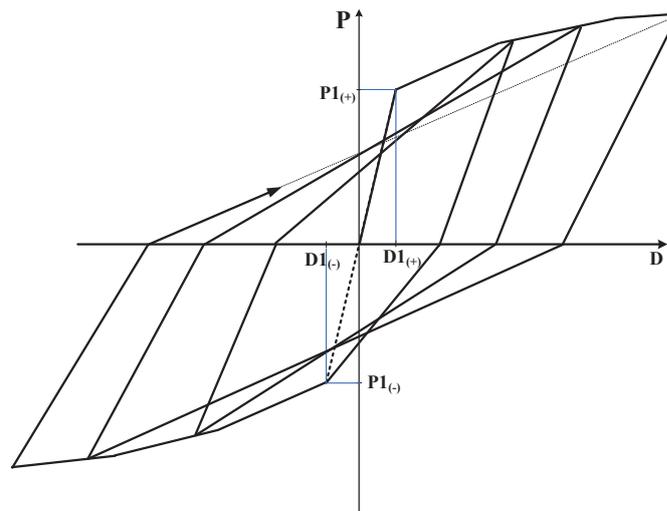


図 9.3.50 マルチリニア-塑性武田型の履歴モデル

B. スケルトンカーブの定義

■ カー変位関係

スケルトンカーブは使用者が指定した力と変位の関係で定義される。カー変位関係は以下の規則に基づく。

- カー変位関係のデータ数には制限がない。
- (+)側と(-)側の両方とも最低 1 個以上のデータを定義し、(+)側と(-)側のデータ数は同じで無ければならない。
- 初期値は“0, 0”で、必ず定義する必要がある。
- 変位は同じ値を重複設定できず、入力したデータは変位の大きさ順で整列される。
- ペアとなる力と変位は符号を同じくする。
- カー変位関係は負の勾配を許さない。したがって、力は(+)側で漸増増加する形で入力し、(-)側で漸増減少する形で入力する。

■ 除荷剛性パラメータ : β

(+)側と(-)側の除荷(unloading)時の剛性、は以下のように算定される。但し、の場合の除荷剛性は弾性剛性になる。

$$Kr^{(+)} = K_0 \cdot \left| \frac{D1^{(+)}}{D_{\max}^{(+)}} \right|^{\beta} \leq K_0$$

$$Kr^{(-)} = K_0 \cdot \left| \frac{D1^{(-)}}{D_{\max}^{(-)}} \right|^{\beta} \leq K_0$$

ここで、 $D1^{(+)}, D1^{(-)}$: (+), (-)側の降伏変形

$D_{\max}^{(+)}, D_{\max}^{(-)}$: (+), (-)側の最大変形

(降伏が発生しない領域では降伏変位に代替)

β : 除荷剛性算定用の定数($0 \leq \beta \leq 1$)

C. マルチリニア-塑性武田型の履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D1$ の場合は線形弾性で、原点を通る弾性勾配の直線上で移動する。
- 2) 変形 D が初めて $D1_{(\pm)}$ を超える場合、又は現在までの最大変形点を超える場合はスケルトンカーブ上を移動する。
- 3) $D1_{(+)} < D$, $D < D1_{(-)}$ の状態で除荷される場合、除荷剛性 $Kr^{(+)}$, $Kr^{(-)}$ の勾配で移動する。
- 4) 除荷過程で荷重の符号が変わると、反対側の最大変形点に向かって移動し、反対側が降伏しない場合は降伏点が最大変形点になる。

(23) マルチリニア-塑性ピボット

A. 履歴の概要

マルチリニア-塑性ピボット型の履歴(以下、Pivot 履歴)は R. K. Dowell, F. Seible & E. L. Wilson (1998) が提案した剛性低減のマルチリニア型モデルである。Pivot 履歴は鉄筋コンクリート部材の応力-ひずみ関係、又はモーメント-回転角関係の非線形性を複数の Pivot Point で制御し、除荷(Unloading)時の剛性低減(Stiffness Degrading)とピッチング効果を正確に表現できるモデルである。

スケルトンカーブは対称と非対称の両方の定義ができ、使用できる要素には集中型ヒンジ(M- θ モデル)と分布型ヒンジ(M- ϕ モデル)、バネ要素、トラス要素がある。

B. スケルトンカーブの定義

履歴モデルの非線形特性は以下のように定義する。

■ カー変位関係

スケルトンカーブは使用者が指定した力と変位の関係で定義される。カー変位関係は以下の規則に基づく。

- カー変位関係のデータ数には制限がない。
- (+)側と(-)側の両方とも最低 1 個以上のデータを定義する。
- 初期値は“0, 0”で、必ず定義する必要がある。
- 変位は同じ値を重複設定できず、入力したデータは変位の大きさ順で整列される。
- ペアとなる力と変位は符号を同じくする。
- カー変位関係は最終値以外には負の勾配を許さない。したがって、力は最終値以外には(+)側で漸増増加する形で入力し、(-)側で漸増減少する形で入力する。

■ Primary Pivot Point

Primary Pivot Point P1, P3 は Q1, Q3 領域で除荷時の指向点を表し、変形又は変位の増加による除荷剛性の低減を制御する。P1, P3 は (+), (-)側の初期剛性の延長線上に位置し、降伏強度 $F_y(+)$, $F_y(-)$ と増減係数 α_1 , α_2 で定義される。

α_1 : Q1 側で除荷時の指向点 P1 点の定義用の増減係数 ($\alpha_1 \geq 1$)

α_2 : Q3 側で除荷時の指向点 P3 点の定義用の増減係数 ($\alpha_2 \geq 1$)

降伏以後の Primary Pivot Point P1, P3 の位置は初期剛性軟化係数 η によって最大変形点が更新される度に P1*, P3* に移動する。但し、 $\eta=0$ の場合、P1, P3 の位置は移動しない。

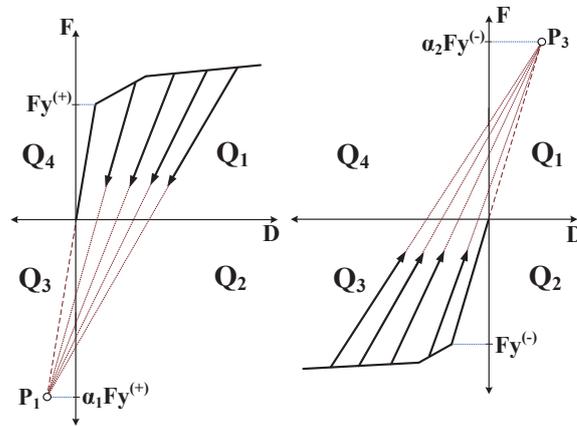


図 9.3.51 Primary Pivot Point

■ Pinching Pivot Point

Pinching Pivot Point PP2, PP4 は Q1, Q3 領域で除荷され復元力 0 点を越えた後の指向点を表す。PP2, PP4 は (+), (-)側の弾性領域のスケルトンカーブ上に位置し、初期剛性の降伏強度 $Fy(+)$, $Fy(-)$ と増減係数 β_1 , β_2 によって定義される。

- β_1 : Q2 側で除荷時の指向点 PP2 点の定義用の増減係数 ($0 < \beta_1 \leq 1$)
- β_2 : Q4 側で除荷時の指向点 PP4 点の定義用の増減係数 ($0 < \beta_2 \leq 1$)

降伏以後の Pinching Pivot Point PP2, PP4 の位置は初期剛性軟化係数 η によって最大変形点が更新される度に PP2*, PP4* に移動する。但し、 $\eta=0$ の場合、PP2, PP4 の位置は移動しない。

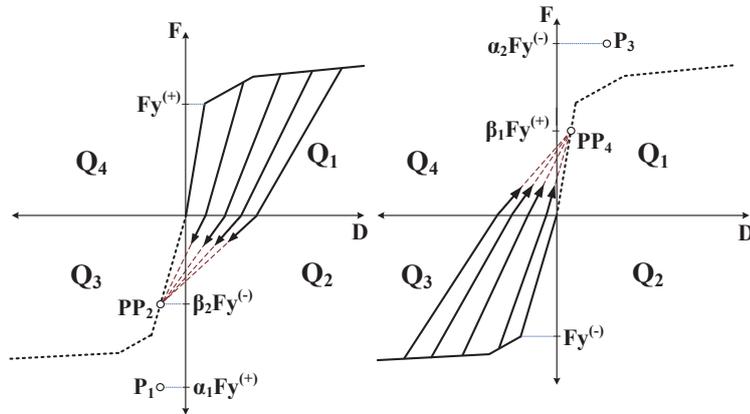


図 9.3.52 Pinching Pivot Point

■ 初期剛性軟化係数: η

η は降伏以後の初期剛性の低減を制御する係数である。降伏以後、Primary Pivot Point P1, P3 は(+), (-)側の最大変形点を繋ぐ線上に位置する P1*, P3*に移動し、P1*, P3*は $F_y(+)$, $F_y(-)$ と増減係数 α_1 , α_2 及び初期剛性低減係数 η によって定義される。

また、Pinching Pivot Point PP2, PP4 は P1*, P3*と原点を通る直線と PP2, PP4 と(+), (-)側の最大変形点を繋ぐ直線の交点である PP2*, PP4*に移動する。

■ 増減係数 β_1 , β_2 の更新

Pinching Pivot Point の増減係数 β_1 , β_2 は降伏以後、次の条件で更新される。

$$\beta_i^* \begin{cases} = \beta_i & ; D_{\max} \leq D_{t1} \\ = \beta_i \cdot \frac{F_{\max}}{F_{ti}} & ; D_{\max} > D_{t1} \end{cases}$$

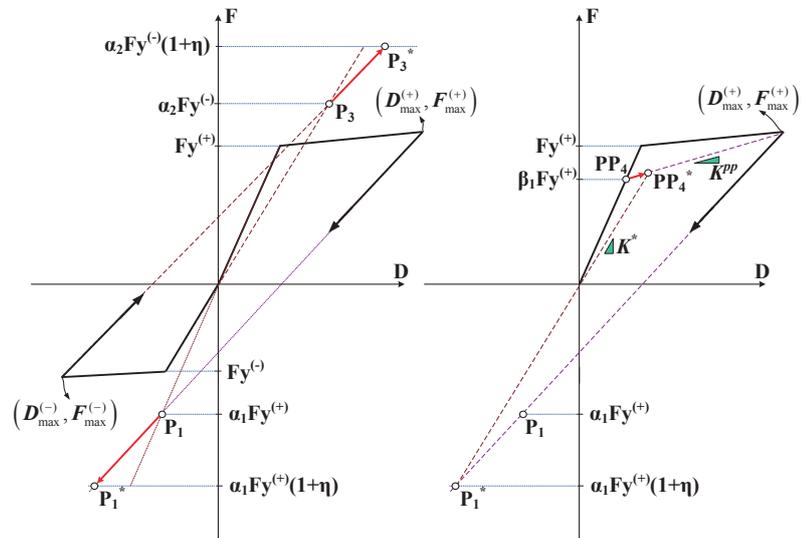


図 9.3.53 初期剛性軟化係数

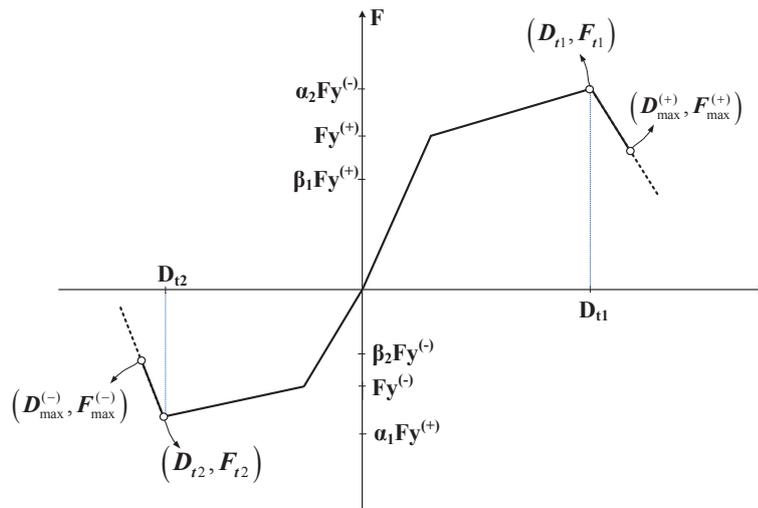
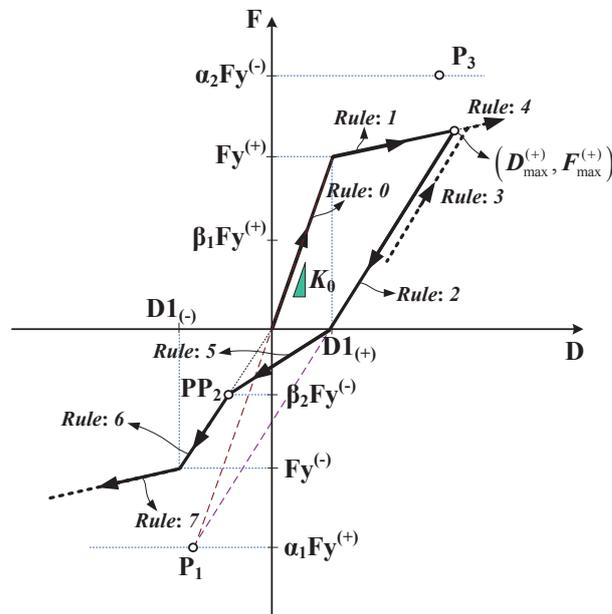


図 9.3.54 増減係数 β_1, β_2 の更新

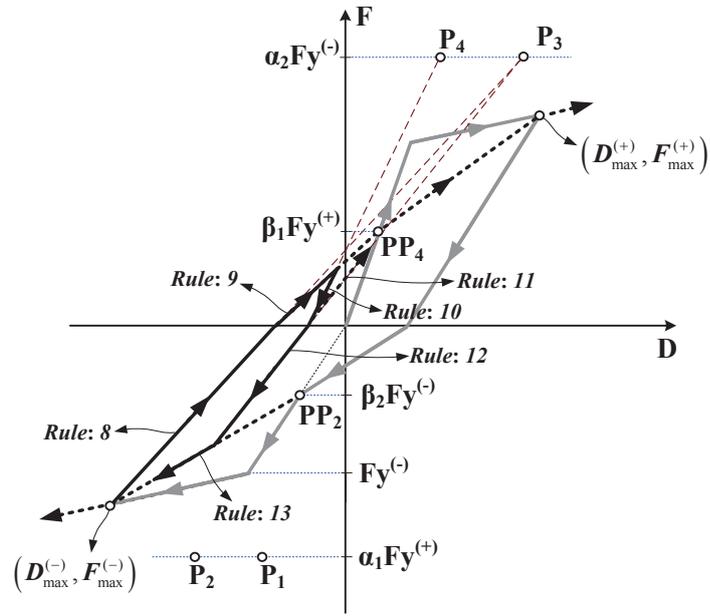
C. マルチリニア-塑性ピボット型の履歴ルール

- 1) $|D_{\max}| < D1$ の場合は線形弾性で、原点を通る弾性勾配の直線上で移動する (Rule:0)。
- 2) i) 変形が初めて $D1$ を超える場合、スケルトンカーブ上を移動する (Rule:1)。
 ii) この直線上で除荷される場合、P1 又は P3 に向かって移動する (Rule:2)。
 iii) 復元力が 0 に到達する前に再載荷される場合は同じ除荷直線に沿って進み (Rule:3)、スケルトンカーブに到達するとスケルトンカーブ上で移動する (Rule: 4)。
 iv) 復元力が 0 を超えると、PP2 又は PP4 に向かって移動する (Rule:5)。
 v) PP2 又は PP4 を超えると、降伏以前では弾性勾配の直線上で移動し (Rule:6)、変形が大きくなり降伏するとスケルトンカーブ上を移動する (Rule:7)。



- 3) i) 両側が降伏した以後、スケルトンカーブ上で除荷される場合、P1 又は P3 に向かって移動する (Rule:8)。但し、初期剛性低減係数が 0 で無い場合は更新された P1*, P3* に向かって移動する。
 ii) 復元力が 0 を超えると、PP2、又は PP4 に向かって移動し、初期剛性低減係数が 0 で無い場合は更新された PP2*、PP4* に向かって移動する (Rule:9)。
 iii) PP2、又は PP4 に到達する前に除荷される場合、除荷点と P4 (又は P2) を通る直線上で移動する (Rule:10)。復元力が 0 になる前に再載荷されると P3 (又は P1) に向かって移動する (Rule: 11)。

iv) 復元力が 0 を超えると、復元力が 0 になる点と P3(又は P1)を繋ぐ線上で移動する (Rule:12)。PP2(又は PP4)と(+), (-)側の最大変形点を繋ぐ直線に合うと最大変形点に向かって移動する(Rule:13)。



9.3.8 多軸ヒンジの履歴モデル

地震のような複雑な荷重に対して軸力と 2 軸曲げを受ける柱には 3 つの成分間に複雑な相互関係が作用する。このような相互作用をより正確に表現するために 1 つの柱をソリッド要素で細分化し解析することが考えられるが、計算量が非常に大きくなり、一般的には多軸ヒンジモデル(Hysteresis Model for Multi-axial Hinge)を使用する。多軸ヒンジモデルは要素内に複数の非弾性ヒンジを割り当て、ヒンジ状態によって部材の非弾性挙動を解析するモデルで、ファイバモデルと多軸ヒンジの履歴モデルがある。

(1) ファイバモデル

ファイバモデルは 1 つの梁要素で要素断面を細分化し(細分化した断面部分をファイバという)、各ファイバで非弾性挙動を表現するモデルである。したがって、モデリング時に対象部材を複数の要素で分割しなくても精度の良い非弾性挙動が把握できる。しかし、大規模モデルですべての部材をファイバモデルにしてしまうと、計算時間が長くなり、メモリが多く必要になるなどの問題が起きる。

(2) 多軸ヒンジの履歴モデル

多軸ヒンジの履歴モデルは軸力と 2 軸の曲げ成分を降伏面で定義し、塑性理論によって軸力と 2 軸曲げ間の相互作用を考慮するモデルである。軸力と曲げ成分は互いに連成するが、それぞれは履歴モデルで定義することができ、断面を細分するファイバモデルに比べてヒンジ状態の判定にかかる計算量が大幅に減る。したがって、大規模モデルの時刻歴解析にも適用できる。

プログラムでは多軸ヒンジモデルとして、ファイバモデルと塑性理論を応用した移動硬化型の履歴モデルが使用できる。ここでは多軸ヒンジモデルについて説明し、ファイバモデルについては別章で説明する。

A. 移動硬化型 (Kinematic Hardening Type)

多軸ヒンジの履歴モデルの硬化則として、2つの降伏面を使用する移動硬化則を用いる。基本的には一軸ヒンジを対象とする移動硬化型のトリニア履歴特性を軸成分と2軸の曲げ成分に拡張したものである。ヒンジ状態の判定およびそれによる柔性マトリックスの計算は降伏面に対する降伏点の相対的な位置関係から決定される。除荷時の剛性は弾性剛性と同じで、2つの降伏面は降伏によって位置だけが移動し、形や大きさの変化はないと仮定する。

降伏の判定は図 9.3.55 のように荷重点が1次降伏面の内部に位置する場合は弾性状態と見なし、裁荷過程で荷重点が1次の降伏面にあると1次降伏が発生したと見なす。そして、荷重点が2次の降伏面にあると2次降伏が発生したと見なす。

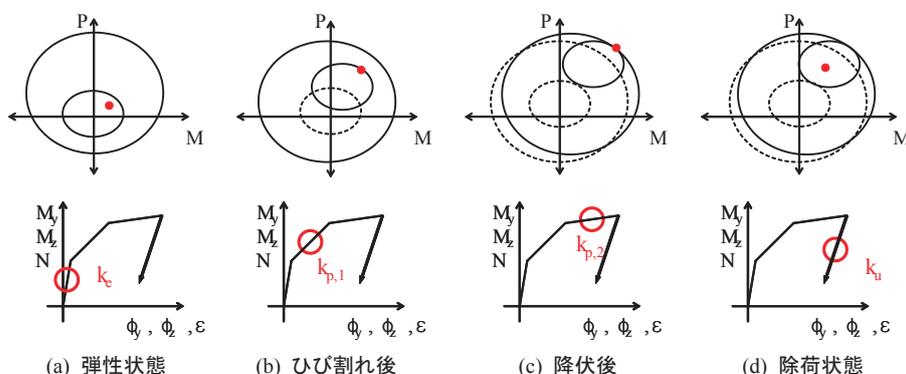


図 9.3.55 降伏面の移動と剛性変化

ヒンジの柔性マトリックスは直列連結された3つのバネの柔性度の和で仮定する。直列に繋がったバネはそれぞれ弾性バネと2つの非弾性バネで構成され、最初は弾性バネだけ柔性度を持ち、残りは剛体と仮定する。その後、荷重点がそれぞれの降伏面に接するときに関連の非弾性バネの柔性度が発生すると仮定する。

N 次の降伏後の柔性マトリックスの計算式は次の通りである。ここで、降伏面と関連する項目は現在の荷重点が接している降伏面に対してだけ計算される。

$$F_s = K_{s,(0)}^{-1} + \sum_{i=1}^N \frac{a_{(i)} a_{(i)}^T}{a_{(i)}^T K_{s,(i)} a_{(i)}} \quad (9.3.18)$$

ここで、

$$K_{s,(i)} = \begin{bmatrix} k_{1,(i)} & 0 & 0 \\ 0 & k_{2,(i)} & 0 \\ 0 & 0 & k_{3,(i)} \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{k_{n,(i)}} = \left(\frac{1}{r_{n,(i)}} - \frac{1}{r_{n,(i-1)}} \right) \frac{1}{k_{n,(0)}} \quad (n=1,2,3; i=1,2)$$

i : 現在の荷重点が接している降伏面の次数

F_s : ヒンジの接線柔性マトリックス

$a(i)$: i -番目降伏面の荷重点位置での法線ベクトル

$kn(i)$: n -番目成分の i -番目の直列バネ剛性 ($i=0$ の場合には弾性剛性)

$rn(i)$: n -番目成分の i -番目降伏時の剛性低減率($i=0$ の場合は 1.0)

上記の柔性度マトリックス F_s は、弾性状態では対角マトリックスで 3 つの成分が完全に独立的で、降伏変形中は非対角成分によって 3 つの成分間に相関作用が発生する。荷重点が到達降伏面の外側に移動すると、降伏面は荷重点と接している状態を維持するよう移動する。移動方向は変形された Mroz の硬化法則(Hardening Rule)に従う。荷重点が降伏面上から内側に移動する場合は除荷状態と判定する。除荷時の剛性は弾性剛性と同じである。また、除荷過程で降伏面は移動しない。

S_c : conjugate loading point	C_1 : translation of the 1st yield surface center
S : translation of loading point	C_2 : translation of the 2nd yield surface center

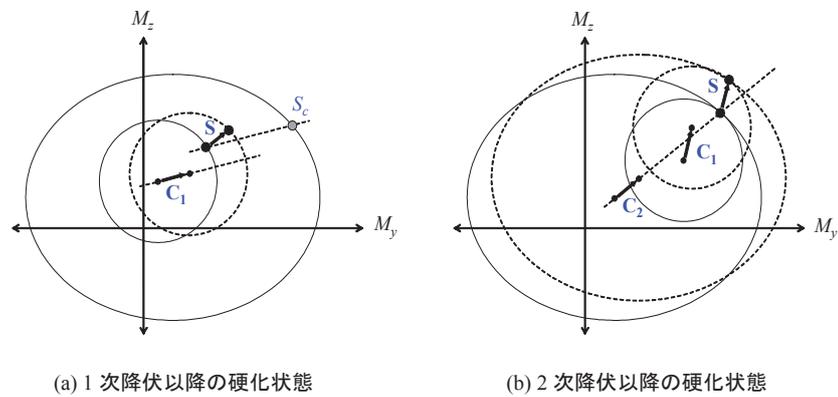


図 9.3.56 硬化則

B. P-M および P-M-M 相関作用

曲げモーメントと軸力が同時に作用する梁要素は相関作用によって各成分が独立的に作用する時とは異なる降伏強度を持つようになる。特に 3 次元時刻歴応答解析において、2 方向による地震荷重を受ける柱部材では、2 軸の曲げモーメントと軸力との間に複雑な相関作用が発生し、結果的に構造物に大きな影響を及ぼすようになる。非線形の時刻歴解析では P-M 相関作用、または P-M-M 相関作用を考慮することができる。

● P-M 相関作用

P-M 相関作用ではヒンジの曲げ降伏強度の算定時に軸力の影響が考慮できる。しかし、各時間ステップにおけるヒンジ状態の判定では軸力と曲げモーメントが独立だと見なされ、相関関係は無視される。また、2 軸曲げモーメントの相関作用も考慮することができない。

軸力を考慮した曲げモーメントの降伏強度を算定するためには、先に非線形静的解析を行い静的荷重条件による軸力を計算する。その後、それぞれの荷重を別途の荷重条件に定義した後、載荷順序と荷重の連続性を設定して時刻歴解析を行う。

対象となる要素はヒンジ属性が与えられた非線形の梁要素である。この時、初期断面力は静的荷重制御データで指定したすべての静的荷重に対する線形弾性結果の組合わせて算定される。

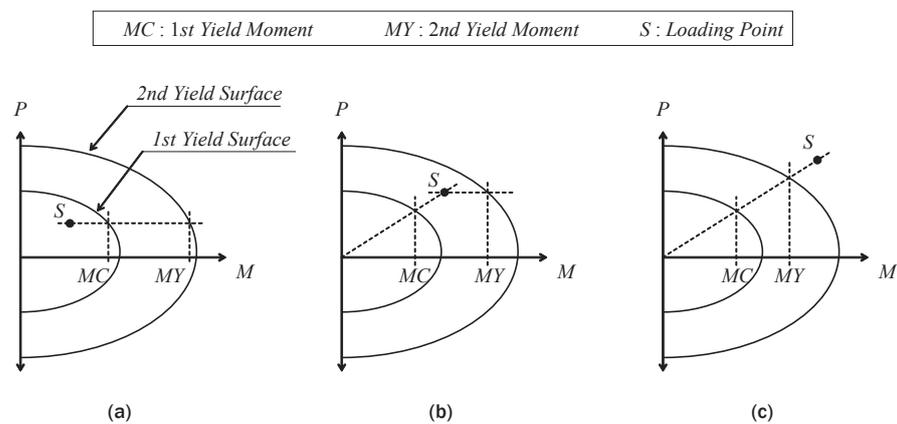


図 9.3.57 P-M 相関作用による曲げ降伏強度算定

曲げに対する降伏強度の計算は上図のように軸力及び曲げモーメントの座標から成る荷重点の降伏面に対する相対的位置によって決まる。荷重点が降伏面の内側にあれば、この荷重点の軸力に該当する曲げ降伏強度を降伏面から計算する。荷重点が降伏面の外側にあれば、荷重点と原点を連結する直線が降伏面と交差する点で曲げ降伏強度計算する。

- P-M-M 相関作用

P-M-M 相関作用は多軸ヒンジの履歴モデルを使用する。多軸ヒンジの履歴モデルは軸力と 2 軸曲げモーメントの間の相互作用を塑性理論を用いて表現するもので、時間ステップごとに 3 成分の変動を統合的に考慮した状態判定を行う。一方、プログラムでは移動硬化則に対応している。

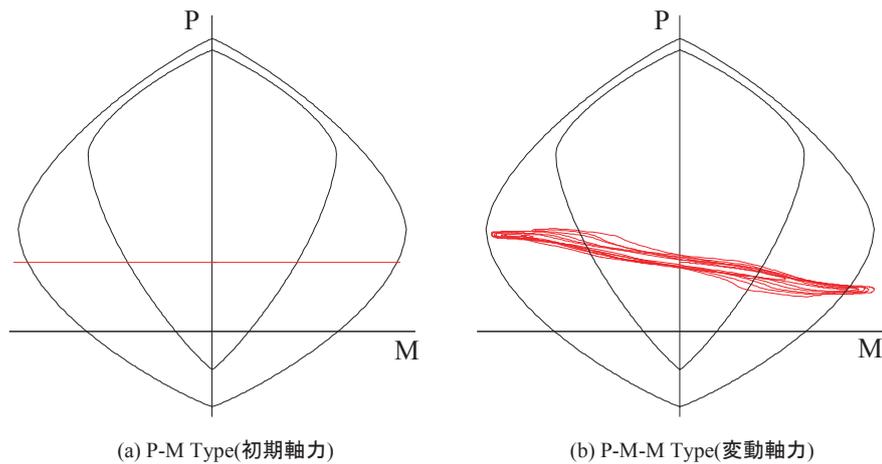


図 9.3.58 P-M と P-M-M 相関関係での軸力関係

- 降伏面の近似化

ヒンジの降伏強度の算定、または状態判定において P-M または P-M-M 相関作用を考慮するためには、P-M 相関曲線から 3 次元上の降伏面を定義する必要がある。しかし、制限された P-M 相関曲線のデータから正確な 3 次元上の降伏面を定義することは難しく、これを単純な数式に近似化する。プログラムで P-M 相関曲線を次式から近似化する。

$$\left| \frac{M}{M_{\max}} \right|^{\Gamma} + \left| \frac{P - P_{\text{bal}}}{P_{\max} - P_{\text{bal}}} \right|^{\beta} = 1.0 \quad (9.3.19)$$

ここで、

M : 荷重点の要素座標系 y-軸、または z-軸に対するモーメント成分(M_y または M_z)

M_{\max} : 要素座標系 y-軸、または z-軸に対する最大曲げ降伏強度 ($M_{y,\max}$ または $M_{z,\max}$)

P : 荷重点の軸力成分

P_{bal} : y-軸、または z-軸に対する均衡破壊時の軸荷重($P_{\text{bal},y}$, $P_{\text{bal},z}$)

P_{\max} : 軸降伏強度として正(+), 負(-)非対称は可能

Γ : 曲面次数

β : 要素座標系 y-軸または z-軸に対する曲面次数として正(+), 負(-)非対称は可能(β_y または β_z)

プログラムで M-M 相関曲線を次式から近似化する。

$$\left| \frac{M_y}{M_{y,\max}} \right|^\alpha + \left| \frac{M_z}{M_{z,\max}} \right|^\alpha = 1.0 \quad (9.3.20)$$

ここで

$M_{y,\max}$: 要素座標系 y-軸に対する最大曲げ降伏強度

$M_{z,\max}$: 要素座標系 z-軸に対する最大曲げ降伏強度

α : 曲線次数

3次元降伏面には上記の近似化された相関曲線を満足する以下の数式を使用する。

$$f(P, M_y, M_z) = \left\{ \left(\frac{M_y}{M_{y,\max}} \right)^\gamma + \left\{ g_y(M_y, M_z) \right\}^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \left(\frac{P - P_{bal,y}}{P_{\max} - P_{bal,y}} \right)^{\beta_y} \right\}^{\frac{\alpha}{\gamma}} + \left\{ \left(\frac{M_z}{M_{z,\max}} \right)^\gamma + \left\{ g_z(M_y, M_z) \right\}^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \left(\frac{P - P_{bal,z}}{P_{\max} - P_{bal,z}} \right)^{\beta_z} \right\}^{\frac{\alpha}{\gamma}} = 1 \quad (9.3.20)$$

ここで、

$$g_y(M_y, M_z) = \frac{\left(\frac{M_y}{M_{y,\max}} \right)^\alpha}{\left(\frac{M_y}{M_{y,\max}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_z}{M_{z,\max}} \right)^\alpha}, \quad g_z(M_y, M_z) = \frac{\left(\frac{M_z}{M_{z,\max}} \right)^\alpha}{\left(\frac{M_y}{M_{y,\max}} \right)^\alpha + \left(\frac{M_z}{M_{z,\max}} \right)^\alpha}$$

近似的な相関曲線の次数 β_y , β_z , γ はユーザー入力または最適値に対する自動計算ができる。最適値は γ を 1.0 から 3.0 まで 0.1 ずつ増加させながら与えられた γ に対して β_y , β_z を計算し、この組合せの中から誤差が最小となる値を使用する。 β_y , β_z はそれぞれ P-My 平面及び P-Mz 平面が降伏面と交差して作られる近似的相関曲線と実際計算された相関曲線の面積が一致する値から算定する。誤差は相関曲線算定の基準軸力で近似的な相関曲線と実際の相関曲線のモーメント差の絶対値で定義される。

3次元の降伏面にはトリニアのスケルトンカーブに相当する2つの降伏面がある。内側にあるものを1次降伏面、外側にあるものを2次降伏面とする。RC断面の場合、1次降伏面は断面のひび割れに相当する。この中で1次降伏面はひび割れ曲線を図9.3.51のように近似化して使用する。まず、2次降伏面を同一の面積を持つように2つの直線から近似化して使用する。次に、2つの直線の中から斜線と元のひび割れ曲線が成す3角形に接しながら囲まれるように1次降伏面のパラメータを計算する。

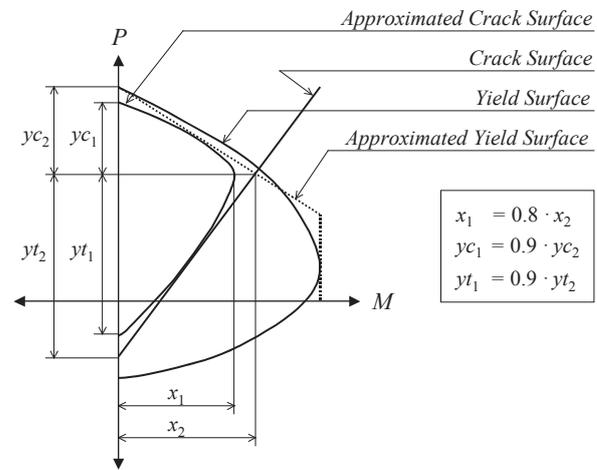


図 9.3.59 P-M と P-M-M 相関関係での軸力関係

9.4 ファイバモデル(Fiber Model)

9.4.1 ファイバモデルの定義と定式化

非弾性ヒンジの種類は 1 軸ヒンジの履歴モデル、塑性理論に基づく多軸ヒンジの履歴モデル、ファイバモデルに分類できる。1 軸ヒンジの履歴モデルは軸力、または 2 軸曲げなどの効果を反映せず、経験的に決まった履歴特性を使用するヒンジモデルで、部材ヒンジの履歴特性が構造に及ぼす影響が大きくないか、簡単な方法で結果を確認する場合に有効である。

一方、多軸ヒンジの履歴モデルは塑性理論の降伏面から軸力と 2 軸曲げの効果が考慮できるが、様々な履歴挙動の特性を表現するには限界がある。

ファイバモデルも多軸ヒンジモデルのように軸力と 2 軸曲げの効果が考慮できるが、せん断力の影響が大きくない線材の構造特性を考慮するときに有効である。曲げモーメントを受ける断面は変形後も平面を保持する特性を利用して定式化される。したがって、断面で発生するひずみは中立軸からの距離に比例し、距離に曲率を掛けて求める。

ファイバモデルは分布型ヒンジモデルの各積分点の断面を図 9.4.1 のような格子(Fiber)、または層(Layer)、セル(Cell)に分割し、セルごとに同じ応力を持つと仮定する。ここで、セルにはコンクリート、鉄骨、鉄筋など、様々な材料を適用することができ、任意形状の断面を使用することもできる。

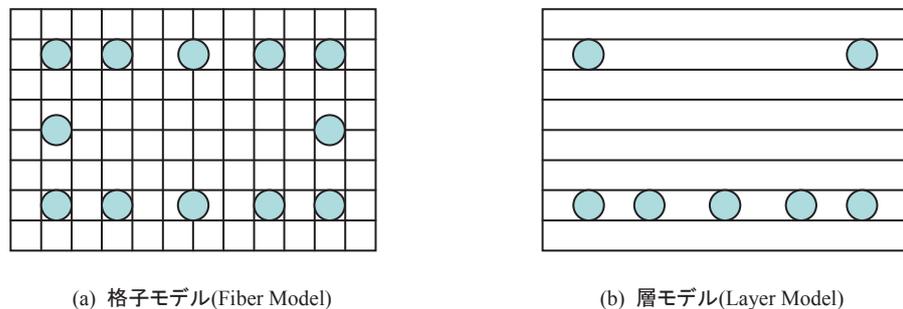


図 9.4.1 ファイバモデルのセル分割方法

セルにはそれぞれ異なる材料モデルを定義することができる。断面力(モーメント、軸力)は各セルの応力を積分し、断面剛性は断面の柔性度の逆行列から求める。そして、要素または部材の剛性は積分点(集中型、または分布型)での積分から得られる。したがって、ファイバモデルは曲げ部材の力学的特性を正確に反映することができ、解析結果の正確度も非常に高い。ただし、断面を複数のセルで分割しなければならないため、解析時間は長く掛かる。

ファイバモデルは次のような基本仮定から定式化される。

1. 断面は変形過程で平面を保持して部材軸と垂直を成すと仮定する。したがって、鉄筋とコンクリートの間に付着すべり(Bond-Slip)は考慮しない。

2. 断面の図心軸は梁要素の長さ方向で常に直線であると仮定する。

ファイバモデルの解析アルゴリズムは次のようになる。各要素の積分点位置にファイバモデルが定義された断面が存在すると仮定する。積分点の数は最大 20 個まで定義できる。積分方法は基本的に部材両端の結果が確認できる Gauss-Lobatto 法を使用するが、積分点が 2 つの場合にだけ一般の Gauss 積分法を使用する。前の時間ステップで得られた両端の部材力を変換過程で、剛体挙動を除いた 5 つの自由度に該当する軸力と両端の 2 つのモーメントに変換する。このように得られた軸力と両端の 2 つモーメントを内挿関数を使用して各断面での力を計算する。

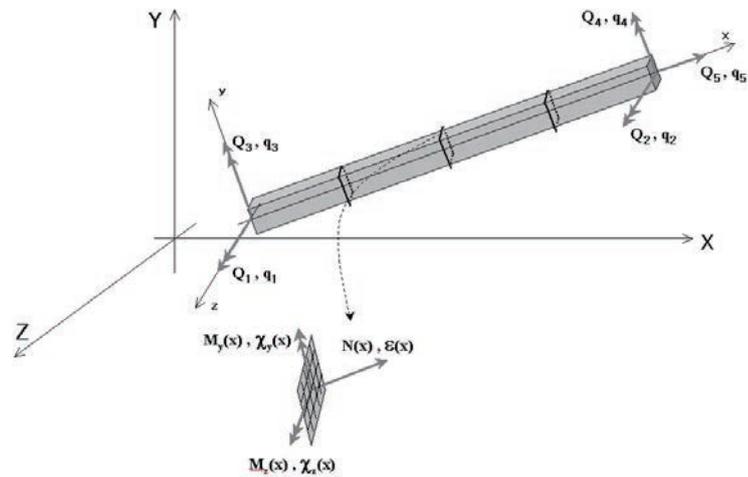


図 9.4.2 部材の任意断面における部材力と変形

要素部材力ベクトル : $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\}^T$

要素変位ベクトル : $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}^T$

断面力ベクトル : $\mathbf{D}(x) = \{M_z(x), M_y(x), N(x)\}^T$

断面変位ベクトル : $\mathbf{d}(x) = \{\chi_z(x), \chi_y(x), \epsilon(x)\}^T$

$$\Delta \mathbf{D}^i(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \Delta \mathbf{Q}^i \quad (9.4.1)$$

ここで、 $\mathbf{b}(x)$ は内挿関数(Force Interpolation Function)で、次のようになる。

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} \left(\frac{x}{L}-1\right) & \left(\frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{x}{L}-1\right) & \left(\frac{x}{L}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、L は部材長さである。

断面の力と柔性度を演算して断面の変形を計算する。このように得られた断面の軸、曲げ変形からファイバそれぞれの軸ひずみを計算する。その関係式は次のようになる。

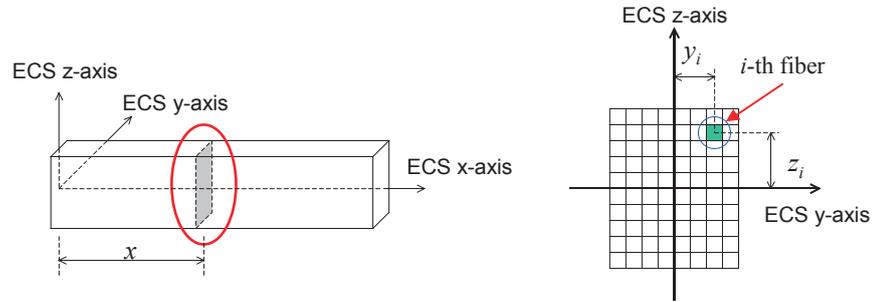


図 9.4.3 ファイバモデルの断面分割

$$\varepsilon_i = [z_i \quad -y_i \quad 1] \begin{Bmatrix} \chi_y(x) \\ \chi_z(x) \\ \varepsilon_x(x) \end{Bmatrix} \quad (9.4.2)$$

ここで、

x: 断面の位置

$\chi_y(x)$: 位置 x における断面の要素座標系 y-軸に対する曲率

$\chi_z(x)$: 位置 x における断面の要素座標系 z-軸に対する曲率

$\varepsilon_x(x)$: 位置 x における断面の軸方向のひずみ

y_i : 断面上で i-番目ファイバの y-軸位置

z_i : 断面上で i-番目ファイバの z-軸位置

ε_i : i-番目ファイバのひずみ

各ファイバのひずみ ε_i に対応するファイバの応力と接線剛性は、材料別に定義した構成関係式から得られ、ファイバの状態を判別する。1 つの断面内の各ファイバの応力を積分して断面の軸力と曲げモーメントを計算して各ファイバの接線剛性を積分して断面の柔性度を得る。1 つの部材内の断面の柔性度を積分し、部材の柔性度を更新する。剛性マトリックスと柔性マトリックスは以下のようになる。

$$k^J(x) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n(x)} E_i^J \cdot A_i \cdot y_i^2 & -\sum_{i=1}^{n(x)} E_i^J \cdot A_i \cdot y_i \cdot z_i & -\sum_{i=1}^{n(x)} E_i^J \cdot A_i \cdot y_i \\ -\sum_{i=1}^{n(x)} E_i^J \cdot A_i \cdot y_i \cdot z_i & \sum_{i=1}^{n(x)} E_i^J \cdot A_i \cdot z_i^2 & \sum_{i=1}^{n(x)} E_i^J \cdot A_i \cdot z_i \\ -\sum_{i=1}^{n(x)} E_i^J \cdot A_i \cdot y_i & \sum_{i=1}^{n(x)} E_i^J \cdot A_i \cdot z_i & \sum_{i=1}^{n(x)} E_i^J \cdot A_i \end{bmatrix}$$

$$f^j(x) = [k^j(x)]^{-1} \quad (9.4.3)$$

ここで、

$k^j(x)$: j-ステップ、距離 x に位置する断面の接線剛性

$f^j(x)$: j-ステップ、距離 x に位置する断面の柔性度

$n(x)$: 距離 x に位置する断面内のすべてのファイバ個数

$E_i^j(x)$: j-ステップ、距離 x に位置する断面内の 'i' ファイバの接線剛性

A_i : 'i' ファイバの断面積

y_i, z_i : 'i' ファイバの断面内の位置

一方、不平衡力の算定に必要な断面の内力は、次のように現ステップから各ファイバ上の応力を積分して得る。

$$D_R^j(x) = \left\{ -\sum_{i=1}^{n(x)} \sigma_i^j A_i y_i \quad \sum_{i=1}^{n(x)} \sigma_i^j A_i z_i \quad \sum_{i=1}^{n(x)} \sigma_i^j A_i \right\}^T \quad (9.4.4)$$

このような過程を各 Newton-Raphson 反復計算で指定した収束条件が満足するまで行う。一方、ファイバモデルで断面の非線形特性は非線形ファイバの応力-ひずみ関係から定義できる。部材の非線形挙動はすべてファイバの応力-ひずみ関係から再現できるので、プログラムでは様々な鋼およびコンクリートのファイバの材料モデルを提供している。次に、各材料の構成モデルについて説明する。

9.4.2 鋼材モデル

(1) 修正 Menegotto & Pinto モデル

Menegotto & Pinto(1973)¹ が提案したモデルを Filippou(1983)²などが修正したモデルで、数値的に効率性が高く実験結果と良く一致するモデルとして評価されている。構成モデルは基本的に移動硬化型のバイリニアで設定された漸近線で接近する曲線形状を持つ。それぞれ除荷経路とひずみ硬化区間に対応する 2 つの漸近線の間の転移区間は曲線形状となる。この転移区間は 2 つの漸近線の交点と除荷される方向の最大変形点が互いに遠いほど滑らかな曲線になり、このような特性からバウジング効果を正確に表現することができる。

$$\hat{\sigma} = b \cdot \hat{\varepsilon} + \frac{(1-b) \cdot \hat{\varepsilon}}{(1 + \hat{\varepsilon}^R)^{1/R}} \quad (9.4.5)$$

ここで、

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r}, \quad R = R_0 - \frac{a_1 \cdot \xi}{a_2 + \xi}$$

ε : 鋼ファイバのひずみ

σ : 鋼ファイバの応力

$(\varepsilon_r, \sigma_r)$: 除荷点として初期弾性状態では $(0, 0)$ と仮定.

$(\varepsilon_0, \sigma_0)$: 現在の載荷、または除荷経路を定義する 2 つ漸近線の交点

b : 剛性低減率

R_0, a_1, a_2 : 定数(曲線の形を決定する値で、実験から得た最適値をデフォルトに使用)

ξ : 荷重が載荷、または除荷される方向での最大ひずみと ε_0 の差(絶対値)

ただし、最大ひずみの初期値は $\pm(F_y/E)$ と同じであると設定(図 2.95 参照)

¹ Menegotto, M. and Pinto, P.E., "Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior of Elements under Combined Normal Force and Bending", Proceedings, IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads, Lisbon, 1973, pp.15-22.

² Filippou, F.C., Popov, E.P. and Bertero, V.V., Effects of Bond Deterioration on Hysteretic Behavior of Reinforced Concrete Joints", EERC Report 83-19, Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, 1983.

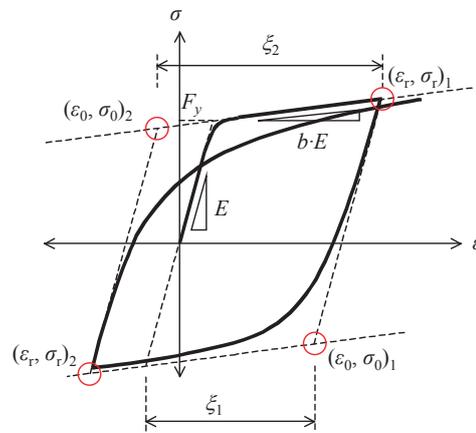


図 9.4.4 鋼ファイバの構成モデル

(2) バイリニアモデル

一般的なバイリニアモデルで降伏前と降伏後の剛性が異なる。降伏前の載荷と除荷は弾性剛性を使用し、降伏後は減少された剛性で載荷が進む。降伏後の除荷と再裁可は弾性剛性で進む。

(3) トリリニアモデル

一般的なトリリニアモデルで弾性と 1 次降伏と 2 次降伏以降の剛性がそれぞれ定義できる。圧縮と引張の 1 次、2 次降伏ひずみと勾配が定義でき、非対称の履歴を定義することができる。降伏前の載荷、除荷は弾性剛性を用い、降伏後は減少された剛性で載荷が進む。降伏後の除荷、再裁可は弾性剛性で進む。

(4) バイリニアモデル(バウジナー効果考慮)

本モデルは鉄筋で発生可能なほとんどの現状が再現できるように作成されたモデルで、すべての剛性をそれぞれ定義することができる。引張側は降伏、破断が考慮でき、圧縮側は降伏、座屈後の破壊が考慮できる。

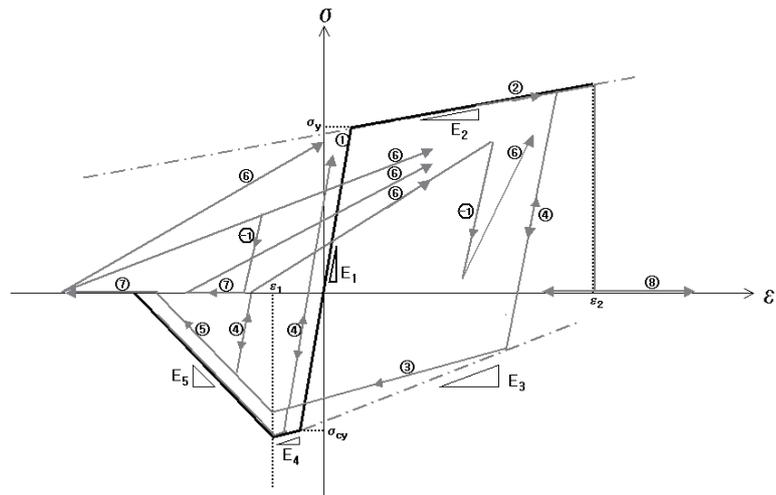


図 9.4.5 バイリニアモデル(バウジナー効果考慮)の履歴則

- ① 弾性状態
- ② 降伏以降の状態、E2 や E4 の勾配で進行
- ③ 引張側の降伏以降に除荷が始まり、勾配 E3 の直線に会い、圧縮側の降伏が発生した状態、E4 の勾配
 - ④ 降伏以降に除荷が進む状態、E1 の勾配
 - ⑤ 圧縮側が座屈ひずみ ϵ_1 を超えた状態、E5 の勾配
 - ⑥ 圧縮側の座屈後、再載荷が進む状態、引張降伏の前は引張降伏点に向かい、引張降伏が既に発生した場合は以前の最大ひずみに向かって進む
 - ⑦ 圧縮座屈で耐力が無くなり、これ以上抵抗できない状態
 - ⑧ 引張破断が発生し、これ以上抵抗できない状態
- ①~⑥ 段階中に除荷が発生した状態、E1 の勾配

9.4.3 コンクリートモデル

(1) 修正 Kent & Park モデル

単調増加の圧縮力を受けるコンクリートに対して Kent と Park(1971)³が提案したモデルを、Scott(1982)⁴などが修正したモデルである。下記のように包絡曲線式を使用し、コンクリートの引張強度は無視する。このモデルは明瞭さと正確さを備えたモデルで、横拘束(Confinement Effect)によるコンクリート圧縮強度の増加が考慮できる。

$$\sigma_c = \begin{cases} Kf'_c \left[2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] & \text{for } \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ Kf'_c [1 - Z(\varepsilon - \varepsilon_0)] \geq 0.2Kf'_c & \text{for } \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (9.4.6)$$

ここで、

ε : コンクリートファイバのひずみ

σ : コンクリートファイバの応力

ε_0 : 最大応力発生時のひずみ

ε_u : 極限ひずみ

K : 横拘束による強度増加率

Z : ひずみ軟化(Strain Softening) 時の勾配

f'_c : コンクリートシリンダー圧縮強度 (MPa)

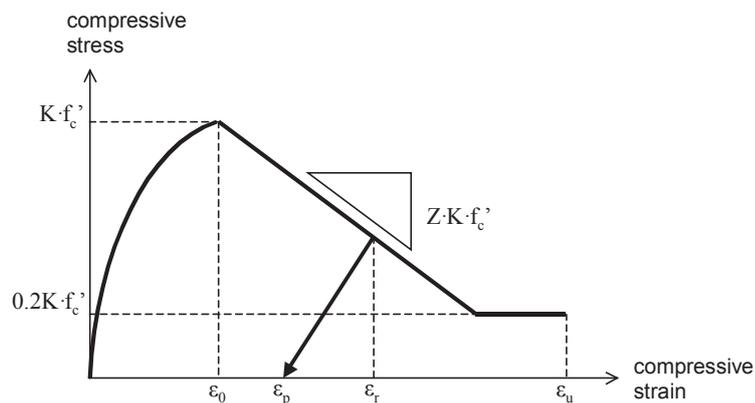


図 9.4.6 修正 Kent & Park モデル

³ Kent, D.C., and Park, R., "Flexural Members with Confined Concrete", Journal of the Structural Division, ASCE, 97(ST7), 1971.

⁴ Scott, B.D., Park, R. and Priestley, M.J.N., "Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates", ACI Journal, Vol.79, No.1, 1982, pp. 13-27.

極限ひずみを超えたコンクリートは圧壊が発生したと仮定し、これ以上荷重に抵抗できないと仮定する。矩形断面の柱に対して、上記の包絡曲線が定義できるパラメータを計算するためには次式を使用する。

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 0.002K \\ K &= 1 + \frac{\rho_s f_{yh}}{f'_c} \\ Z &= \frac{0.5}{\frac{3 + 0.29 f'_c}{145 f'_c - 1000} + 0.75 \rho_s \sqrt{\frac{h'}{s_h}} - 0.002K}\end{aligned}\quad (9.4.7)$$

ここで、

f_{yh} : セン断筋(Stirrup)の降伏強度 (MPa)

ρ_s : セン断鉄筋比 = セン断筋の体積 / コンクリートコアの体積

h' : コンクリートコアの幅 (矩形の場合は長い方)

(コンクリートコアはセン断筋の外側で囲まれた領域で定義)

s_k : セン断筋の間隔

Scott など(1982)は、横拘束が存在する矩形の柱に対して、次のような極限ひずみの式を提案した。

$$\varepsilon_u = 0.004 + 0.9 \rho_s (f_{yh} / 300) \quad (9.4.8)$$

上記の包絡曲線で除荷が始まる場合の除荷経路は次式で定義されるひずみ軸線上の点($\varepsilon_p, 0$)に向かい、この点に到達するとひずみ軸線上に沿って引張領域に移動する。

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} &= 0.145 \cdot \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right)^2 + 0.13 \cdot \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right) \quad \text{for } \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right) < 2 \\ \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} &= 0.707 \cdot \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} - 2\right) + 0.834 \quad \text{for } \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right) \geq 2\end{aligned}\quad (9.4.9)$$

ここで、

ε_r : 除荷発生点のひずみ

ε_p : 除荷経路上の目標点のひずみ

再び圧縮ひずみが増加すると今までの除荷経路をそのまま遡って包絡曲線に到達することになる。

(2) 日本コンクリート標準示方書モデル

日本コンクリート標準示方書で提示しているコンクリートモデルで、次のような特徴がある。圧縮の最大応力点を越えた場合、軟化特性を持ち残留塑性ひずみが考慮できる。除荷、再載荷の場合、剛性低減の効果が考慮でき、一般的な梁部材の場合は引張側の応力-ひずみ関係は無視する。これより、圧縮強度が 50 N/mm^2 以下の場合には次のような応力-ひずみ履歴関係を持つ。

$$\sigma'_c = E_0 K (\varepsilon'_c - \varepsilon'_p) \geq 0, \quad E_0 = \frac{2 \cdot f'_c}{\varepsilon'_{peak}}$$

$$K = \exp \left\{ -0.73 \frac{\varepsilon'_{max}}{\varepsilon'_{peak}} \left(1 - \exp \left(-1.25 \frac{\varepsilon'_{max}}{\varepsilon'_{peak}} \right) \right) \right\} \quad (9.4.10)$$

$$\varepsilon'_p = \varepsilon'_{max} - 2.86 \cdot \varepsilon'_{peak} \left(1 - \exp \left(-0.35 \frac{\varepsilon'_{max}}{\varepsilon'_{peak}} \right) \right)$$

ここで、

ε'_{peak} : 圧縮強度に対応するひずみ

ε'_{max} : 前に起きた最大圧縮ひずみ

ε'_p : 残留塑性ひずみ

K : 剛性残存率

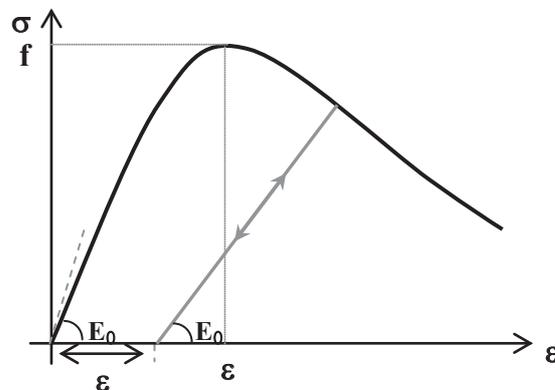


図 9.4.7 日本コンクリート標準示方書モデル

(3) 日本道路橋示方書モデル

日本道路橋示方書・同解説、V 耐震設計編のコンクリートモデルで、次のような特徴がある。圧縮の最大応力点を越えた場合は軟化特性を持ち、さらに極限圧縮ひずみを越えた場合はそれ以上抵抗しないと仮定する。地震荷重のタイプによって極限圧縮ひずみが変わり、拘束鉄筋の量を考慮して軟化領域の勾配、最大圧縮強度、極限圧縮ひずみが調整される。一方、残留塑性ひずみを考慮し、除荷、再除荷の場合は初期剛性

で挙動すると仮定する。引張側の応力-ひずみ関係も考慮でき、最大引張強度時のひずみを超えた場合、それ以上抵抗しないと仮定する。

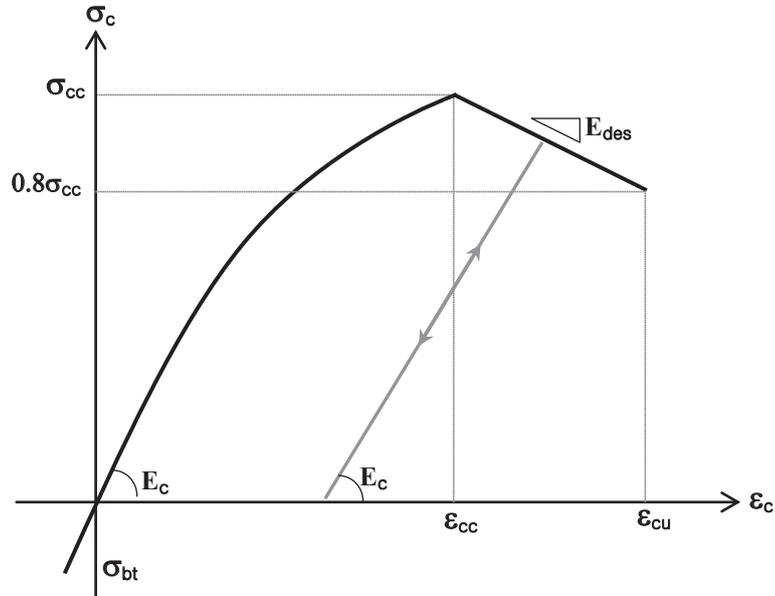


図 9.4.8 日本道路橋示方書モデル

$$\sigma_c = \begin{cases} E_c \varepsilon_c \left(1 - \frac{1}{n} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right)^{n-1} \right) & (0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cc}) \\ \sigma_{cc} - E_{des} (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc}) & (\varepsilon_{cc} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}) \end{cases} \quad (9.4.11)$$

$$n = \frac{E_c \varepsilon_{cc}}{E_c \varepsilon_{cc} - \sigma_{cc}}$$

$$\sigma_{cc} = \sigma_{ck} + 3.8\alpha \rho_s \sigma_{sy}$$

$$\varepsilon_{cc} = 0.002 + 0.033\beta \frac{\rho_s \sigma_{sy}}{\sigma_{ck}}$$

$$E_{des} = 11.2 \frac{\sigma_{ck}^2}{\rho_s \sigma_{sy}}$$

$$\varepsilon_{cu} = \begin{cases} \varepsilon_{cc} & (\text{Type I 地震荷重}) \\ \varepsilon_{cc} + \frac{0.2\sigma_{cc}}{E_{des}} & (\text{Type II 地震荷重}) \end{cases}$$

$$\rho_s = \frac{4A_h}{s d} \leq 0.018$$

ここで、

σ_c : コンクリートの応力

σ_{cc} : セン断筋で拘束されたコンクリートの強度

σ_{ck} : コンクリートの設計基準強度

ε_c : コンクリートのひずみ

ε_{cc} : 最大圧縮応力に対するひずみ

ε_{cu} : セン断筋で拘束されるコンクリートの極限ひずみ

E_c : コンクリートの弾性係数

E_{des} : 軟化区間の下向き勾配

ρ_s : セン断筋の体積比

A_h : セン断筋一本当たりの断面積

s : セン断筋の間隔

d : セン断拘束長さで、帯筋や中間帯鉄筋によって分割拘束されたコンクリート長さ
で一番長い値

σ_{sy} : セン断筋の降伏点

α, β : 断面修正係数

(円形断面 = 1、1/四角、梯形・中空断面 = 0.2、0.4)

(4) 日本名古屋公団モデル

日本名古屋公団(名高社)のコンクリートモデルで、次のような特性がある。鋼製橋脚に充填されたコンクリートの応力-ひずみ関係を表現したもので、最大圧縮強度に対するひずみを超えた場合は最大圧縮強度をそのまま維持すると仮定する。極限ひずみを超えた場合は、それ以上抵抗しなく、残留塑性ひずみを考慮する。除荷、再載荷の場合は、初期剛性で挙動する。示方規定には引張強度を無視するようにしているが、汎用性を持たせるために引張側の応力-ひずみ関係も任意に定義できるようにしている。最大引張ひずみを超えた場合はそれ以上抵抗しないと仮定する。

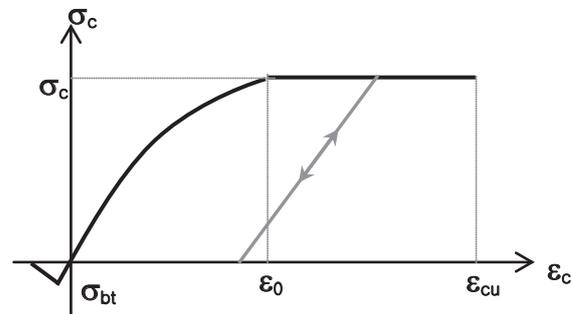


図 9.4.9 日本名古屋公団モデル

$$\sigma_c = \sigma_{ck} \left[2(\varepsilon_c / \varepsilon_0) - (\varepsilon_c / \varepsilon_0)^2 \right] \quad (9.4.12)$$

ここで、

- σ_{ck} : コンクリートの設計基準強度
- σ_{bt} : コンクリートの引張強度
- ε_{cu} : コンクリートの極限ひずみ
- ε_0 : 最大圧縮応力に対するひずみ

(5) トリリニアコンクリートモデル

1 次、2 次の圧縮降伏まで表現でき、引張強度を持つ一般的なモデルとして任意に定義できるモデルである。残留塑性ひずみが考慮でき、除荷、再載荷の場合は初期剛性で挙動すると仮定する。

(6) 中国コンクリート規準 (GB50010-2002)

中国のコンクリート示方書(GB50010-2002)のコンクリート単軸の応力-ひずみモデルである。本モデルは圧縮側と引張側にそれぞれ最大応力点を有し、最大応力点を超えると軟化領域が現れる。中国のコンクリート示方書モデルの適用範囲は次の通りである。

- コンクリート強度等級 : C20～C80
- コンクリート単位体積質量 : 2200～2400kg/m³
- 正常な温度、湿高環境、正常な載荷速度

構造解析方法と極限状態の検討の必要性に応じて、単軸強度 (f_c^* , f_t^*) は、各標準値 (f_{ck} , f_{tk})、設計値あるいは平均値 (f_{cm} , f_{tm}) を使用することができる。

強度の平均値は、次のように計算する。

$$f_{cm} = \frac{f_{ck}}{1 - 1.645\delta_c}$$

$$f_{tm} = \frac{f_{tk}}{1 - 1.645\delta_t}$$

ここで、 δ_c , δ_t : コンクリートの圧縮強度
(引張強度の突変係数として試験統計によって決定)

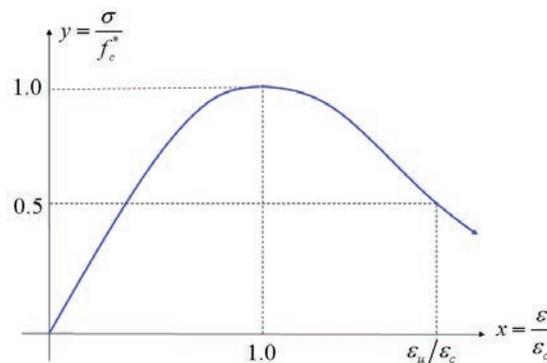


図 9.4.10 コンクリートの圧縮応力-ひずみ曲線

コンクリート単軸の圧縮応力-ひずみ関係は、次式により表現できる。

$$\begin{cases} \epsilon_c \leq \epsilon ; y = \alpha_a x + (3 - 2\alpha_a)x^2 + (\alpha_a - 2)x^3 \\ \epsilon < \epsilon_c ; y = \frac{x}{\alpha_a(x-1)^2 + x} \end{cases}$$

ここで、 $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}$, $y = \frac{\sigma}{f_c^*}$

f_c^* : コンクリート単軸の圧縮強度 (f_{ck} , f_c or f_{cm})

ε_c : f_c^* に対応する最大点の圧縮ひずみ

$$\varepsilon_c = (700 + 172\sqrt{f_c^*}) \times 10^{-6}$$

α_a : 単軸の圧縮応力 - ひずみ曲線の上昇区間のパラメータ

$$\alpha_a = 2.4 - 0.0125 f_c^*$$

α_d : 単軸の圧縮応力 - ひずみ曲線の下降区間のパラメータ

$$\alpha_d = 0.157 f_c^{*0.785} - 0.905$$

ε_u : 応力 - ひずみ曲線の下降区間で応力が $0.5 \cdot f_c^*$ のときのひずみ

$$\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_c} = \frac{1}{2\alpha_d} (1 + 2\alpha_d + \sqrt{1 + 4\alpha_d})$$

. ε_u は応力-ひずみ曲線の下降区間で応力が $0.5f_c^$ のときのコンクリート圧縮ひずみ

表 9.4.1 コンクリート単軸の圧縮応力 - ひずみ曲線のパラメータ

f_c^* (N/mm ²)	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
ε_c (x10 ⁻⁶)	1370	1470	1560	1640	1720	1790	1850	1920	1980	2030
α_a	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.90	1.84	1.78	1.71	1.65
α_d	0.41	0.74	1.06	1.36	1.65	1.94	2.21	2.48	2.74	3.00
$\varepsilon_u / \varepsilon_c$	4.2	3.0	2.6	2.3	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8	1.8

コンクリート単軸の引張応力-ひずみ関係は、次式により表現できる。

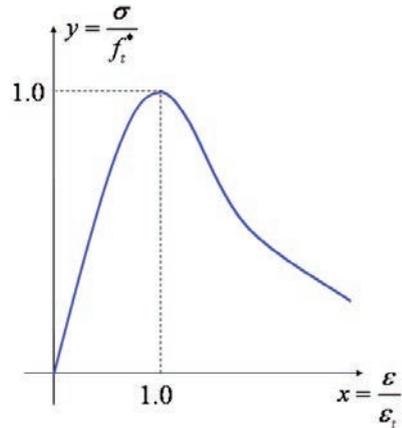


図 9.4.11 コンクリート単軸の引張応力-ひずみ曲線

$$\begin{cases} \varepsilon \leq \varepsilon_t ; y = 1.2x - 0.2x^6 \\ \varepsilon_t < \varepsilon ; y = \frac{x}{\alpha_t(x-1)^{1.7} + x} \end{cases}$$

ここで、 $x = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_t}$, $y = \frac{\sigma}{f_t^*}$

f_t^* : コンクリート単軸の引張強度 (f_{tk} , f_t or f_{tm})

ε_t : f_t^* に対応する最大点の引張ひずみ

$$\varepsilon_t = f_t^{*0.54} \times 65 \times 10^{-6}$$

α_t : 単軸の引張応力-ひずみ曲線の下降区間のパラメータ

$$\alpha_t = 0.312 f_t^{*2}$$

表 9.4.2 コンクリート単軸の引張応力 - ひずみ曲線のパラメータ

f_t^* (N/mm ²)	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
ε_t (x10 ⁻⁶)	65	81	95	107	118	128	137
α_t	0.31	0.70	1.25	1.95	2.81	3.82	5.00

(7) Mander コンクリートモデル

横方向に配筋された拘束鉄筋はコンクリートの極限強度と極限ひずみを大幅に増加させる効果を持つ。Mander(1988)⁵⁾は、Sheikh&Uzumeri⁶⁾が提案した有効拘束断面積の概念だけでなく、3次元応力状態を考慮したコンクリートの破壊基準を適用した最大圧縮応力度の評価式を提案し、円形断面、正方形断面、長方形断面の実験を行い提案モデルの適用性を検討した。

Mander モデルはコンクリートの断面形状に関係なく適用することができ、軸方向鉄筋の間隔と拘束鉄筋の量、拘束鉄筋の降伏強度と配筋の形などによるコンクリートの横拘束効果を考慮することができる。

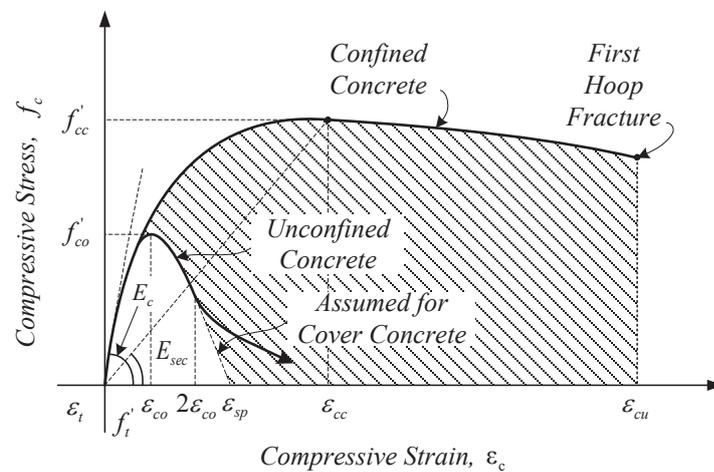


図 9.4.12 横拘束・非横拘束されたコンクリートの応力-ひずみ関係

軸方向のコンクリートの圧縮応力は以下のように定義できる。

$$f_c = \frac{f'_{cc} x^r}{r - 1 + x^r}$$

5) ; Mander, J.B, Priestley, M.J.N and Park, R., "Mander, J.B, tress-Strain Model For Confined Concrete", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.114, No.8, pp. 1804~1826, 1988

6) ; Sheikh, S.A. and Uzumeri, S.M., "Sheikh, S.A. and Uzumeri, S.M., oncrete Columnsnd Uzumeri, S.Div., ASCE, Vol.106, No. ST 5, pp. 1079~1102, 1980

ここで、 f'_{cc} : 横拘束されたコンクリートの圧縮強度

f'_{co} : 横拘束されていないコンクリートの圧縮強度

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}$$

ε_{cc} : 横拘束されたコンクリートの最大圧縮応力時のひずみ

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{co} \left[1 + 5 \left(\frac{f'_{cc}}{f'_{co}} - 1 \right) \right]$$

ε_{co} : 横拘束されていないコンクリートの最大圧縮応力時のひずみ

(但し、一般的に $\varepsilon_{co} = 0.002$ で想定可能)

$$r = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}}$$

E_c : コンクリートの弾性係数、 $E_c = 5,000\sqrt{f'_{co}}$ MPa

$$E_{sec} = \frac{f'_{cc}}{\varepsilon_{cc}}$$

横拘束されたコンクリートの圧縮強度 f'_{cc} は以下のように定義できる。

$$f'_{cc} = f'_{co} \left(-1.254 + 2.254 \sqrt{1 + \frac{7.94 f'_l}{f'_{co}}} - 2 \frac{f'_l}{f'_{co}} \right)$$

ここで、 f'_l : コンクリートの側面拘束応力、 $f'_l = \frac{1}{2} k_e \rho_s f_{yh}$

10. 施工段階解析

10.1 概要

吊橋、斜張橋や PC 橋のような土木構造物は施工中と施工後の構造系が変わって、施工中の架橋脚および一時ケーブルの取り付けと除去、床版と主塔の支持条件の変化等に応じて構造系が変化し続ける。また、段階的な施工により隣接部材との間の材齢が異なるので、部材の弾性係数や強度などの材料特性も異なる。そして、コンクリートのクリープ (Creep)、乾燥収縮 (Shrinkage)、強度の増加 (Aging) と PC ケーブルの弛緩などの材料の時間依存特性による影響で、施工中や施工が完了した後もたわみが変わって応力が再分配されるなど、構造物の挙動が非常に複雑になる。このように施工の進行に応じて継続的に構造系が変化した場合に部材によっては、施工が完了した後、荷重が載荷された時点ではなく、施工中に最大応力が発生することがあり、構造物の各施工段階における応力の変化を予測するためには、正確に施工手順を考慮した時間に依存解析が必要である。

プログラムで施工段階解析を行う時、考慮できる内容は次の通りである。

- 材料の時間依存性
 - 異なる材齢を持つコンクリート部材のクリープ
 - 異なる材齢を持つコンクリート部材の乾燥収縮
 - 時間の経過によるコンクリート部材の強度発現
- 施工段階の表現
 - 任意の材齢を持つ部材の生成及び消去
 - 任意の載荷時点を持つ荷重の載荷及び消去
 - 境界条件の変化

施工段階を考慮した時間依存解析を行うための手順は次の通りである。

1. 構造物をモデリングする。この時任意の施工段階で一緒に生成または消去する要素、荷重及び境界条件などをグループで指定する。
2. クリープや乾燥収縮のような時間依存性材料の特性を定義する。この時時間依存性材料は ACI や CEB-FIP のような規準を選択して生成するか、ユーザーが直接定義することができる。🔗
3. 定義した時間依存性材料を一般材料に割り当てる。これによって時間変化によるコンクリート部材の材料変化を自動的に計算し考慮する。🔗

🔊 On-line Manual の"
モデル>材料 & 断面>時間依存性材料"
を参照

🔊 On-line Manual の"
モデル>材料 & 断面>時間依存性材料
で連結"を参照

🔊 On-line Manual の"
荷重>施工段階解析
データ>施工ステージ
の設定で連結"を参
照

🔊 On-line Manual の"
解析>施工段階解析
制御、解析実行"を参
照

4. 施工時に考慮すべき施工順序を考えて施工段階及び日数を作成する。🔊
 5. 予め作っておいた要素グループ、境界条件グループ、荷重グループを利用して施工段階を定義する。
 6. 解析条件を指定して、構造解析を行う。🔊
 7. 施工段階解析の結果と完成形解析の結果を必要な方法で組み合わせる。
-

10.2 時間依存性材料

プログラムではコンクリートの時間依存性の中で、クリープ(creep)、乾燥収縮(shrinkage)、強度増加(aging)などが考慮できる。

10.2.1 クリープ(creep)及び乾燥収縮(shrinkage)

実際の構造物でのクリープは乾燥収縮とともに発生する。この関係を表したのが図 10.2.1 である。したがって乾燥収縮、弾性変形、クリープをそれぞれ分離して考えることができない。しかし、実際の解析及び設計では、便宜上これらを分離して考慮する。

図 10.2.1 で真の弾性変形(true elastic strain)とは時間とともに増加されるコンクリートの強度による弾性係数の増大で最終的に減少される弾性変形を表したものである。一般的には見掛けの弾性変形を弾性変形と見なすが、プログラムでは解析時にコンクリートの強度発現を考慮することができるので、真の弾性変形をもって解析することができる。

クリープひずみは作用させた応力に比例し、同じ応力のもとでは高強度コンクリートの方が低強度コンクリートより小さいクリープひずみを示す。クリープひずみは弾性ひずみの 1.5~3 倍程度に至って、載荷後 28 日間に全クリープひずみの 1/2 が進行される。最初の 3~4 ヶ月の間に最終値の 3/4 以上が進行されて、2~5 年後には最終値で停止する。

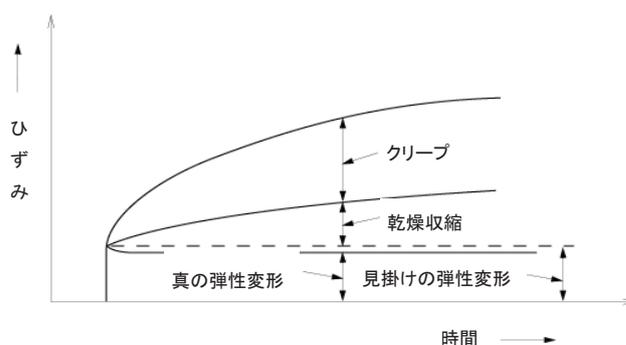


図 10.2.1 時間経過によるコンクリートのひずみ

コンクリートのクリープは次のような要因によって変化する。

1. 水セメント比の増加はクリープの増大をもたらす
2. 応力を受ける時のコンクリート材齢が大きいほどクリープは減少する
3. コンクリートが置かれる周りの温度が高いほど、また湿度が低いほどクリープ変形は大きくなる
4. その他、セメントの種類、骨材の品質、試験体の寸法なども影響を与える

クリープ現象は多くの材料が持っている性質であるが、特にコンクリートは他の材料に比べてその値が大きく、プレストレスの時間的減少の原因の 1 つになるため、設計で無視することができない。普通のコンクリート構造物には主に、自重によってクリープ現象が生じるが、PC 構造物ではプレストレスによってクリープ現象が生じる。

規準では一定の軸方向応力 $\sigma=1$ をコンクリート材齢 t_0 日に载荷した時、材齢 t 日に発生する 1 軸ひずみを $J(t, t_0)$ と仮定する。

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_i(t_0) + \varepsilon_c(t, t_0) = \sigma \cdot J(t, t_0) \quad (10.2.1)$$

ここで、 $J(t, t_0)$ は単位応力が作用するときの総ひずみを表して、それをクリープ関数 (creep function) と定義する。

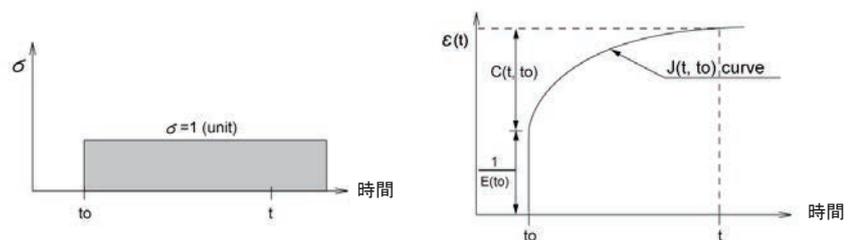


図 10.2.2 クリープ関数及び特性クリープの定義

図 10.2.2 で見られるように、クリープ関数 $J(t, t_0)$ を载荷時の初期弾性変形とクリープ変形の合計で表すと次のようになる。

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + C(t, t_0) \quad (10.2.2)$$

ここで、 $E(t_0)$ は荷重载荷時の弾性係数を、 $C(t, t_0)$ は材齢 t でのクリープ変形を表し、これを特性クリープ (specific creep) といい、またクリープ関数 $J(t, t_0)$ は弾性変形との比率で、次のようにも表せる。

$$J(t, t_0) = \frac{1 + \phi(t, t_0)}{E(t_0)} \quad (10.2.3)$$

ここで、 $\phi(t, t_0)$ はクリープ係数(creep coefficient)で弾性変形とクリープ変形との比率を表し、上記の 2 つの式より特性クリープとクリープ係数は次のような関係が成立する。

$$\phi(t, t_0) = E(t_0) \cdot C(t, t_0) \quad (10.2.4)$$

$$C(t, t_0) = \frac{\phi(t, t_0)}{E(t_0)} \quad (10.2.5)$$

プログラムではクリープ係数や乾燥収縮ひずみの計算式で CEB-FIP や ACI など定めている式を用いることができ、ユーザーが実験による値を直接入力することもできる。ユーザー定義はクリープ係数(creep coefficient)、クリープ関数(creep function)、特性クリープ(specific creep)の 3 つの内、ユーザーの好きな形式で入力することができる。

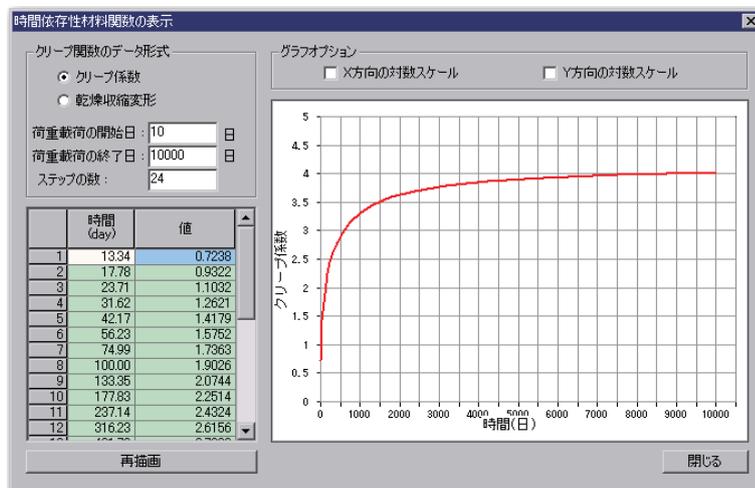


図 10.2.3 ユーザー定義のクリープ係数指定ダイアログボックス

コンクリートのクリープ関数は荷重時間によって、それぞれ違う形状を現わす。すなわち要素の材齢が大きくなればコンクリートの強度増加(aging)効果によって弾性係数が増加するため、コンクリートの即時変形は荷重の荷重時期が遅いほど小さくなる。そして荷重の荷重時間から任意の時間後の変形を見ても、荷重の荷重時期が遅い試験体の方がクリープひずみが小さくなる。

図 10.2.4 はこのような関係を表している。このように荷重時間が遅くなるほど即時変形とクリープ変形が減少するのは、コンクリートの水和程度と強度発現のためである。したがって、ユーザー定義でクリープ関数を入力する時はコンクリートの強度発現特性がよく考慮できるように、クリープ関数における荷重時間の範囲が、時間依存解析で考慮する要素の材齢(荷重時間)を含む必要がある。また、異なる荷重時間のクリープ関数を多く入力するほど正確な解析結果が得られる。

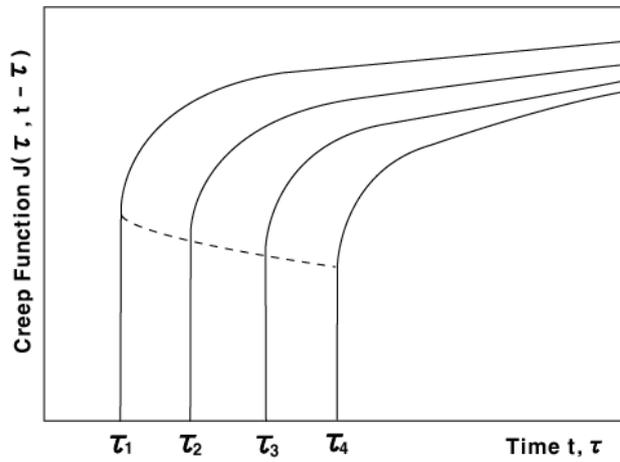


図 10.2.4 荷重載荷時間の差によるクリープ関数

表 10.2.1 普通コンクリートのクリープ係数

持続荷重を載荷する時の コンクリートの材齢		4~7	14	28	90	365
クリープ係数	早強セメント	2.6	2.3	2.0	1.7	1.2
	普通セメント	2.8	2.5	2.2	1.9	1.4

乾燥収縮は部材に発生する応力とは無関係な時間の関数で、一般的に時間 t_0 から t までに発生した乾燥収縮によるひずみを次のように表す。

$$\varepsilon_s(t, t_0) = \varepsilon_{s0} \cdot f(t, t_0) \quad (10.2.6)$$

ここで、 ε_{s0} は最終時の乾燥収縮係数、 $f(t, t_0)$ は時間の関数、 t は観測時点、 t_0 は乾燥収縮の発生時点を表す。

10.2.2 クリープの計算方法

クリープは応力が発生した状態から、追加的な応力度の増加なしに時間の経過と共に変形が発生する現象で、応力の履歴と時間が重要な要因として作用する。クリープの特性として荷重が載荷された時点で1番大きく発生して、時間が経つほど急激に減少する傾向がある。クリープを正確に考慮するためには、応力の時間に対する履歴と時間によるクリープ係数を用いるべきであるが、あらゆる部材の応力の履歴を保存し、すべての応力履歴に対してクリープを計算することは、データ保存量と計算量を大きく増加させるために、プログラム内部ではクリープを適切に計算できる方法を採用している。クリープは非力学的(non-mechanical)変形であるため、拘束条件によっては、応力は発生せず変形のみが発生する場合もある。

一般的にクリープを考慮する方法の1つは、要素別にクリープ係数を各解析段階で直接入力して、現在までに発生した要素の応力を直接用いる方法である。もう一つはクリープの特性関数を数式化して応力と時間に対する積分概念を用いて計算する方法である。前者は各段階で要素別クリープ係数を算定して入力する方法で、後者はプログラム内部で規準によるクリープ係数を使用して応力履歴を積分してクリープ量を計算する方法である。

プログラムでは上の2つの方法を適用することができ、1つの要素に2つの方法が共に入力された場合には要素別にクリープ係数を入力した方法が優先される。全体的には1つの方法を用いるのが妥当であるが、最後の段階での20～30年ほどの時間を取り入れる場合や特定の要素に対してクリープ荷重を考慮しようとする場合には2つの方法を適切に併用することができる。

要素別のクリープ係数を算定して直接入力する方法は、クリープ係数の算定方法によって相当に結果が変わりうるので、応力履歴と時間に関する十分なデータに基づいてクリープ係数を算定することで近似的な値が求められる。

しかし、経験や実験などで各段階でのクリープ係数が分かっている時は直接入力して使用するのが効率的な場合もある。各施工段階で要素別クリープ係数を入力したクリープ荷重グループをアクティブにすれば、入力されたクリープ係数と現在までに発生した応力を用いてクリープ荷重を計算できるようになる。

この方法はユーザーがクリープ係数を直接入力することで、荷重の大きさを容易に理解できて使用が簡単であるが、クリープ係数を算定しなければならないという難しさがある。クリープ係数を用いてクリープ荷重を計算する方法は次式の通りである。

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \phi(t, t_0) \varepsilon(t_0) \quad \text{:クリープひずみ} \quad (10.2.7)$$

$$P = \int_A E(t) \varepsilon_c(t, t_0) dA \quad \text{:クリープ変形による荷重} \quad (10.2.8)$$

ここで、

$\varepsilon(t_0)$: 時間 t_0 での応力度によるひずみ

$\phi(t, t_0)$: 時間 t_0 から t までのクリープ係数

クリープ特性関数を数式化して応力と時間に対する積分を用いる方法は次の通りである。任意の時間 t_0 から時間 t までの全クリープ量は、各段階で発生する応力によって次式のように表すことができる。

$$\varepsilon_c(t) = \int_0^t C(t_0, t-t_0) \frac{\partial \sigma(t_0)}{\partial t_0} dt_0 \quad (10.2.9)$$

ここで、

$\varepsilon_c(t)$: 時間 t でのクリープひずみ

$C(t_0, t-t_0)$: 特性クリープ(specific creep)

t_0 : 荷重載荷時点

上式で応力は各段階で一定だと仮定すると、全ひずみを段階別に区分したひずみの和で表示して、下式のように表すことができる。

$$\varepsilon_{c,n} = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta \sigma_j C(t_j, t_{n-j}) \quad (10.2.10)$$

上式を用いて時間 $t_n \sim t_{n-1}$ の間に発生するクリープひずみの増分 ($\Delta \varepsilon_{c,n}$) を整理して表すと下式のようになる。

$$\Delta \varepsilon_{c,n} = \varepsilon_{c,n} - \varepsilon_{c,n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta \sigma_j C(t_j, t_{n-j}) - \sum_{j=1}^{n-2} \Delta \sigma_j C(t_j, t_{n-j}) \quad (10.2.11)$$

特性クリープを次のように Dirichlet 級数の degenerate kernel で表現すると応力の全体履歴を保存する必要なしに、クリープによる増分ひずみを計算することができる。

$$C(t_0, t-t_0) = \sum_{i=1}^m a_i(t_0) \left[1 - e^{-(t-t_0)/\Gamma_i} \right] \quad (10.2.12)$$

ここで、

$a_i(t_0)$: 荷重載荷時間 t_0 に係わる特性クリープ曲線の初期形状に係わる係数

Γ_i : 時間の経過に伴う特性クリープ曲線の形状に関する値

上の特性クリープ数式を導入して、新規に増分ひずみを整理すると次の式のようになる。

$$\Delta \varepsilon_{c,n} = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^{n-2} \Delta \sigma_j a_i(t_j) e^{-(t-t_0)/\Gamma_i} + \sigma_{n-1} a_i(t_{n-1}) \right] \left[1 - e^{-(t-t_0)/\Gamma_i} \right]$$

$$\Delta \varepsilon_{c,n} = \sum_{i=1}^m A_{i,n} \left[1 - e^{-(t-t_0)/\Gamma_i} \right] \quad (10.2.13)$$

ここで、

$$A_{i,n} = \sum_{j=1}^{n-2} \Delta \sigma_j a_i(t_j) e^{-(t-t_0)/\Gamma_i} + \Delta \sigma_{n-1} a_i(t_{n-1})$$

$$A_{i,n} = A_{i,n-1} e^{-(t-t_{n-1})/\Gamma_i} + \Delta \sigma_{n-1} a_i(t_{n-1})$$

$$A_{i,1} = \Delta \sigma_0 a_i(t_0)$$

上記のように、各段階の要素の増分ひずみは、前段階で発生する応力と前段階までに修正された応力の累積値を用いて計算することができる。この方法は、応力の変化を考慮した比較的正確な解析ができて、ユーザーは必要な物性値だけ入力すればクリープ係数を別度に計算しなくても内部で自動的に計算を行うメリットを持っている。

しかし、ここでは規準で提案した式を用いるため、ユーザーが経験による値を要素に直接入力することができなく、特定の要素に特定のクリープ値を入力することもできないといった問題点がある。そしてこの方法は解析の時間間隔に大きく影響を受ける。

一般的な施工段階は必要とされる時間が大きくないため解析に問題はないが、1つの段階で大きな時間間隔が入力される場合には内部的に時間間隔を作ってクリープの効果を適切に計算するようにならなければならない。クリープの特性上、時間間隔はログ(log)スケールで分割するのが望ましく、プログラムでは間隔数さえ入力すれば自動的にログスケールで分割する機能を持っている。妥当な時間間隔の数は決まってないが、細かくすればするほど正解に近づくようになるので、大きい時間間隔が導入する段階では適当な間隔で分割するのが望ましい。

10.2.3 乾燥収縮の概念

乾燥収縮は、コンクリート部材が時間によって収縮する現象で、各設計規準で規定する乾燥収縮特性曲線を使用して解析に反映している。フレーム部材の場合には長さ方向の乾燥収縮のみを考慮するが、面や立体の場合には、2軸または3軸まで考慮している。

midas Civil プログラムで乾燥収縮解析では CEB-FIP Code、ACI Code、日本の道路橋示方書、実験データを使用したユーザー定義などによる乾燥収縮特性曲線が利用できる。乾燥収縮特性曲線を使用して施工段階の時間経過に応じる変形量を計算して、その段階での乾燥収縮ひずみに使用する。

$$\varepsilon_{sh}(t_2, t_1) = \varepsilon_{sh}(t_2, t_0) - \varepsilon_{sh}(t_1, t_0)$$

ここで、
 $\varepsilon_{sh}(t_2, t_1)$: 施工段階 t1 から t2 までの乾燥収縮ひずみ
 $\varepsilon_{sh}(t_1, t_0)$: 部材の材齢 t0 から t1 までの乾燥収縮ひずみ
 $\varepsilon_{sh}(t_2, t_0)$: 部材の材齢 t0 から t2 までの乾燥収縮ひずみ

乾燥収縮による荷重は弾性係数、断面積、乾燥収縮ひずみの積で計算して、軸方向にのみ生成される。

$$F_{primary} = EA\varepsilon_{sh}$$

乾燥収縮変形は温度、クリープによる変形のように、非力学的(Non-mechanical)変形であるため、部材力計算時のひずみでは、荷重によるひずみから乾燥収縮によるひずみを引いて計算する。

$$F_{secondary} = EA(\varepsilon - \varepsilon_{sh}) = F - F_{primary}$$

したがって、軸方向の拘束のない構造物で乾燥収縮による効果は部材力を作らずに変位だけを発生させることになる。外部荷重がなくても、拘束によって乾燥収縮によって発生する部材力はクリープ変形を誘発することになる。乾燥収縮変形は拘束条件と時間に影響を受ける。

10.2.4 時間による弾性係数の変化

コンクリートの圧縮強度と弾性係数は時間に応じて変化するため、長い時間の経過によってコンクリート構造物固有の強度を発揮することになる。実際に、PC 構造物や橋梁の施工でコンクリートの初期材齢を正確に予測して、計画された構造物の形状と強度を有するためには、これらの強度の増加効果を合理的に模擬することが不可欠である。ACI Code の場合、コンクリートの圧縮強度と弾性係数式は次の通りである。

$$f_{ck}(t) = \frac{t}{a+b} f_{91}$$

単位体積質量(mc)が 1450 ~ 2500kg/m³ のコンクリートの場合

$$E_c(t) = 0.077 m_c^{1.5} \sqrt[3]{f_{cu}(t)} \quad (\text{MPa})$$

但し、普通骨材を使用したコンクリート($mc=2300\text{kg/m}^3$)の場合は

$$E_c(t) = 8,500 \sqrt[3]{f_{cu}(t)} \quad (\text{MPa})$$

ここで、
 f_{91} : 91 日平均圧縮強度
 $f_{ck}(t)$: 任意時間 t 日の圧縮強度
 $E_c(t)$: 材齢 28 日の弾性係数
 $f_{cu}(t) = f_{ck}(t) + 8$ (MPa)

10.2.5 強度発現関数

プログラムではコンクリート部材の材齢による弾性係数の変化を考慮することで、強度発現効果を含んだ解析を行うことができる。図 10.2.5 のように ACI、CEB-FIP、またはコンクリート標準仕様書などの規準によるコンクリートの強度発現関数を定義することができ、ユーザーが直接入力することもできる。プログラムではこのように定義された強度発現関数を参照して、それぞれの施工段階で定義した時間の経過に伴うコンクリートの強度変化を自動で計算して解析を行う。

図 10.2.5 で定義した時間依存性材料(クリープ、乾燥収縮、強度発現)は、一般材料に割り当てられた解析に適用することができる。

On-line Manual の"
モデル>材料 & 断面
>時間依存性材料
で連結"を参照

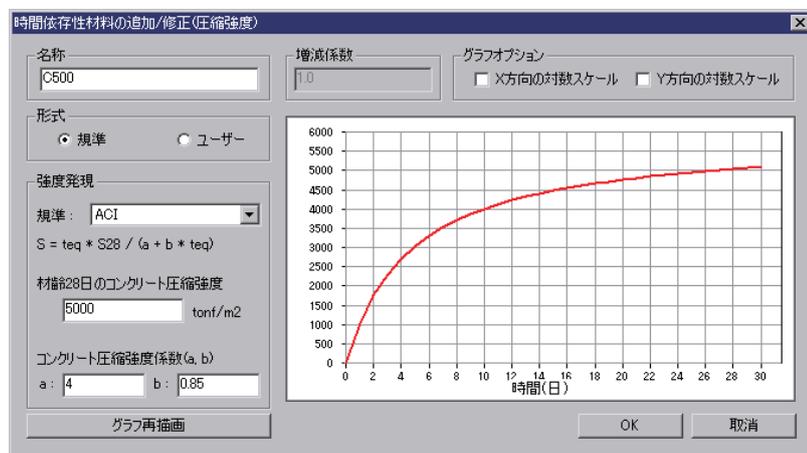


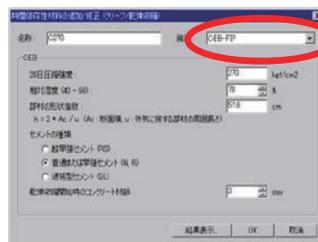
図 10.2.5 規準によるコンクリートの強度発現関数定義

10.3 時間依存性材料データの入力手順

プログラムでコンクリートの乾燥収縮と長期たわみを考慮した建築構造物の施工段階解析や水和熱解析を実行する場合、要素の材齢による時間依存した材料特性をモデルデータに入力しなければならない。

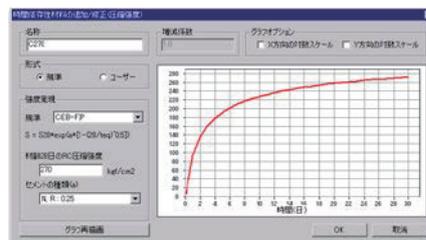
時間依存性材料データの入力方法は次の通りである。。

1. モデル>材料&断面>時間依存性材料(クリープ/乾燥収縮) メニューで乾燥収縮と長期たわみに対する材料データを定義する



材料の特性を定義するための規準選択

2. 規準 選択ボックスでユーザー定義 を選択して適用するには、まずモデル>材料&断面>時間依存性材料(クリープ/乾燥収縮)関数 でユーザーが直接クリープと乾燥収縮関数を定義しなければならない
3. モデル>材料&断面>時間依存性材料(圧縮強度) で時間によるコンクリートの弾性係数変化を定義する



コンクリートの弾性係数変化

4. モデル>材料&断面>時間依存性材料で連結 で時間依存した材料特性を既に入力された材料データに割り当てる



5. 時間依存性材料で連結ダイアログ

10.4 施工段階の定義及び構成

10.4.1 概要

プログラムではベースステージ(Base Stage)と施工ステージ(Construction Stage)そして最終施工ステージ(Final Stage)の 3 つのステージ(stage)が存在するが、各ステージの特性は次の通りである。

ベースステージ(base stage)

施工ステージが定義されていない段階、あるいは施工ステージが定義されていて構造モデリング及び要素グループ、境界条件グループ、荷重グループの定義と構成が行われるステージ

施工ステージ(construction stage)

施工段階荷重に対する解析が実際に行われるステージで、該当のステージでアクティブにする境界条件グループと荷重グループにあたる境界条件及び荷重条件を入力することができるステージ

最終ステージ(final stage)

施工ステージの最終ステージで、施工段階荷重の他に一般荷重及び応答スペクトル解析などの特殊解析が実行されるステージ

各施工段階は要素グループ、境界条件グループ、荷重グループのアクティブ(Activation)と非アクティブ(Deactivation)の定義によって構成される。したがって、各グループは等しい施工段階でアクティブ化または非アクティブ化される要素、境界条件、荷重条件などの集合でなければならない。

各施工段階別に反映することができる内容は次の通りである。

1. 任意の材齢を持つ部材の生成及消去
2. 任意の载荷時点を持つ荷重の载荷及び消去
3. 境界条件の変化

プログラムで使われる施工段階構成の概念図を示す。施工段階は各段階別期間(duration)だけで手軽に定義される。期間が‘0’の施工段階も可能で、施工段階が定義されれば基本的に1番目ステップと最終ステップが生成される。実質的な要素、境界条件及び荷重の生成と消去はそれぞれのステップで行われる。

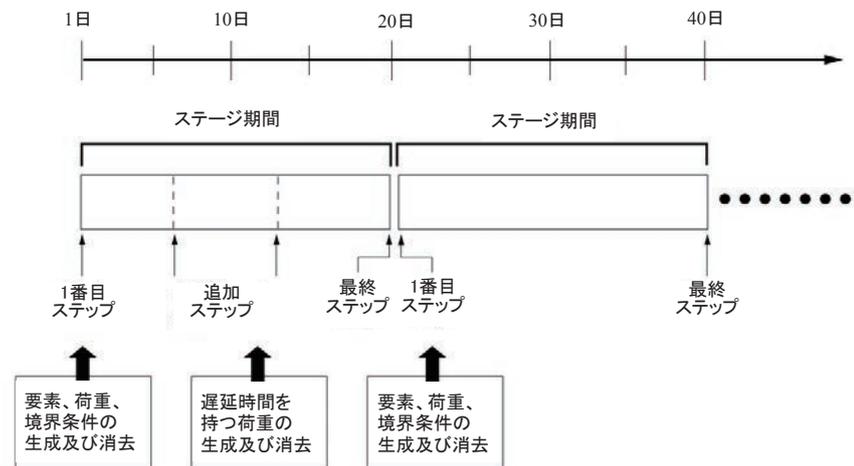


図 10.4.1 施工段階構成の概念

基本的に要素の生成及び消去、境界条件の変化、荷重の載荷及び消去などのすべての変更事項は各施工段階の1番目ステップで行われる。したがって実際施工中に様々な原因によって構造要素の変化が発生すれば、それを考慮するための施工段階を生成させなければならない。すなわち構造要素の変化が多いほど施工段階の数は多くなる。

要素及び境界条件などの解析モデルの変化は各施工段階の1番目ステップでのみ行われる。しかし、荷重の変化は解析の便宜のために施工段階内に追加的なステップを作ってそのステップに荷重を載荷及び消去することで考慮できる。すなわち、任意の施工段階内で遅延時間を持つ荷重が適用でき、この機能を使えば解析モデルの変化なしに仮設材の設置や消去による荷重の変化を改めて施工段階を作らないで手軽に考慮することができる。

また、施工段階内に追加ステップを多く定義すれば、クリープと乾燥収縮を考慮した時間依存解析により、正確な解析結果を得ることができる。しかし、追加ステップの定義が多すぎると、解析時間が増加して非効率的になりがちなので注意しなければならない。特に施工段階解析条件(解析>施工段階解析制御)で時間依存性材料(クリープ、乾燥収縮、弾性係数の変化)を考慮しないように設定して解析を行うと、追加ステップがいくらか多くても解析結果には何の影響も及ぼさない。

任意の施工段階で指定した材齢を持った要素が生成されると、各施工段階に要素に指定した持続時間が経過するようになる。特定施工段階で、要素の材料特性は時間の経過によって変化するようになるが、プログラムではこのように変化する材料特性を各施工段階で入力しなくても要素の材齢さえ入力すればあらかじめ定義された時間依存性材料(モデル>材料&断面>時間依存性材料)を参照して内部的に自動計算して考慮する。

同じ施工段階で同じ材齢を持つ 2 つの要素を生成させれば、その 2 つの要素には常に同じ時間が経過するようになる。しかし、一緒に生成された要素でも特定の要素だけ時間が経過するようにする必要がある。この時には時間荷重(荷重>施工ステージ用の時間荷重)機能を使えば、任意の施工段階で特定の要素にだけ時間の経過が反影されるようにすることができる。

10.4.2 要素の生成と除去

要素の生成と除去は段階施工における構造物の剛性、自重および境界条件に影響を与える。ここでは要素の追加と除去について説明する。

段階施工における構造物の剛性は式(10.4.1)のように現在の段階施工で使用される要素の剛性を組み合わせて計算できる。段階施工別の要素は、全段階施工で使用される要素が保存されているデータベースから、初期段階から現段階までにアクティブされる要素を追加し、非アクティブされる要素は除去することで定義する。

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{L}_i \quad (10.4.1)$$

ここで、 \mathbf{K} は現在の段階施工における構造物の全体剛性、 \mathbf{L}_i は全体剛性において要素剛性の位置を表すマトリックス、 \mathbf{k}_i は現段階にアクティブされる要素の剛性、 n は現段階にアクティブされる要素数である。

要素剛性は要素を構成する節点の自由度間の剛性関係で離散化し計算される。計算された要素剛性は、式(10.4.1)のように同一の節点自由度を持つ隣接要素の剛性に累積することで、全体剛性に組み合わされる。この時、隣接する要素との節点自由度間の関係を表す情報を式(10.4.1)のマトリックス \mathbf{L}_i で定義する。マトリックス \mathbf{L}_i は現在の段階施工で使用される節点の自由度の情報を利用し要素別に定義され、段階施工毎に要素を追加または除去するときに新たに更新される。

現在の段階施工で新たに追加される要素は初期応力が $\mathbf{0}$ となり、前段階で既に追加された要素は前段階での最終応力が初期応力となる。

10.4.3 荷重の生成と除去

段階施工解析は段階別の増分の形で構成され、このために段階別の増分荷重が必要となる。現在の段階施工における増分荷重 $\Delta \mathbf{F}^{\text{current}}$ は、現在までのトータル荷重 $\mathbf{F}^{\text{current}}$ から前段階でのトータル荷重 $\mathbf{F}^{\text{previous}}$ を引くことで計算される。

$$\Delta \mathbf{F}^{\text{current}} = \mathbf{F}^{\text{current}} - \mathbf{F}^{\text{previous}} \quad (10.4.2)$$

段階施工別の荷重 $\mathbf{F}^{\text{current}}$ は、全段階施工で使用される荷重が保存されているデータベースから、初期段階から現段階ままでにアクティブされる荷重を追加し、非アクティブされる荷重は除去することで定義する。

現在の段階施工におけるトータル荷重は次のように表面力と物体力に区分できる。

$$\mathbf{F}^{\text{current}} = \mathbf{F}_{\text{surface}}^{\text{current}} + \mathbf{F}_{\text{body}}^{\text{current}} \quad (10.4.3)$$

ここで、表面力には節点荷重や分布荷重等のように節点に作用する荷重があり、物体力には自重のように要素に作用する荷重がある。表面力の場合は、荷重が作用する節点の自由度情報を用いて組み合わせできるが、物体力の場合は、要素の追加と除去に関連するために現在の段階施工で計算される式(10.4.1)のマトリックス \mathbf{L}_i を用いて組み合わせる。

1つの段階施工はさらに荷重ステップに再分割できる。荷重ステップにおけるトータル荷重は式(10.4.2)から計算された段階施工の増分荷重 $\Delta \mathbf{F}^{\text{current}}$ に、予め定義された現在の段階施工内での荷重係数 α を掛けて計算できる。これを任意の荷重ステップ i について表すと以下のようなになる。

$$\mathbf{F}_i^{\text{current}} = \mathbf{F}^{\text{previous}} + \alpha_i^{\text{current}} \cdot \Delta \mathbf{F}^{\text{current}} \quad (10.4.4)$$

一方、任意の荷重ステップ i における構造物の解を求める線形代数方程式は次のようになる。

$$\mathbf{F}_i^{\text{ubf}} = \mathbf{K}_i \mathbf{d}_i \quad (10.4.5)$$

ここで、 \mathbf{K}_i は i 番目の荷重ステップにおける構造物の全体剛性で、 \mathbf{d}_i は i 番目の荷重ステップにおける節点変位を表す。 $\mathbf{F}_i^{\text{ubf}}$ は i 番目の荷重ステップにおける不平衡力で、現在ステップのトータル荷重から以前ステップのトータル内力を引くことで計算される。

$$\mathbf{F}_i^{\text{ubf}} = \mathbf{F}_i^{\text{current}} - \mathbf{F}_{i-1}^{\text{internal}} \quad (10.4.6)$$

式(10.4.6)の $\mathbf{F}_{i-1}^{\text{internal}}$ は、以前の荷重ステップにおける構造物のトータル内力で、要素の応力を使って次のように計算される。

$$\mathbf{F}_{i-1}^{\text{internal}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_j^T \mathbf{f}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_j^T \left(\int_V \mathbf{B}_j^T \boldsymbol{\sigma}_j dV \right) \quad (10.4.7)$$

ここで、 \mathbf{f}_j は要素の部材力、 \mathbf{L}_j はトータル荷重で要素荷重の位置を表すマトリックス、 \mathbf{B}_j は変位-ひずみ関係マトリックス、 $\boldsymbol{\sigma}_j$ は要素の応力、 V は体積、 n は現在の段階施工にアクティブされる要素数である。

この時 $i=1$ の場合、 $\mathbf{F}_0^{\text{internal}}$ は以前の段階施工の最終荷重ステップに対するトータル内力を表す。また、要素の応力は段階施工内の各荷重ステップの計算が終わる時点でアップデートされる。

10.4.4 境界条件の生成と除去

現在の段階施工における境界条件は要素や荷重と同じく、全段階施工で使用される境界条件が保存されているデータベースから、初期段階から現段階までにアクティブされる境界条件を追加し、非アクティブされる境界条件を除去することで定義する。この時、現段階に追加された境界条件と除去された要素によって、どの要素にも含まれない自由節点ができることがある。このような自由節点はアクティブされた要素の節点情報を使って除去することで、解析に不要な節点の自由度をとり除き解析速度を向上させることができる。

10.4.5 注意事項

任意の施工段階に要素を生成させる場合は、生成される要素の材齢を指定しなければならない。材齢が‘0’の要素を生成させるということはコンクリートの打込みの瞬間から考慮をするということである。

しかし、一般的に構造物をモデリングして解析する時、型枠などの仮設構造物はモデルに含まれないため、硬化されない状態のコンクリートを解析するという事は、解析上意図しない結果をもたらす恐れがある。特に材齢が‘0’の要素を生成させて時間の経過による強度発現を考慮して解析を行うとすれば、コンクリート打込み後 24 時間までは強度を発現することができないので、意味のないおびただしい変位が計算される恐れがある。

したがって、施工段階をモデリングする時は一般的に型枠の中にある硬化される前のコンクリートは仮設構造物と一緒に荷重で考慮して、型枠を取り除いた後、実質的な要素が生成されると考えるのが正しい解析方法である。

この応力の再分配率を適当に調節すれば要素を消去しながら、残っている要素に伝達される応力の量を調節することができる。この機能は、施工段階解析において各段階別で要素が消えたとしても応力の再分配が完全に終わってない状態などを考慮する時使われる。

境界条件をアクティブにする時のオプションで"元の位置"を選択すると、境界条件がアクティブになる節点の、それ以前の施工段階での変位を、反対方向にして強制変位荷重を付与して節点の位置を元の位置へ来るようにした後、境界条件を生成する。一方、アクティブにする時のオプションを"変形後の位置"で選択すると、境界条件がアクティブになる節点の初期位置ではない変形された位置に境界条件を生成する。

施工段階を考慮した時間依存解析では、前の段階で発生した構造係の変化及び荷重履歴が、後の施工段階の解析結果に影響を及ぼすようになる。したがって、プログラムではそれぞれの施工段階解析モデルを独立モデルとして作って解析を行うのではなく、施工段階別に解析モデルまたは荷重の変更されたものだけ入力して解析をした後、前の段階の解析結果に累積させて解析結果を出力する累積モデル概念を用いている。

したがって、任意の施工段階に荷重を載荷すれば、以後の施工段階では載荷された荷重を消去しない限り、続いて荷重が加えられた状態になる。要素の生成も、任意の施工段階に必要なすべての要素を生成させるのではなく、その施工段階に必要な要素だけ生成させる。要素は一度生成されるとまた生成することができなく、既に生成された要素のみを消滅させることができる。

施工段階解析に使われる荷重の荷重ケースは、タイプが"施工ステージ荷重"に設定されている時だけ使用が可能である。施工段階解析に使われる荷重条件は、いくつあったとしても図 10.5.2 のように1つの解析結果に組合される。これは、施工段階解析では、時間依存性材料の非線形性によって荷重ケースの間の線形組合せが不可能であるか

らである。施工段階解析を実行すれば図 10.4.2 のように累積された施工段階解析結果と最大値結果、最小値結果が生成される。このように生成された施工段階解析結果は完成形モデルに対する一般解析結果と組合せる。

施工段階解析を実行してみると、最後の施工段階(完成形)ではない任意の中間段階で構造的に重要な施工段階が発生することがある。このような重要な中間施工段階には、特別な荷重を考慮して様々な解析を実行する必要がある。

プログラムでは"最終ステージ"指定機能を利用して任意の中間施工段階を完成形であるように設定することができる。"最終ステージ"に指定された施工段階は、プログラム内部では完成形として考慮するので、一般荷重を加えて解析を実行することができ、時刻歴応答解析、応答スペクトル解析などプログラムの多様な解析機能を適用することができる。

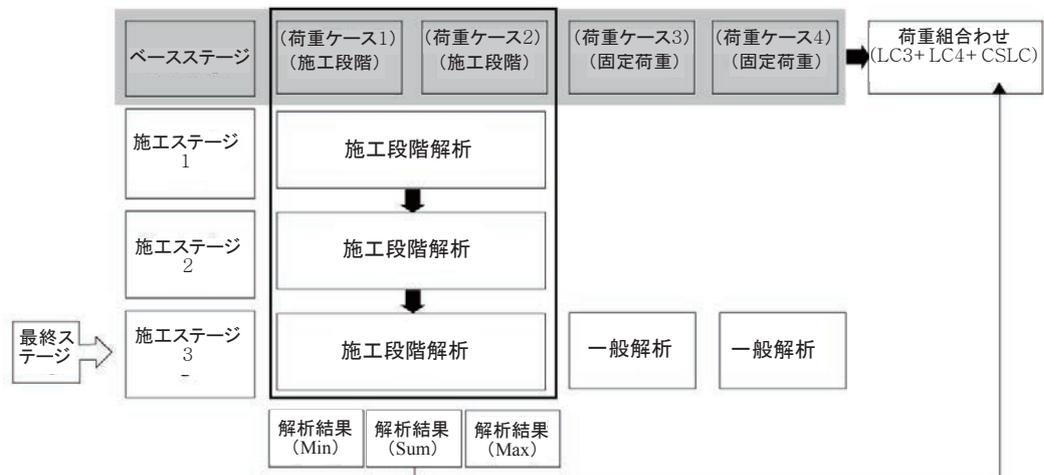
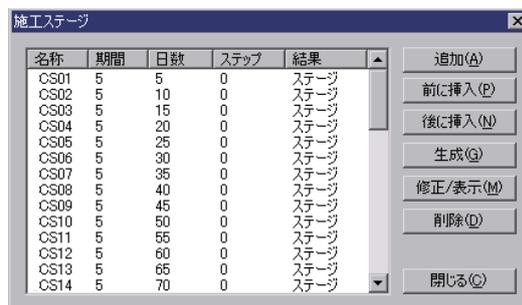


図 10.4.2 施工段階解析結果との荷重組合せ概念図

10.5 施工段階解析手順

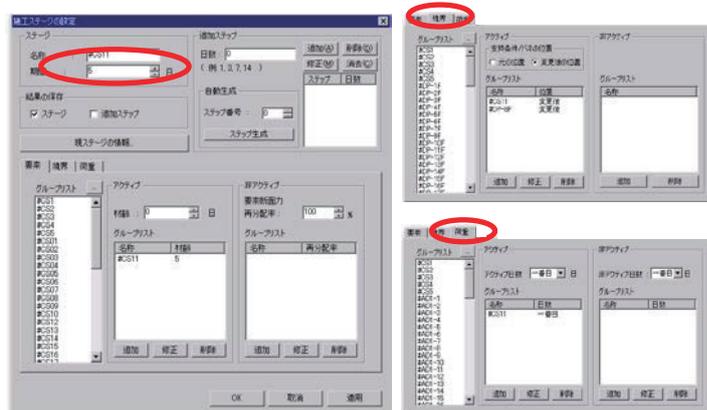
施工段階解析用の一般的なモデリングの手順は次の通りである。

1. 境界条件と荷重条件を除いた構造物をモデリングする。
2. モデル>グループ>要素グループの定義で要素グループを定義し、同時に施工または除去される要素を要素グループに割り当てる。
3. モデル>グループ>境界グループの定義で境界条件グループを定義する。
4. モデル>グループ>荷重グループの定義で荷重グループを定義する。
5. 荷重>施工段階解析データ>施工ステージの設定で **Add** ボタンをクリックして施工段階を構成する。 **Generate** ボタンをクリックして持続期間 (duration) が一定のいくつかの施工段階を先に定義した後 **Modify/Show** ボタンをクリックしてそれぞれの施工段階を構成することもできる。



施工ステージの設定ダイアログボックス

6. 施工ステージの設定ダイアログボックスで施工段階の持続期間(duration)を入力して、解析結果の保存可否を選択する。解析モデルが変わらない状態で時間差を持つ荷重が載荷される場合には荷重が載荷される時点にあたる追加ステージを定義する。



施工ステージの設定ダイアログボックス

7. 要素タブのグループリストで生成または消去する要素グループを選択してアクティブ化または非アクティブ化させる。材齢は生成される部材の初期材齢を意味し、要素断面力再分配率は消去する部材の断面力再分配率を意味する。
8. 境界タブのグループリストで追加または消去される境界条件グループを選択してアクティブ化または非アクティブ化させる。
9. 荷重タブのグループリストで追加または消去される荷重グループを選択してアクティブ化または非アクティブ化させる。アクティブ日数と非アクティブ日数は荷重が載荷または除去される時点の意味する。
10. 施工段階の構成を完了したら施工ステージツールバーで施工段階を選択しながら各施工段階の境界条件グループと荷重グループにあたる境界条件と荷重を入力する。

10.6 非線形施工段階解析

大変形が発生する構造物の施工段階解析では、構造物の幾何非線形性を考慮した施工段階解析が必要である。非線形性を考慮する施工段階解析方法には、各ステップを独立した構造物で仮定して解析を実行する方法と、以前段階の解析結果を反映して解析を実行する方法がある。各方法の詳細について以下で説明する。

10.6.1 施工段階を独立的に解析する方法

プログラムではベースステージ(Base Stage)と施工ステージ(Construction Stage)そして最終施工ステージ(Final Stage)の 3 つのステージ(stage)が存在するが、各ステージの特性は次の通りである。

各施工段階を独立したモデルで仮定できる構造物に適用可能である。各段階の構造物、荷重、境界条件だけでモデルを構成し、幾何非線形解析を実行し、懸垂構造物の解析に適している。各ステップを個別に想定するので、以前段階の影響を受けず、時間依存特性を反映することができない。各段階の解析には、幾何非線形の静的解析を使用する。

吊橋の逆方向解析に適用でき、大変形解析用の初期部材力を使用すると、荷重平衡を成す完成系の状態が再現できる。完成系を最初のステップにして施工の逆方向に施工ステップを構成すれば吊橋の逆解析が可能である。

主な解析手順は以下の通りである。

-
1. 各施工段階の独立した解析モデルを設定する。施工段階別にアクティブになった構造、荷重、境界条件グループの情報を使用して、独立した解析モデルを設定する。
 2. 初期部材力が入力された場合には使用オプションによって、外力と内力を作成する。
大変形解析用の初期部材力から幾何剛性を計算するための初期部材力 (Initial Forces for Geometric Stiffness) を使用すると、荷重の追加入力なしに完成系を構成することができる。この場合の完成系の外力と内力は、初期部材力を使用して計算する。各施工段階では部材を除去したり、荷重を追加することにより構成される。
大変形解析用の初期部材力で部材の平衡節点力 (Equilibrium Element Nodal Forces) を使用すると、外部荷重を使用して完成系を構成することができる。この場合の外力はユーザーが入力した外部荷重で、内力は節点平衡力を使用して計算する。各施工段階では荷重や部材を除去することにより構成される。
 3. 各段階の結果をまとめる。
-

コンクリートの時間依存特性は、各段階の独立した解析方法により、反映することができない。

10-6-2 施工段階を以前段階に累積して解析する方法

施工段階が一般の線形施工段階と同じ方法で構成され、かつ幾何非線形性を考慮して解析を実行する方法である。各ステップは以前ステップの平衡状態に構造、荷重、境界条件が追加されるように構成される。以前ステップで収束された荷重と部材内力を現段階の初期値に使用して解析を実行する。クリープや乾燥収縮のようなコンクリートの時間依存特性を反映することができる。各段階の解析は、幾何非線形の静的解析方法を使用する。

大変形が発生する構造物の順方向の施工段階解析に適用が可能であり、主な解析手順を整理すると、次の通りである。

1. 以前の施工段階の平衡状態を使用して、現段階の初期状態を計算する。以前ステップの部材力、変位、荷重を使用して現段階の初期状態を計算する。部材力と荷重を使用して外力と内力を計算し、変位を使用して現段階の初期変位状態を計算する。
2. 現段階に追加された部材と荷重を使用して現段階の解析モデルを構成する。以前段階の変位を使用して、現段階に追加された部材の初期接線変位を計算する。現段階で追加された荷重を以前段階の外力に加えて外力を設定する。PC 荷重/クリープ/乾燥収縮変形による荷重は内力に含まれる。
3. 現段階の外力と内力に対する非線形解析を実行する。静的の幾何非線形解析方法を使用して平衡状態解析を実行する。
4. 現段階の結果を保存する。現段階の結果と次の段階の解析に必要なデータを保存する。

非線形施工段階の累積モデルに使用できる要素はトラス、梁要素に制限されている。

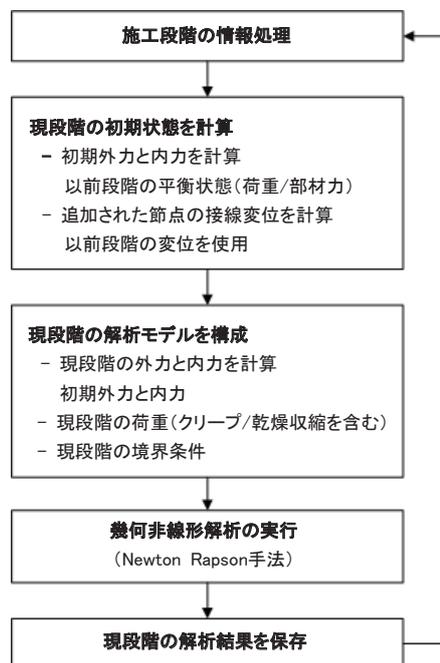


図 10.6.1 非線形施工段階の累積モデルの解析順序

10.7 吊橋の平衡状態解析

midas Civil で吊橋の初期形状を決定する解析ステップは大きく二つに分けることができる。一つ目は、ケーブルシステムだけの形状決定の段階で、二つ目はケーブルシステムと補剛桁、主塔システムの両方考慮した全体構造系の形状を決定する段階である。

他定式吊橋の初期形状は、一つ目のケーブルシステムだけの形状解析で十分であるが、自定式吊橋の場合には主ケーブルが補剛桁に軸力を発生させ補剛桁に軸方向の変位が起きるので、この影響を考慮するために二つ目である全体構造系の形状決定が必要である。

10.7.1 ケーブルシステムだけの吊橋の平衡状態決定(吊橋ウィザード)

吊橋の平衡状態を計算するための最初の段階は、吊橋ウィザードで計算できる。

荷重平衡式を使用して、ケーブルの節点座標とケーブルの張力を計算する方法を整理すると次の通りである。

橋の自重と主ケーブル部材の張力との間の平衡方程式からケーブル座標とケーブル部材の張力を算定する。この方式は垂直と水平の両方でサグ(Sag)を有する MONO-DUO 形式の吊橋の形状決定も可能で、次の基本仮定下で解析を行う。

- ハンガーは、橋軸直角方向でのみ傾斜を成し、橋軸方向には垂直である。
- 主ケーブルの水平張力で橋軸方向の成分は全スパンに対して一定である。
- 主ケーブル-ハンガーの連結節点と節点間のケーブル部材は放物線形状ではなく直線状と仮定する。
- 主ケーブルの両端の座標、中央径間のサグ、ハンガーの補剛桁の定着点、補剛桁の死荷重等は既知の値と仮定する。

基本的には垂直、水平面にケーブルを投影してそれぞれの平面上で張力と死荷重の平衡関係から解析を行う。

10.7.2 垂直面内での解析

下図は主ケーブルの垂直面の投影形状を示している。一つ径間内のハンガーの全体数を $N-1$ 個とすると、次のように全体区間を N 個の区間に分割することができる。

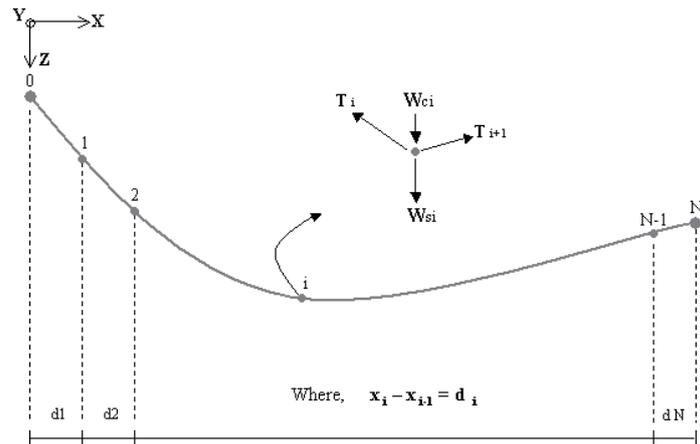


図 10.7.1 X-Z 平面に投影された主ケーブルの形状と力の平衡

ここで、 W_{si} は補剛桁とハンガーによってケーブルに載荷される分布荷重で、ケーブル自重による垂直荷重を意味する。力の平衡条件によって i 番目の節点の位置では次のような関係式を得られる。

$$T_i \frac{d_i}{l_i} = T_{i+1} \frac{d_{i+1}}{l_{i+1}} \quad (i=1, 2, \dots, N-1)$$

$$T_1 \frac{d_1}{l_1} = T_2 \frac{d_2}{l_2} = A = T_N \frac{d_N}{l_N} = T_x \quad (10.7.1)$$

ここで、
 T_i : 節点 $i-1$ と節点 i の間のケーブル要素の張力
 l_i : 要素の長さ
 T_x : ケーブル部材の水平張力

橋の横断面、すなわち Y-Z 平面上での力の平衡は、次の図の通りである。

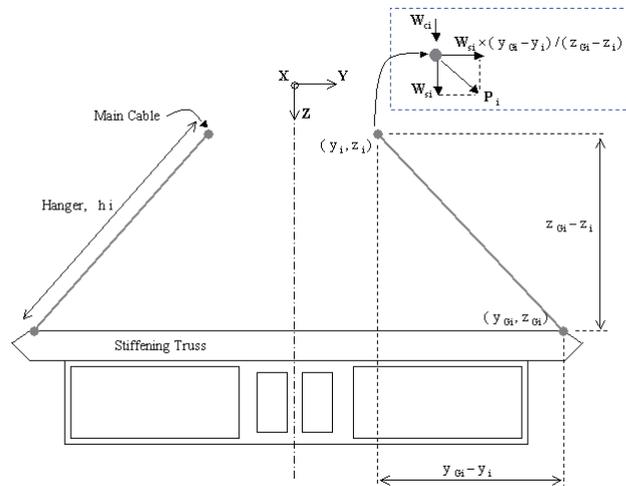


図 10.7.2 Y-Z 平面での平衡状態

上の平衡関係式は以下のように整理できる。

$$T_i \frac{z_i - z_{i-1}}{l_i} - T_{i+1} \frac{z_{i+1} - z_i}{l_{i+1}} = P_i \frac{z_{Gi} - z_i}{h_i} + W_{ci} \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (10.7.2)$$

ここで、 P_i は i 番目ハンガーの張力で、 h_i はハンガーの長さ

式(10.7.2)と式(10.7.3)より、以下のように計 $N-1$ 個の連立方程式を得ることができる。

$$T_x \left(-\frac{z_{i-1} - z_i}{d_i} + \frac{z_i - z_{i+1}}{d_{i+1}} \right) = P_i \frac{z_{Gi} - z_i}{h_i} + W_{ci} = W_{si} + W_{ci} \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \quad (10.7.3)$$

ここで、 W_{si} は補剛桁とハンガーによってケーブルに載荷される分布荷重で、 W_{ci} はケーブル自重による垂直荷重を意味する。上式の未知数は z_i ($i=1, 2, \dots, N-1$) と T_x で計 N 個であり、解を求めるためにはもう1個の条件が必要になる。追加の条件として既知の中央径間のサグ(Sag)、 f に対する次の関係式を使用する。

$$\frac{z_N}{2} = \frac{1}{2} (z_N + z_0) + f \quad (10.7.4)$$

10.7.3 水平面内での解析

水平面内でも垂直面内での解析と同じように力の平衡関係から、次のように N-1 個の連立方程式を得ることができる。

$$T_x \left(-\frac{y_{i-1} - y_i}{d_i} + \frac{y_i - y_{i+1}}{d_{i+1}} \right) = P_i \frac{y_{Gi} - y_i}{h_i} = W_{si} \frac{y_{Gi} - y_i}{z_{Gi} - z_i} \quad (10.7.5)$$

(i = 1, 2, ..., N-1)

ここで、水平張力 (T_x) は垂直面内の解析で得られた値で、主ケーブル両端の y 座標の y_0 , y_N は既知の値であり、合計 N-1 個の未知数である y_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$) を連立方程式を解いて得ることができる。

以上のように平衡式を使用して初期幾何形状を誘導すれば、各ケーブルの節点座標と、補剛桁の座標、主ケーブルの水平張力を決めることができる。

10.7.4 非線形解析を使用したケーブルシステムの平衡状態計算

吊橋ウィザードで簡略な平衡式から計算したケーブルの形状と変形前の長さを初期値に仮定してケーブルシステムを構成し、非線形解析を実行して正確な節点座標とケーブルの変形前の長さを算定する。主ケーブルの両端と主塔支持点、ハンガーの下端部を固定として処理する。算定された変換前の長さをケーブル要素に適用すると、不平衡荷重を発生させ、ケーブル構造系の変形が発生する。このケーブル座標の変化を検討して収束可否を判断する。収束状態でなければ、ケーブルシステムの節点座標と変換前の長さを更新して、収束条件を満足するまで繰り返し実行する。

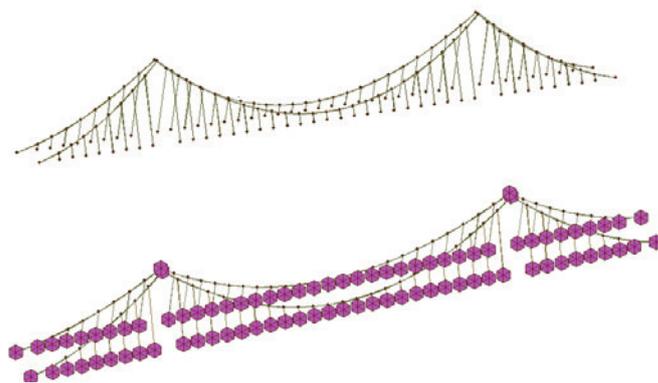


図 10.7.3 ケーブルシステムだけの解析のための支点処理

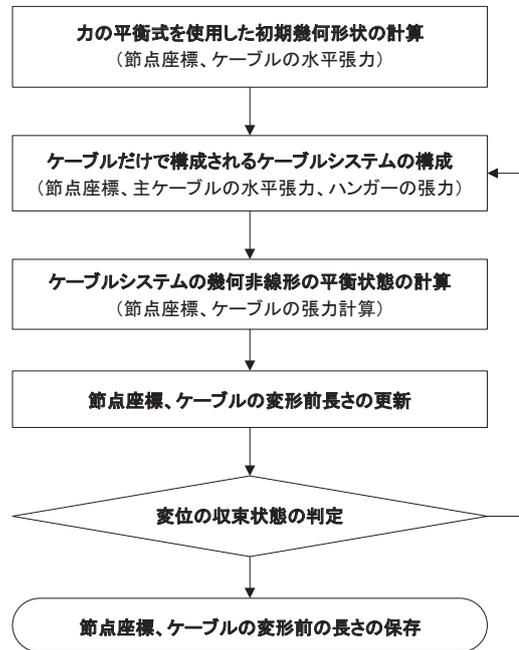


図 10.7.4 ケーブルシステムだけの吊橋の平衡状態の決定手順

10.7.5 吊橋全体構造物の平衡状態の決定

荷重平衡式とケーブルシステムのみ非線形解析の段階を経て計算した3次元吊橋のケーブル座標と変換前の長さをベースに、吊橋の全体構造の平衡状態を計算する。

他定式の吊橋では、ケーブルシステムだけで計算した平衡状態で追加の変化があった場合にこの方法を適用してより正確な平衡状態を計算する。自定式の吊橋では、主ケーブルの両端部が固定されておらず、補剛桁に接続されるため、ケーブルシステムだけで求めた平衡状態を適用することはできない。自定式の場合にはケーブルシステムだけで計算された平衡状態の情報を基本値にして、全体の構造物に対する平衡状態解析を行う必要がある。吊橋で平衡状態というのは荷重とケーブルの変形前の長さで補剛桁と主塔の内力が平衡を成して追加の変形が起こらない状態を意味する。

全体構造物の平衡状態解析の過程で更新される項目には、主ケーブルの節点座標、ケーブルの変形前の長さ、補剛桁と主塔の内力などがある。吊橋全体の平衡状態は特定の唯一の状態でのみ収束するものではないので、収束された結果を適用するかについては使用者の判断が必要である。吊橋全体の平衡状態を計算するための計算手順は次の通りである。

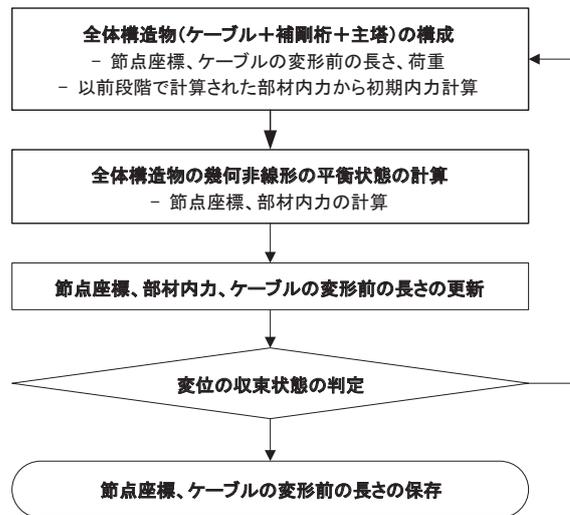


図 10.7.5 吊橋全体構造の平衡状態の決定手順

11. 水和熱解析

11.1 概要

コンクリート構造物の大型化及び施工方法の発展に伴う大量かつ急速な施工の増加で、セメントの水和熱による温度変化と温度応力の発生は構造物にひび割れを発生させ、構造物の耐久性だけでなく構造的な安定性までに影響を及ぼす要因となる。

水和熱解析ではこのような問題を解決するために、コンクリート打設の時の温度及び応力の分布を計算してひび割れを事前に制御する。

水和熱解析の対象となるマスコンクリート構造物の寸法は構造形式、使用材料、施工条件によって異なるが、およそスラブが 80～100cm 以上、下端が拘束されている壁ならば厚さ 50cm 以上が対象となる。

水和熱が引き起こす温度ひび割れは、大きく表面ひび割れと貫通ひび割れの 2 つに分けることができる。

表面ひび割れとは初期の表面部と中心部の温度差によって生じるひび割れで、貫通ひび割れとは一般的にコンクリートの打設が終わった後、セメントの水和熱による温度上昇が最大に達した後、温度降下による収縮が外的に拘束されて発生するひび割れを意味する。

水和熱解析はセメントの水和過程で発生する伝導、対流、発熱等による熱伝達解析と発生した温度、材齢による弾性係数の変化、クリープ及び乾燥収縮などによる熱応力解析で区分することができ、各解析で考慮する事項は次の通りである。

11.2 熱伝達解析(Heat Transfer Analysis)

熱伝達解析ではセメントの水和過程で発生する伝導、対流、発熱などの時間による節点温度変化を計算する。熱伝達解析の主要概念とプログラムで考慮する事項は次の通りである。

11.2.1 伝導 (Conduction)

流体の場合は分子の運動や直接的な衝突、固体の場合は電子の移動によって高温区域から低温区域にエネルギー交換が起きるが、この場合の熱伝達を伝導という。

伝導により伝達される熱伝達率は熱流束(heat flux)に垂直な面積にその方向の温度勾配をかけたものに比例する(fourier's law)。

$$Q_x = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} \quad (11.2.1)$$

ここで、

Q_x : 熱伝達率

A : 面積

κ : 熱伝導率

$\frac{\partial T}{\partial x}$: 温度勾配

一般的に飽和されたコンクリートの熱伝導率は 1.21～3.11 程度で、熱伝導率の単位は $\text{kcal}/\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}$ である。コンクリートの熱伝導率は温度の増加に伴い減少する傾向があるが、大気温度の範囲ではその変動分を無視することができる。

11.2.2 対流 (Convection)

流体が固体の表面または流路内を流れる時、流体と固体表面に温度差があると表面における流体の相対運動の結果、流体と固体の表面間で熱伝達が生じる。この場合の熱伝達を対流という。

流体を表面上で強制的に流すように流体流動を人為的に起こす時の熱伝達を強制対流(forced convection)による熱伝達といい、流体内の温度差で生ずる密度差による浮力効果のため起きる熱伝達を自由対流(free convection)による熱伝達という。

このような熱伝達では温度場(temperature field)が流体流動の影響を受けるため、実際に温度分布と対流熱伝達を決定することは非常に複雑な作業となる。

一般的に温度 T の固体表面とその表面を流れる平均温度 T_s の流体との間の熱伝達計算は、熱伝達係数 h_c を用いて次のように定義される。

$$q = h_c(T - T_s) \quad (11.2.2)$$

熱伝達係数(h_c)は流れの種類、物体の幾何学的形状及び流れの接触面積、流体の物理的性質、対流接触面の平均温度、位置などによって複雑に変化するため、定式化するのは容易ではない。

通常マスコンクリートの温度解析で適用する対流問題はコンクリート表面と大気との熱交換であることから、大気の風速関数を用いて次のような経験式で表す。

$$h_c = h_n + h_f = 5.2 + 3.2v \text{ (m/sec)} \quad (11.2.3)$$

ここで、熱伝達係数(対流係数)の単位は $\text{kcal/m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}$ となる。

11.2.3 発熱 (Heat source)

水和過程で発生する熱量をモデリングするためのもので、マスコンクリートにおける単位時間当りの単位体積の内部発熱量は断熱温度上昇式を微分して比熱と密度を掛けて次式のように表す。

単位時間当りの単位体積の内部発熱量(kcal/m³・h)

$$g = \frac{1}{24} \rho c K \alpha e^{-\alpha t/24} \quad (11.2.4)$$

断熱温度上昇式(°C)

$$T = K(1 - e^{-\alpha t}) \quad (11.2.5)$$

ここで、

T : 断熱温度(°C)

K : 断熱の最大上昇温度(°C)

α : 反応速度

t : 時間(days)

11.2.4 パイプクーリング (Pipe cooling)

パイプクーリングはコンクリート構造物の中にパイプを埋設して、パイプの中に低温の流体を流して熱交換させて水和熱による温度上昇を抑える。

熱交換の形は流体とパイプ表面間の対流によるもので、パイプ内の流体温度はパイプを通過しながら上昇する。流体とパイプの間の対流による熱伝達量を次式で示す。

$$q_{\text{conv}} = h_p A_s (T_s - T_m) = h_p A_s \left(\frac{T_{s,i} + T_{s,o}}{2} - \frac{T_{m,i} + T_{m,o}}{2} \right) \quad (11.2.6)$$

ここで、

h_p : パイプの流水対流係数 ($\text{kcal}/\text{m}^2 \cdot \text{h} \cdot ^\circ\text{C}$)

A_s : パイプの表面積 (m^2)

T_s, T_m : パイプ表面と冷却水の温度 ($^\circ\text{C}$)

11.2.5 初期温度 (Initial temperature)

コンクリート打設時の温度で、水、セメント、骨材の平均温度であり、解析の初期条件になる。

11.2.6 外気温度 (Ambient temperature)

コンクリート打設後の養生過程での外気温度を意味する。定温、Sin 関数、及び時間依存の温度が適用できる。

11.2.7 固定温度 (Prescribed temperature)

熱伝達解析の境界条件を構成して常に一定の温度を維持するようになる。対流条件や固定温度を適用しない節点は熱伝達が全くない断熱状態で解析をすることになる。一般的に対称モデルを使用する場合は対称面で断熱境界条件を用いる。

下式は熱伝達解析で用いられる基本平衡方程式で、ここで温度 T は時間別の節点温度となる。

$$C\dot{T} + (K + H)T = F_Q + F_h + F_q \quad (11.2.7)$$

$$C = \left[\int_V \rho c N_i N_j dx dy dz \right] : \text{Capacitance (Mass)} \quad (11.2.8)$$

$$K = \left[\int_V \left(k_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + k_{zz} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dy dz \right] : \text{Conduction} \quad (11.2.9)$$

$$H = \left[\int_S h N_i N_j dS_h \right] : \text{Convection} \quad (11.2.10)$$

$$F_Q = \int_V N_i Q dx dy dz : \text{Heat Source/Sink} \quad (11.2.11)$$

$$F_h = \int_S h T_\infty N_i dS_h : \text{Convection} \quad (11.2.12)$$

$$F_q = - \int_S q N_i dS_q : \text{Heat Flux} \quad (11.2.13)$$

ここで、

T : 節点温度

ρ : 密度

c : 比熱

k_{xx} k_{yy} k_{zz} : 熱伝導率

h : 対流係数

Q : 発熱量

q : 熱流束

11.3 熱応力解析(Thermal Stress Analysis)

熱伝達解析で得られた節点温度分布と時間と温度による材料の変化、時間による乾燥収縮、時間と応力によるクリープなどを考慮してマスコンクリートの各段階での応力を計算する。熱応力解析の主要概念とプログラムで考慮する事項は次の通りである。

11.3.1 温度と時間による等価材齢、積算温度

コンクリートの硬化過程で発生する材料特性の変化は温度と時間の関数で表すことができる。このような現象を反映するために等価材齢と積算温度という概念を用いる。

等価材齢は CEB-FIP モデル規準より算定し、積算温度は Ohzagi 式より算定する。

- CEB-FIP モデル規準での等価材齢

$$t_{eq} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \left[13.65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i) / T_0} \right] \quad (11.3.1)$$

ここで、

t_{eq} : 等価材齢(days)

Δt_i : 各解析段階での時間間隔(days)

$T(\Delta t_i)$: 各解析段階での温度($^{\circ}\text{C}$)

$T_{0.1}$

- Ohzagi 式による積算温度

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \beta \cdot (T(\Delta t_i) + 10) \quad (11.3.2)$$

ここで、

$$\beta = 0.0003(T(\Delta t_i) + 10)^2 + 0.006(T(\Delta t_i) + 10) + 0.55$$

M : 積算温度($^{\circ}\text{C}$)

Δt_i : 各解析段階での時間間隔(days)

$T(\Delta t_i)$: 各解析段階での温度($^{\circ}\text{C}$)

11.3.2 等価材齢と積算温度を用いたコンクリートの圧縮強度

- コンクリート標準示方書(1996)

$$\sigma_c(t) = \frac{t}{a + bt_{eq}} \sigma_{c(91)} \quad (11.3.3)$$

ここで、

a、b : セメント種別係数

$\sigma_{c(91)}$: 91 日圧縮強度

- ACI 規準

$$\sigma_c(t) = \frac{t}{a + bt_{eq}} \sigma_{c(28)} \quad (11.3.4)$$

ここで、

a、b : セメント種別係数

$\sigma_{c(28)}$: 28 日圧縮強度

- CEB-FIP モデル規準

$$\sigma_c(t) = \exp \left\{ s \left[1 - \left(\frac{28}{t_{eq}/t_1} \right)^{1/2} \right] \right\} \sigma_{c(28)} \quad (11.3.5)$$

ここで、

S : セメント種別係数

$\sigma_{c(28)}$: 28 日圧縮強度

t_1 : 1 day

- Ohzagi 式

$$\sigma_c(t) = \sigma_{c(28)} \cdot y \quad (11.3.6)$$

ここで、

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = 2.389 \ln \left(\frac{M}{3.5} \right) - 1.0$$

a, b, c : コンクリート種別係数

$\sigma_{c(28)}$: 28 日圧縮強度

11.3.3 温度の変化量による変形

熱伝達解析で得られた各段階の節点温度を基に温度による変形と応力を計算する。

11.3.4 乾燥収縮による変形

コンクリートの初期養生が終わって型枠を外すようになると、乾燥収縮が始まり、これに伴う変形と応力が追加で発生する。プログラムでは ACI 規準と CEB-FIP モデル規準を用いてセメントの種類、構造物の形状、時間による乾燥収縮量などを考慮する。

11.3.5 クリープによる変形

コンクリートに応力が発生すると、時間の経過とともにクリープ変形も大きくなって構造物に追加的な変形と応力が発する。プログラムでは ACI 規準と CEB-FIP モデル規準を用いてクリープ効果を考慮する。

11.4 水和熱解析手順

1. モデル>材料&断面>時間依存性材料(クリープ/乾燥収縮) と 時間依存性材料(圧縮強度) を選択して時間依存性材料を入力して、モデル>材料&断面>時間依存性材料で連結 で一般部材に時間依存性材料を割り当てる。
2. 荷重>水和熱解析データ の下位メニューで水和熱解析に必要なデータを入力する。
3. 解析>水和熱解析制御 で積分係数、初期温度、応力出力位置、クリープと乾燥収縮の考慮可否を入力する。
4. 解析>解析実行 メニューまたは  解析実行をクリックして解析を実行する。
5. 解析が完了した後、等高線図、グラフ、動画などで解析結果を確認する。

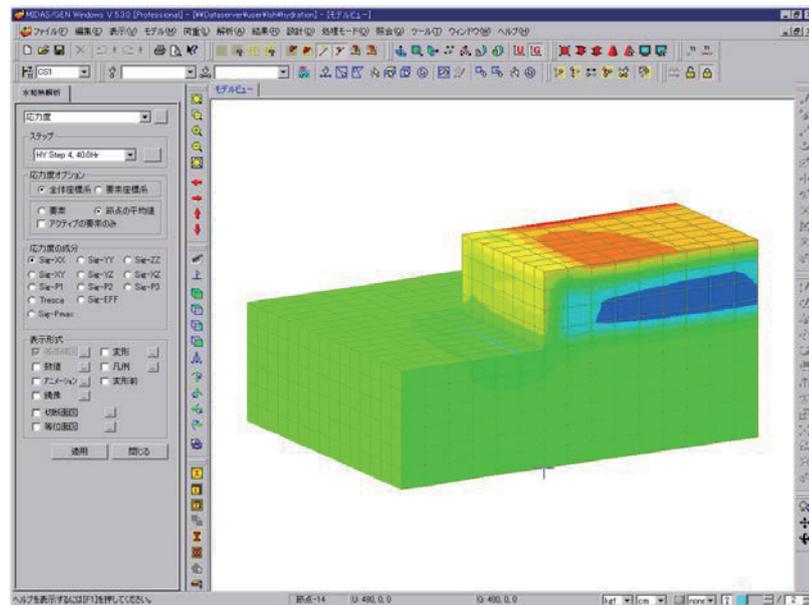


図 11.4.1 分割打設を考慮したエクストラードPSCボックスの柱頭部の水和熱解析モデル

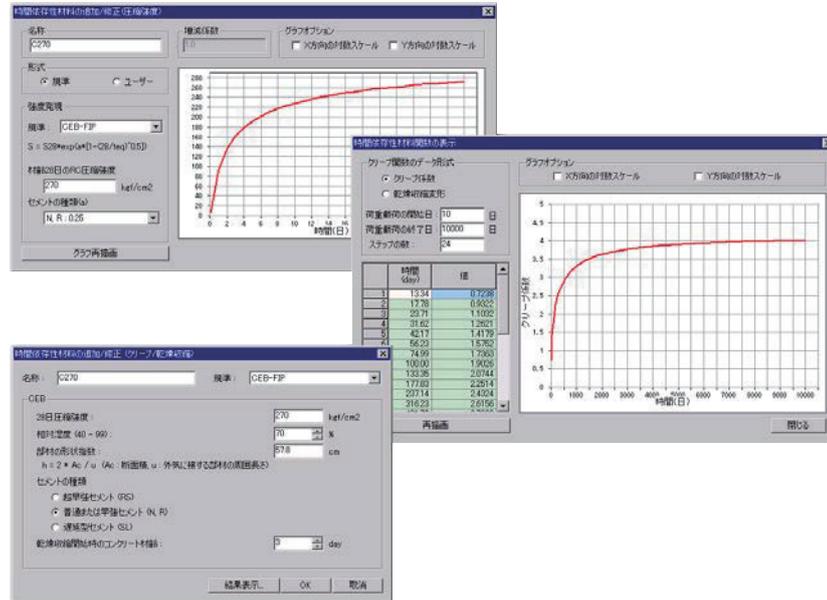


図 11.4.2 熱特性及び時間依存性材料ダイアログボックス

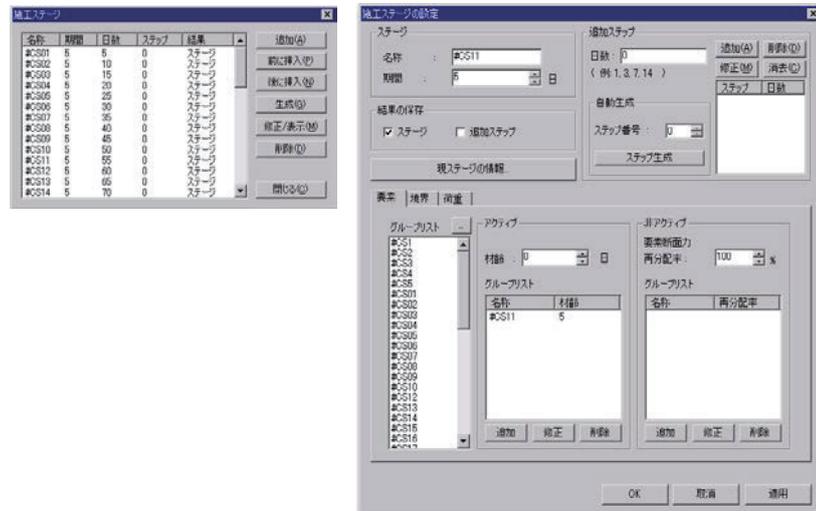
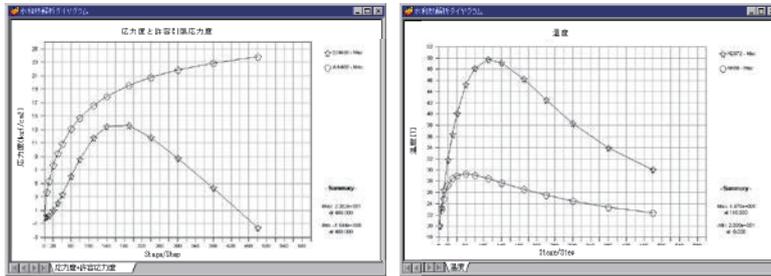
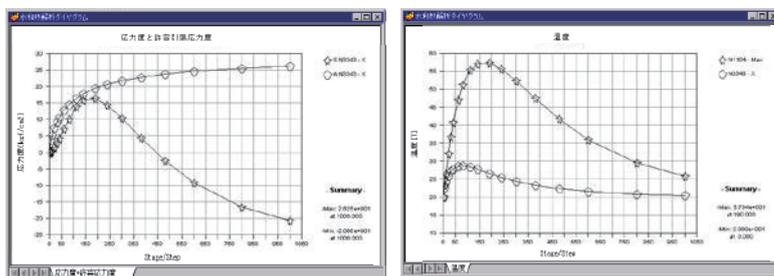


図 11.4.3 分割打設を考慮するための施工ステップダイアログボックス
(各施工段階の要素、境界条件などを定義)

1st Stage



2nd Stage



3rd Stage

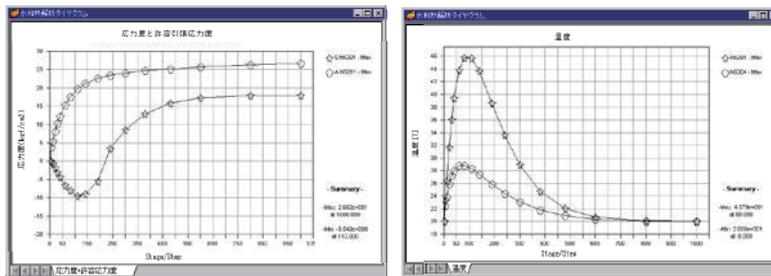


図 11.4.4 施工段階別の解析結果グラフ

12. プレストレスコンクリート解析

12.1 概要

プレストレスコンクリート構造物における有効プレストレス力は、プレストレスコンクリート構造物の挙動に影響を与える主要因子である。従って、プレストレスコンクリート構造の解析では、施工段階ごとに与えられるさまざまな荷重履歴に対する PC 鋼材の張力変化を正確に算定することが重要である。PC 鋼材に導入した張力は、張力導入方法に起因する張力損失が生じる。

プレテンション方式及びポストテンション方式において緊張前、緊張途中、緊張後の張力損失の原因は以下の通りである。

➤ プレテンション方式の張力損失の原因

緊張前：コンクリートの乾燥収縮、PC 鋼材のリラクゼーション
緊張途中：コンクリートの弾性変形
緊張後：コンクリートのクリープ、乾燥収縮、PC 鋼材のリラクゼーション、荷重や温度の変化

ここで、緊張前は、PC 鋼材にプレストレスを与えた後で PC 鋼材を切断する前のことを意味する。即ち、導入されたプレストレス力が、まだ、コンクリート部材に圧縮力として作用していない状況を意味する。

➤ ポストテンション方式の張力損失の原因

緊張途中：PC 鋼材とシースの摩擦、定着装置活動(スリップ及びセット)
緊張後：コンクリートのクリープ、乾燥収縮、PC 鋼材のリラクゼーション、荷重や温度の変化

midas Civil を使用してプレストレスコンクリートの解析を行う時に考慮することができる張力の損失は以下の通りである。

- プレストレスの導入時の即時損失 (Instantaneous Loss)
- プレストレスの導入後の時間的損失 (Time Dependent Loss)

midas Civil でプレストレスコンクリートの解析を行う時に考慮する断面積は、PC 鋼材を定着する前・後に分けられる。PC 鋼材を定着する前までの断面特性値(断面積、曲

げ剛性など)の計算には純断面積(全断面積からシース断面積を除いた断面積)を使用し、PC 鋼材を定着した後は PC 鋼材の断面積を考慮した換算断面積を使用する。

PC 鋼材の断面積を考慮した換算断面積の断面図心の位置が変更される。これは PC 鋼材の剛性がコンクリートの剛性より大きいためである。変更された図心を基準にして PC 鋼材の偏心を計算して PC 鋼材の張力を計算する。

midas Civil では、プレストレストコンクリートの解析モデルを作成する時、PC 鋼材はトラスなどの要素としてモデリングはしない。PC 鋼材は導入するプレストレスを等価荷重に換算して考慮する。この時、PC 鋼材の剛性は断面計算に含まれる。等価荷重を計算するための PC 鋼材の張力は、施工段階で起きる張力損失を考慮して計算されるため、解析モデルに載荷される等価荷重は張力の損失を考慮する。

midas Civil でのプレストレストコンクリートの解析手順は以下の通りである。

🔊 On-line Manualの“Civilの機能>解析>施工段階解析制御”参照してください。

🔊 On-line Manualの“Civilの機能>荷重>圧力荷重”参照してください。

🔊 On-line Manualの“Civilの機能>荷重>プレストレス荷重>PC鋼材の配置形状”参照してください。

🔊 On-line Manualの“Civilの機能>荷重>プレストレス荷重>PC鋼材のプレストレス荷重”参照してください。

1. 対象構造物をモデリングする。
2. 時間依存材料及び施工段階を定義した後、施工段階の要素、境界条件、荷重の変化を定義して施工段階を生成する。🔊
3. PC 鋼材の断面積、材質、極限強度、シースの直径、摩擦係数など、使用する PC 鋼材の特徴を定義する。🔊
4. PC 鋼材が配置されるコンクリート部材に割り当てて配置形状を定義する。🔊
5. PC 鋼材に作用する張力を定義し、緊張する施工段階で張力を入力する。🔊
6. 解析を行う。

12.2 プレストレスの損失

PC 鋼材に導入した張力はさまざまな原因によって減少される。PC 鋼材の張力が減少するとコンクリートに導入されたプレストレスも減少する。このような張力損失は張力を導入する際に生じる即時損失と張力導入後に生じる時間的損失に分けられ、その原因は以下の通りである。

- 即時損失(Instantaneous Loss)の原因
 1. 定着端におこる PC 鋼材の滑り(Anchorage Slip)
 2. PC 鋼材とシース間の摩擦
 3. コンクリートの弾性変形(Elastic Shortening)
- 時間的損失(Time Dependent Loss)
 1. コンクリートのクリープ
 2. コンクリートの乾燥収縮

3. PC 鋼材のリラクゼーション

ポストテンション方式においての考慮する張力損失は、上記の6つの原因による張力損失を全て考慮する。しかし、プレテンション方式においては PC 鋼材とシース間の摩擦は考慮しない。プレストレスの即時損失及び時間的損失を合わせた張力の総損失量はジャッキフォースの 20～30%の範囲である。プレストレスコンクリート構造でのコンクリートの応力を計算するときに重要なことは即時損失後の張力 P_i と時間的損失後の張力 P_e (Effective Prestress Force) です。 P_i と P_e の関係は以下の通りである。

$$P_e = RP_i \quad (12.2.1)$$

ここで、

R : プレストレスの有効率
 プレテンション方式 : R=0.08
 ポストテンション方式 : R=0.85

次は上述したプレストレスの損失を midas Civil で考慮する方法を説明する。

12.2.1 即時損失

1) 定着装置の滑りによる損失

PC 鋼材の緊張が完了し端部を定着するときに定着端部では、定着装置と PC 鋼材の間で滑り込みが起り、そのために張力の損失が生じる。このような損失はポストテンション方式だけでなく、プレテンション方式にも生じる。いずれにしても、目標張力を超えた張力を導入することで張力損失は補正されることになる。

一般的に、PC 鋼材とシースの間には摩擦があるため定着装置の滑りによる張力の損失は定着装置の近傍、即ち、定着端に近い部分に限定され、定着端から遠くなるとその影響は少なくなる。

図 12.2.1 で、定着部での定着装置の滑りによって影響を受ける PC 鋼材の長さ l_{set} は摩擦損失の関数として、摩擦損失量が多いと短くなり、摩擦損失量が少ないと長くなる。定着装置の滑り量を Δl とすると、ここに鋼材の断面積 A_p と弾性係数 E_p をかけると図 12.2.1 の三角形部分の断面積と一致するため次のような式が成り立つ。

$$\triangleright \quad \text{三角形の面積} \\ (0.5\Delta Pl_{set}) = A_p E_p \Delta l \quad (12.2.2)$$

PC 鋼材の単位長さに対する摩擦損失を P とおくと、張力の損失 ΔP は次のように示すことができる。

$$\Delta P = 2pl_{set} \quad (12.2.3)$$

従って、定着部での定着装置の滑りの影響を受ける PC 鋼材の長さ l_{set} は、式 (12.2.2) と式 (12.2.3) から次のように誘導することができる。

$$l_{set} = \sqrt{\frac{A_p E_p \Delta l}{p}} \quad (12.2.4)$$

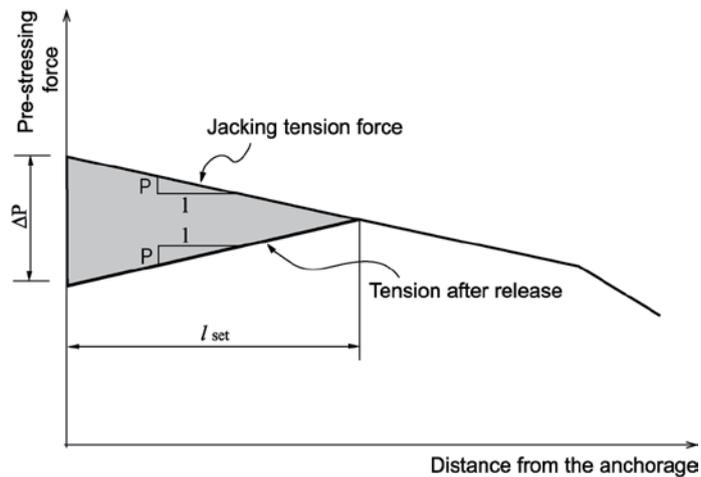


図 12.2.1 定着装置の滑りが緊張力に与える影響

図 12.2.1 では PC 鋼材の張力の分布が直線で示されるが、実際には曲線の形状で分布するため、midas Civil ではこのような張力の曲線分布を考慮して定着装置の滑りによるプレストレスの損失を計算している。

2) PC 鋼材とシースの間の摩擦による損失

ポストテンション方式では、PC 鋼材とシースの間の摩擦によって PC 鋼材の張力は緊張端から遠くなればなるほど少なくなる。このような摩擦損失は PC 鋼材の角度変化による曲率摩擦(Curvature Friction)損失と PC 鋼材の長さによる損失(Wobble Friction)に分けられる。それぞれの単位角度当たりの摩擦係数 μ (radian) と単位長さ当たりの摩擦係数 k を使用して表すことができる。

緊張端で P_0 のプレストレスを与えた場合に、PC 鋼材の曲線長さ l に該当する距離での角度変化を α とすると、その位置での張力 P_x は式 (12.2.5) のようになる。

$$P_x = P_0 e^{-(\mu\alpha + kl)} \quad (12.2.5)$$

表 12.2.1 k 及び μ の値(コンクリート基準)

PC 鋼材の種類		k(/m)	(μ /rad)
付着させた緊張材	鋼線	0.0033~0.0050	0.15~0.25
	鋼棒	0.0003~0.0020	0.08~0.30
	高強度ストランド	0.0015~0.0066	0.15~0.25
付着させない緊張材	樹脂防水被覆	鋼線	0.0033~0.0066
		高強度ストランド	0.0033~0.0066
	グリース塗布	鋼線	0.0010~0.0066
		高強度ストランド	0.0010~0.0066

表 12.2.2 k 及び μ の値(道路橋及び鉄道橋基準)

PC 鋼材の種類	シースの種類	k(/m)	(μ /rad)
PC 鋼線 及び PS 鋼より線	金属シース	0.0066	0.30
	亜鉛メッキ金属シース	0.0050	0.25
	グリースまたはアスファルトでコーティングし、再び被覆されたシース	0.0066	0.30
	亜鉛メッキ剛性シース(fixed duct)	0.0007	0.25
PC 鋼棒	金属シース	0.0010	0.20
	亜鉛メッキ金属シース	0.0007	0.15

3) コンクリートの弾性変形による損失

コンクリートにプレストレスを導入するとコンクリートは圧縮され、その圧縮によってコンクリートに定着されている PC 鋼材の長さも短くなり PC 鋼材の引張応力は減少する。このようなコンクリートの弾性変形による張力損失は、プレテンション方式とポストテンション方式のどちらでも発生する。

プレテンション方式の場合には張力を与える瞬間に弾性収縮が起きて PC 鋼材の長さが短くなり、それによって張力の損失が起きる。即ち、図 12.2.1 に示すように PC 鋼材に与える張力 P_j と実際に部材に与えられる張力 P_j' は異なる。

しかし、ポストテンション方式の場合には、固まったコンクリート部材を利用して PC 鋼材を緊張するため、コンクリート部材が短縮することはプレテンション方式と同じだが、PC 鋼材の張力導入と同時にコンクリート部材は弾性短縮するので、測定される張力は弾性短縮終了時となる。midas Civil では任意の施工段階で要素が生成された後、緊張力を与えるポストテンション方式とは違い、施工段階でモデル化が不可能なプレテンション方式の場合はコンクリート弾性変形によるプレストレスの損失は考慮しない。従って、プレテンション方式で緊張力を与える場合、緊張台での緊張力 P_j ではなく、有効緊張力 P_j' を入力しなければならない(図 12.2.2 参照)。

殆どのポストテンション部材は、多数の緊張材を決められた順番で緊張して定着するのが一般的なので、コンクリートの弾性収縮も順次発生する。従って、図 12.2.3(b)の PC

鋼材1のように最初に定着する PC 鋼材はその時点での張力は減少しないが、2番目の PC 鋼材を緊張ことによる弾性収縮のために図 12.2.3(c)のように1番目の PC 鋼材の張力は減少する。midas Civil は各施工段階の PC 鋼材の緊張による弾性収縮で発生するプレストレスの損失だけでなく、外部荷重による弾性収縮で発生するプレストレスの損失など全てを考慮している。

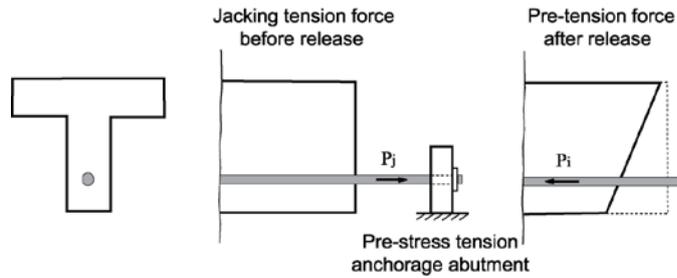


図 12.2.2 弾性収縮による張力の減少 (プレテンション部材)

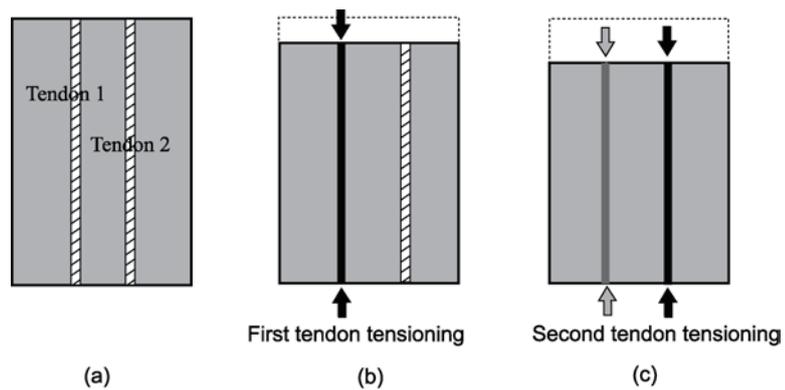


図 12.2.3 プレストレスの導入による張力の減少(ポストテンション部材)

12.2.2 時間的損失

プレストレスは、コンクリートのクリープと乾燥収縮及び PC 鋼材のリラクセーション等の時間の経過によっても減少する。midas Civil では、各施工段階のコンクリート部材の時間依存特性を考慮してクリープと乾燥収縮によって発生する変形を計算する。また、計算されたコンクリート部材の変形による PC 鋼材の張力応力の減少も考慮する。計算されたプレストレスの時間的損失は各施工段階のグラフによって確認することができる。

リラクセーションとは、PC 鋼材応力を作用させてその変形率を一定に維持すると、PC 鋼材に導入した応力は時間の経過に伴い徐々に減少する現象である。リラクセーションによる損失は荷重した初期応力の大きさ、経過した時間、製品の性質によって、様々な

違いを表す。midas Civil では PC 鋼材のリラクゼーションを考慮するために一般的に使用されている Magura¹⁾式と CEB-FIP 式を使用している。

Magura 式によるリラクゼーション計算

$$\frac{f_s}{f_{si}} = 1 - \frac{\log t}{C} \left(\frac{f_{si}}{f_y} - 0.55 \right), \quad (12.2.6)$$

$$\text{ここで、} \frac{f_{si}}{f_y} \geq 0.55$$

ここで、 f_{si} は初期応力、 f_s は荷重した後 t 時間後の応力、 f_y は降伏応力(0.1% Offset Yield Stress)、 C は製品に関する定数で一般鋼材の場合 10、低リラクゼーション鋼材を使用した場合 45 を使用する。この式はリラクゼーションの定義で説明したように PC 鋼材の応力が一定に維持されることを仮定している。しかし、実際の PC 鋼材の張力は時間によってクリープ、乾燥収縮、外部荷重の変化によって不連続に変化するので式(12.2.6)を直接に適用するのは困難である。従って、midas Civil では各移行段階でリラクゼーションによる損失以外の要因による PC 鋼材の張力の変化を計算した後で、各施工段階に該当する仮の初期応力(Fictitious Initial Prestress)²⁾を求めてリラクゼーションによる損失を計算する。

CEB-FIP 式によるリラクゼーション計算

この式は、時間に応じて初期応力の一定の割合が減少することで計算する。

$$\Delta f_n = f_{si} \times \left(\frac{RP}{100} \right) (DL_n - DL_{n-1})$$

$$- t_n, t_{n-1} \leq 1000 \text{ (days)}$$

$$DL_n = \frac{1}{16} \ln \left(\frac{t_n - t_s}{10} + 1 \right), \quad DL_{n-1} = \frac{1}{16} \ln \left(\frac{t_{n-1} - t_s}{10} + 1 \right)$$

$$- 1000 < t_n, t_{n-1} \leq 500000 \text{ (days)}$$

$$DL_n = \left(\frac{t_n - t_s}{500000} \right)^{0.2}, \quad DL_{n-1} = \left(\frac{t_{n-1} - t_s}{500000} \right)^{0.2}$$

¹⁾ Magura, D.D., Sozen, M.A., and Siess, C.P., "A Study of Stress Relaxation in Prestressing Reinforcement," PCI Journal, Vol. 9, No. 2, April, 1964.

²⁾ Kan, Y.G., "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames", Ph. D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, June 1977.

$$- t_n, t_{n-1} \geq 500000 \text{ (days)}$$

$$DL_n = DL_{n-1} = 1.0$$

ここで、 f_{si} : 初期応力
 RP : リラクゼーション率 (%)
 t_n, t_{n-1} : 施工段階 n、n-1 の時間 (日)
 t_s : 緊張力の導入時間 (日)

12.3 プレストレス荷重

midas Civil では、PC 鋼材によって構造物に作用するプレストレス荷重を図 12.3.1 に示す方法で等価の荷重に置換する。

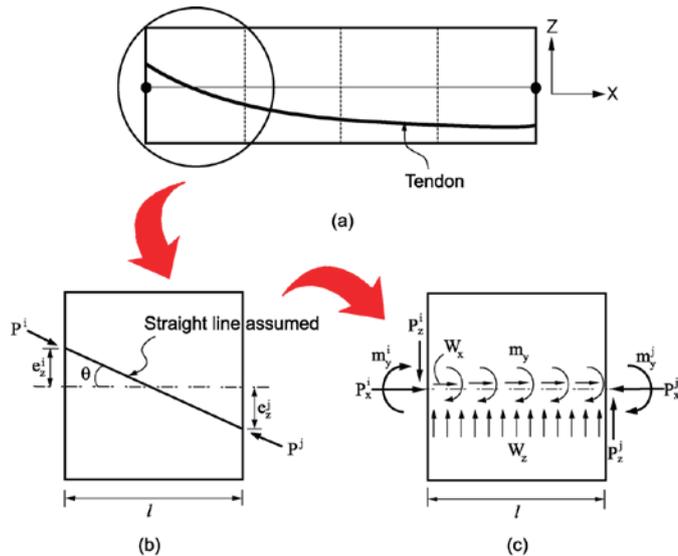


図 12.3.1 PC 鋼材のプレストレスによる等価荷重

図 12.3.1 は梁要素に PC 鋼材の配置形状を表したものである。説明上2次元で表現しているが、要素座標系 x - y 平面に対しても同様に計算される。図のようにプログラムでは、1つの梁要素を4等分して等価荷重を計算する。等分した要素内での PC 鋼材形状は図 12.3.1(b)のように線形に仮定する。PC 鋼材に作用する張力 P_i と P_j は摩擦による損失のために異なる。 i と j 両端の3つの集中荷重 (p_x , m_y , p_z) だけでは不釣り合い力が生じる。従って、部材内で釣り合いをとるために等分布荷重を考慮する。式 (12.3.1)、(12.3.2) によって両端の集中荷重を計算して、式(12.3.3)と(12.3.4)を用いて要素内部の等分布荷重を計算する。

$$\begin{aligned} p_x^i &= p^i \cos \theta \\ p_z^i &= p^i \sin \theta \\ m_y^i &= p_x^i \cdot e_z^i \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

$$\begin{aligned} p_x^j &= p^j \cos \theta \\ p_z^j &= p^j \sin \theta \\ m_y^j &= p_x^j \cdot e_z^j \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= p_x^i + w_x l - p_x^j = 0 \\ \sum F_z &= -p_z^i + w_z l + p_z^j = 0 \\ \sum M_y^j &= m_y^i - p_z^i l + w_z \frac{l^2}{2} + m_y^j + m_y l = 0\end{aligned}\tag{12.3.3}$$

$$\begin{aligned}w_x &= \frac{p_x^j - p_x^i}{l} \\ w_z &= \frac{p_z^i - p_z^j}{l} \\ m_y &= p_z^i - w_z \frac{l}{2} - \frac{m_y^i + m_y^j}{l}\end{aligned}\tag{12.3.4}$$

プログラムでは各施工段階のクリープ、乾燥収縮、PC 鋼材のリラクセーションなどプレストレスの時間的損失だけでなく、外部荷重や温度の変化による構造物の変形による PC 鋼材のプレストレスの損失も考慮している。施工段階解析での変形による PC 鋼材の張力の変化量を等価荷重に置換して要素に作用させる。

13. 平衡方程式の解法

13.1 概要

線形解析における平衡方程式の解法は式(13.1.1)のような全体剛性マトリックスの解 \mathbf{u} を求める方法である。

$$\mathbf{Ku}=\mathbf{p} \quad (13.1.1)$$

線形解析における平衡方程式の解法は線形解析だけでなく、固有値解析、線形座屈解析、動的解析、非線形解析などほとんどの解析に使用される。解法は大きく直接解法(direct method)と反復解法(iterative method)に分類され、プログラムでは以直接解法を使用する。

- 直接解法
 - Skyline
 - Multi-frontal (デフォルト)

13.2 直接解法

直接解法では方程式の解を2段階に分けて求める。1番目の段階はマトリクス分解過程で、2番目の段階は前進-後退代入(forward-backward substitution:FBS)過程である。

マトリクス分解過程では対称の全体剛性マトリクス \mathbf{K} を \mathbf{LL}^T 、または \mathbf{LDL}^T の形に分解する。

$$\mathbf{LL}^T \mathbf{u} = \mathbf{p} \text{、または } \mathbf{LDL}^T \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (13.2.1)$$

ここで、 \mathbf{L} は下三角形マトリクス(lower-triangular matrix)で、 \mathbf{D} は対角マトリクス(diagonal matrix)である。

通常、対角マトリクス \mathbf{D} を含んだマトリクス分解はマトリクスが正定値でない場合に必要である。分解されたマトリクス $\mathbf{K} (= \mathbf{LL}^T \text{、または } = \mathbf{LDL}^T)$ は FBS 過程から解を求める時に利用される。先に、 $\mathbf{v} = \mathbf{L}^T \mathbf{u}$ 、または $\mathbf{v} = \mathbf{DL}^T \mathbf{u}$ に置換すると、式(13.2.1)は次式のように表すことができる。

$$\mathbf{Lv} = \mathbf{p} \quad (13.2.2)$$

$\mathbf{Lv} = \mathbf{p}$ の解 \mathbf{v} は \mathbf{L} の下三角形の特性を利用して求めることができる。 \mathbf{v} が計算されると、 $\mathbf{v} = \mathbf{L}^T \mathbf{u}$ 、または $\mathbf{v} = \mathbf{DL}^T \mathbf{u}$ を利用して \mathbf{u} を計算する。

直接解法で重要な点はマトリクスの粗な性質(sparsity)を適切に利用することである。一般的に有限要素解析時の全体剛性マトリクス \mathbf{K} はスパースマトリクス(sparse matrix)で、スパース性の活用方法によって計算時間と要求されるメモリ量が顕著に変わってくる。プログラムでは単一フロントマトリクス(front matrix)を利用する skyline 解法と、多重フロントマトリクス(multi-front matrix)を利用する multi-frontal 解法が利用できる。

13.2.1 Skyline 解法

Skyline 解法は単一フロントマトリックスを利用してマトリックス分解を行い、skyline 形態でマトリックスを保存する。

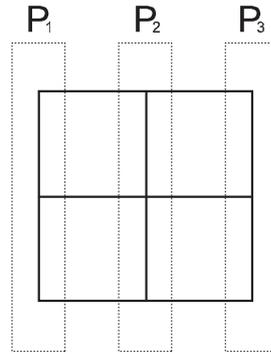


図 13.2.1 三つのパーツからなる単純メッシュ構成

図 13.2.1 のようなメッシュを 3 つに分けて表現すると、式(13.2.3)のようになる。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{21}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{32}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} \quad (13.2.3)$$

これを $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$ 順に分解していくと、 P_1 の分解とこれによる P_2 の更新は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \mathbf{L}_{11} \mathbf{L}_{11}^T \\ \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^T &= \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{K}_{22} - \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{21}^T &= \mathbf{K}_{22}^* (= \mathbf{L}_{22} \mathbf{L}_{22}^T) \end{aligned} \quad (13.2.4)$$

同じ方法で P_2 の分解と P_3 の更新・分解ができる。このような単一フロントマトリックスの順次マトリックス分解は自由度の再配置(renumbering)によって計算の効率性が大きく左右される。図 13.2.2 は格子状のメッシュを効率よく計算する順序を表している。自由度の再配置を行うアルゴリズムは Sloan¹が提案したフロント減少法(wavefront reduction method)を利用する。前進代入(forward substitution)はマトリックス分解と同じ順序ででき、後退代入(backward substitution)はその逆順に計算する。

¹ S.W.Sloan, "An Algorithm for Profile and WaveFront Reduction of Sparse Matrices," International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 23, 239-251, 1986

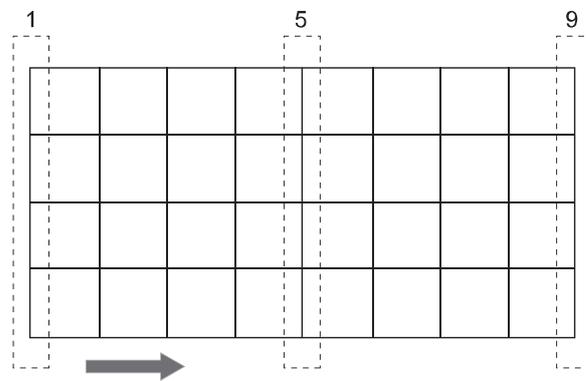


図 13.2.2 skyline 解法におけるマトリクス分解過程

13.2.2 Multi-frontal 解法

Multi-frontal 解法は多くのフロントマトリックスを同時に考慮してマトリックスの分解を行い、マトリックスを要素単位に保存して計算する方法²を利用する。図 13.2.1 のようなメッシュに対して、skyline 解法で使ったマトリックスの手順と違って、式(13.2.5)のように配置する。

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{21}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{23}^T \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (13.2.5)$$

これを $(P_1, P_3) \rightarrow P_2$ 順に分解すると、以下の式(13.2.6)、(13.2.7)のように表現できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11} &= \mathbf{L}_{11} \mathbf{L}_{11}^T \\ \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{11}^T &= \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{K}_{22} - \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{21}^T &= \mathbf{K}_{22}^* \end{aligned} \quad (13.2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{33} &= \mathbf{L}_{33} \mathbf{L}_{33}^T \\ \mathbf{L}_{23} \mathbf{L}_{33}^T &= \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{22}^* - \mathbf{L}_{23} \mathbf{L}_{23}^T &= \mathbf{K}_{22}^{**} \end{aligned} \quad (13.2.7)$$

多重フロントマトリックスによるマトリックスの分解もまた自由度の再配置が必要である。図 13.2.3 は格子状のメッシュを効率よく計算する順序を表している。自由度を再配置するためのアルゴリズムには recursive bisection を利用する。前進代入はマトリックスの分解と同じ手順ででき、後退代入はその逆順に計算する。

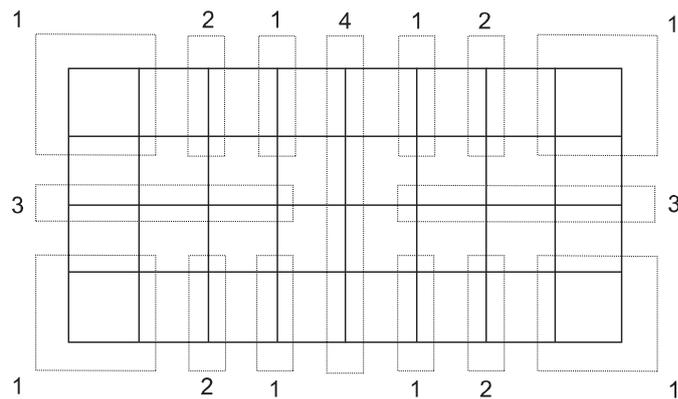


図 13.2.3 multi-frontal 解法におけるマトリックス分解過程

² J.H. Kim and S.J. Kim, "A Multifrontal Solver Combined with Graph Partitioners," AIAA Journal, Vol. 38, 964-970, 1999

増分変位 $\delta \mathbf{u}_i$ は剛性マトリックス \mathbf{K}_i を使用して、次のような線形解析を用いて求める。

$$\delta \mathbf{u}_i = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{g}_i \quad (14.1.3)$$

ここで、 \mathbf{g}_i は i 番目段階における不平衡力で、次のように計算される。

$$\mathbf{g}_i = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int,i} \quad (14.1.4)$$

$\Delta \mathbf{u}$ は時間 t から $t + \Delta t$ までの累積変位で、 $t + \Delta t$ までのすべての増分変位を足した \mathbf{u} は外力 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext}$ が加わったときの変位となる。一方、要素のひずみは時間 t からの累積した変位から求め、最終的な収束状態の $t + \Delta t$ に達したときの状態を保存するようになる。そして、反復計算はユーザーが指定した収束条件を満足すると終了される。

プログラムで使用できる反復計算手法にはニュートンラフソン法、弧長法、変位制御法がある。

14.2 ニュートンラフソン法

ニュートンラフソン法は図 14.2.1 のように反復計算段階ごとに剛性マトリックス((接線剛性))を求め直す。したがって、収束速度が早く、少ない反復回数でも収束できる特徴がある。

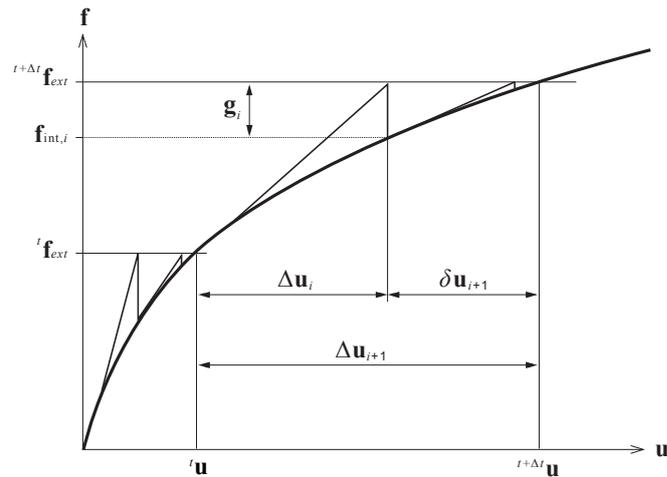


図 14.2.1 ニュートンラフソン法

ニュートンラフソン法は解析モデルが大きい場合に剛性を求め直すのに計算時間が多く掛かってしまう短所がある。また、最初の反復ステップで求めた解と最終ステップで求めた解の傾向が異なると、収束に失敗することがある。したがって、ニュートンラフソン法は収束に掛かる反復回数は少ない反面、反復計算段階ごとに掛かる計算時間は長くなる。

14.3 弧長法

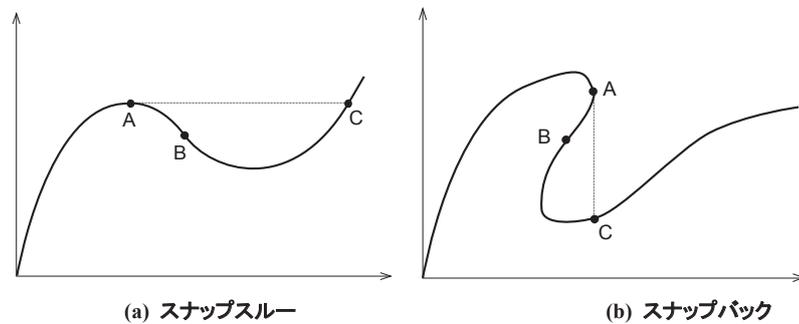


図 14.3.1 変位-荷重曲線

図 14.3.1 のように非線形解析において荷重がピークになってからスナップスルーやスナップバックが発生すると、荷重増分制御では荷重-変位挙動を追跡することができない。

弧長法は増分変位のノルムを拘束条件に使用して、増分変位の大きさを調節する。すなわち、増分変位量が固定されていない、反復解析過程で逐次適切な大きさを自動算定していく。弧長法の手法には spherical arc-length method と cylindrical arc-length method の 2 つがあり、プログラムでは cylindrical arc-length method を使用する。

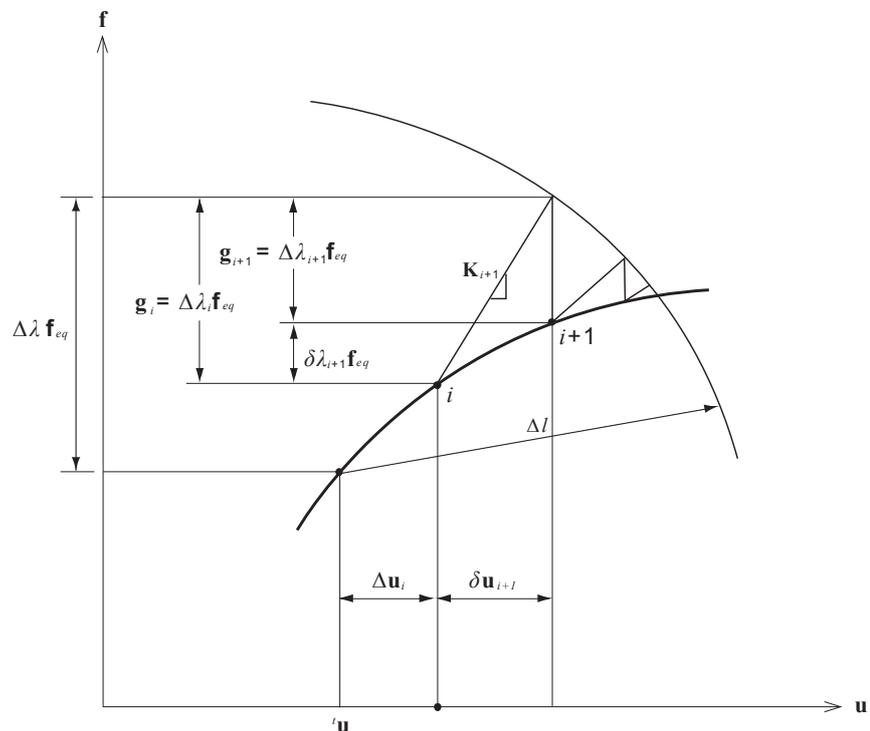


図 14.3.2 cylindrical arc-length method

増分段階ごとの反復計算における i 番目段階の平衡方程式を以下のように示す。

$$\delta \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{g}_i \quad (14.3.1)$$

ここで、 $\delta \mathbf{u}_i$ は i 番目の反復計算における増分変位で、 \mathbf{g}_i は i 番目の反復計算における不平衡力である。

図 14.3.2 のように不平衡力 \mathbf{g}_i は以下のように示すことができる。

$$\mathbf{g}_{i+1} = \mathbf{g}_i - \delta \lambda_i \mathbf{f}_{eq} \quad (14.3.2)$$

ここで、 \mathbf{f}_{eq} は使用者が指定した初期荷重係数で、 $\delta \lambda$ は荷重係数の増分である。

時間 t から $t + \Delta t$ までの増分荷重は以下ようになる。

$$\delta \lambda \mathbf{f}_{eq} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{ext} - {}^t \mathbf{f}_{ext} \quad (14.3.3)$$

式(14.3.2)を式(14.3.1)に代入すると、現在の反復過程における増分変位は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}_i &= \mathbf{K}_i^{-1} (\mathbf{g}_{i+1} + \delta \lambda_i \mathbf{f}_{eq}) \\ &= \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{g}_{i+1} + \delta \lambda_i \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{f}_{eq} \\ &= \mathbf{u}_i + \delta \lambda_i \mathbf{u}_{II} \end{aligned} \quad (14.3.4)$$

ここで、 $\mathbf{u}_i = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{g}_i$ 、 $\mathbf{u}_{II} = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{f}_{eq}$ である。

荷重増分と反復計算を行う時の荷重と変位の増分量との関係を以下のように示す。

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i \quad (14.3.5)$$

したがって、

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i + \delta \lambda_i \mathbf{u}_{II} \quad (14.3.6)$$

となる。

cylindrical arc-length method の仮定によって、反復計算時に与えられる変位に対する拘束条件は次のように定義することができる。

$$\Delta \mathbf{u}_{i+1}^T \Delta \mathbf{u}_{i+1} = \Delta l^2 \quad (14.3.7)$$

式(14.3.7)に式(14.3.6)を代入して整理すると、 i 番目の反復計算で $\delta \lambda$ に対する 2 次方程式を得ることができる。

$$a_1 \delta \lambda_i^2 + a_2 \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (14.3.8)$$

ここで、 $a_1 = \mathbf{u}_I^T \mathbf{u}_I$ 、 $a_2 = 2\mathbf{u}_H^T (\Delta \mathbf{u}_I + \delta \mathbf{u}_I)$ 、 $a_3 = (\Delta \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_I)^T (\Delta \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_I) - \Delta l^2$ である。

式(14.3.8)は $a_1 = 0$ の場合、 $-a_3/a_2$ の線形解を持ち、 $a_1 \neq 0$ の場合は 2 つの実根、重根、虚根を持つ。虚根を持つ場合、初期の弧の長さを半分にして再び解析を行い、2 つの実根を持つ場合は次式を用いて $\Delta \mathbf{u}_I$ と $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ との間の角が最小となる解を探す。

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\Delta \mathbf{u}_I^T \Delta \mathbf{u}_{i+1}}{\Delta l^2} = \frac{\Delta \mathbf{u}_I^T (\Delta \mathbf{u}_I + \mathbf{u}_I)}{\Delta l^2} + \delta \lambda_i \frac{\Delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{u}_H}{\Delta l^2} \\ &= \frac{a_4 + a_5 \delta \lambda_i}{\Delta l^2} \end{aligned} \quad (14.3.9)$$

ここで、 $a_4 = \Delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{u}_I + \Delta \mathbf{u}_I^T \Delta \mathbf{u}_I$ 、 $a_5 = \Delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{u}_H$ である。

式(14.3.8)で 2 つの実根が出る場合、それぞれの解を $\delta \lambda_{i,1}$ 、 $\delta \lambda_{i,2}$ とすると、

$$\begin{aligned} \Delta l^2 \cos \theta_1 &= a_4 + a_5 \delta \lambda_{i,1} \\ \Delta l^2 \cos \theta_2 &= a_4 + a_5 \delta \lambda_{i,2} \end{aligned} \quad (14.3.10)$$

となるので、

$$\begin{cases} \delta \lambda_i = \delta \lambda_{i,1} & (\Delta l^2 \cos \theta_1 > \Delta l^2 \cos \theta_2) \\ \delta \lambda_i = \delta \lambda_{i,1} = \delta \lambda_{i,2} & (\Delta l^2 \cos \theta_1 = \Delta l^2 \cos \theta_2) \\ \delta \lambda_i = \delta \lambda_{i,2} & (\Delta l^2 \cos \theta_1 < \Delta l^2 \cos \theta_2) \end{cases} \quad (14.3.11)$$

式(14.3.11)を使って $\delta \lambda_i$ を求めることができ、式(14.3.6)を利用して現段階の変位を求めることができる。

14.4 変位制御法

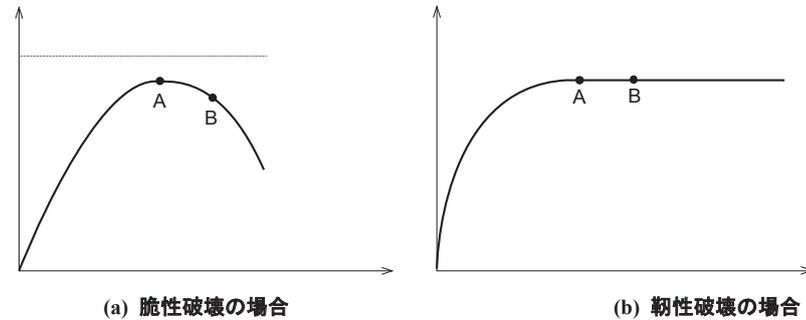


図 14.4.1 変位-荷重関係

図 14.4.1 のように非線形解析において荷重がピークになってから耐力が増加しないまま、または耐力が減少しながら変位だけが増加すると、荷重制御では荷重-変位挙動を追跡することができない。このような場合は変位制御法を用いる。ただし、図 14.3.1(b) のようなスナップバック問題の場合は変位制御法でも荷重-変位挙動を追跡することができない。

一般的な増分変位式は弧長法の式(14.3.5)のように表すことができ、次のようになる。

$$\delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i + \delta \lambda_i \mathbf{u}_{II} \quad (14.4.1)$$

変位制御法では目標変位によって荷重増分のファクターが決まる。荷重増分ベクトルは次のように求めることができる。

$$\delta u_i^k = u_i^k + \delta \lambda_{i+1} u_{II}^k \quad (14.4.2)$$

荷重増分ベクトルの決定は初期段階と逐次の反復過程での定義に分けることができる。初期荷重の増分ベクトルは制御する節点の該当の自由度方向に対して、式(14.4.1)の初期増分変位と目標変位 u^k が一致するため、初期増分変位の式(14.4.2)を次のように示すことができる。

$$\delta u_i^k = u_i^k + \delta \lambda_i u_{II}^k = u^k \quad (14.4.3)$$

最初の反復過程で不平衡力が 0 なので、 $u_i^k = 0$ で、初期荷重係数は以下のようになる。

$$\delta \lambda_1 = \frac{\delta u_1^k - u_1^k}{u_{II}^k} = \frac{u^k - u_1^k}{u_{II}^k} = \frac{u^k}{u_{II}^k} \quad (14.4.4)$$

u^k は反復過程で常に一定である。したがって、 δu_i^k は 0 なので、荷重増分係数 $\delta \lambda_i$ ($i > 1$) は、式(14.4.2)を使って次のように示すことができる。

$$\delta\lambda_i = -\frac{u_I^k}{u_{II}^k} \quad (i > 1) \quad (14.4.5)$$

式(14.4.5)と式(14.4.1)を利用して変位を更新する。増分変位 $\delta\lambda_i$ が 0 になると、反復過程で平衡状態が取れたと判断する。

14.5 収束判定誤差

非線形解析では反復計算を通じて解を求め、反復計算で指定した条件を満足すると、解が収束したと判断する。収束判断の条件には、カノルム、変位ノルム、エネルギーノルムなどがあり、これらの値が指定した許容値より小さければ解が収束したと判断する。

$$\text{カノルム} \quad : \quad \frac{\sqrt{\delta \mathbf{g}_i^T \delta \mathbf{g}_i}}{\sqrt{\Delta \mathbf{g}_i^T \Delta \mathbf{g}_i}} \quad (14.5.1)$$

$$\text{変位ノルム} \quad : \quad \frac{\sqrt{\delta \mathbf{u}_i^T \delta \mathbf{u}_i}}{\sqrt{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}_i}} \quad (14.5.2)$$

$$\text{エネルギーノルム} \quad : \quad \left| \frac{(\delta \mathbf{u}_i \delta \mathbf{g}_i)(\delta \mathbf{u}_i \delta \mathbf{g}_i)^T}{(\Delta \mathbf{u}_i \Delta \mathbf{g}_i)(\Delta \mathbf{u}_i \Delta \mathbf{g}_i)^T} \right| \quad (14.5.3)$$

収束判断の基準は解析種類別に使用すべき条件が異なる。強制変位の場合は、変位ノルムが適切でない。一方、荷重-変形関係で変位に比べて荷重の変化が大きい場合は、カノルムが適切でない。非線形解析で収束条件を選択するのが難しい場合は、複数の収束条件をそれぞれ適用して各解析結果を比較することも良い。

15. その他の解析

15.1 構造物の支点沈下を自動考慮した解析

🔗 On-line Manual の"荷重>支点沈下解析データ"を参照

一般的な橋梁において支点沈下を考慮した解析を実行するためには、同時に沈下が発生する支点を1つの沈下グループにし、各沈下グループを単位荷重ケースとして静的解析を実行する。その後、単位荷重ケースから可能な沈下の組み合わせ条件から最大及び最小値を求めて、この値を最終的に使用する。この一連の作業は、相当な量の解析、荷重組み合わせ、及び結果値の比較による最大及び最小値の選択等の作業を必要とする。プログラムでは、このような支点沈下条件をプログラム内部で自動的に処理する機能を内蔵し、その解析手順は次の通りである。

1. ユーザーによって予め入力された支点沈下が同時に発生可能な支点沈下グループと沈下量を用いてプログラム内部で単位荷重ケースを生成する。
2. 各単位荷重ケースに対する静的解析を実行する。
3. 支点沈下が可能なすべての組み合わせ条件から最大及び最小値を求める。

このような手順を通して算出された解析結果は、他の荷重ケースの結果と組み合わせることができる。解析結果には、節点変位、支点反力、トラス要素、梁要素、板要素の断面力などが出力される。それ以外の要素に対しては、剛性のみが評価され、解析結果は出力されない。

沈下を考慮する支点は節点で入力し、沈下量は各節点に対して異なる値を入力することができる。支点沈下の方向は、全体座標系 Z 軸方向に従って入力する。また、支点沈下グループの個数は 10 個以下に制限されるが、各支点沈下グループ内で指定できる節点の数に制限はない。

15.2 最適化技法を用いた未知荷重の解析

🔊 On-line Manual の "結果>未知荷重係数" を参照

大空間構造の設計では、図 15.2.1 のように与えられた設計条件を満足するのに必要な未知荷重の解を求めるという問題に遭遇する。プログラムでは、このような問題を解決するために最適化技法を適用し、与えられた拘束条件と選択した目的関数に対して最適な未知荷重を求める機能を内蔵している。拘束条件の入力には、等号条件(Equality Condition)及び不等号条件(Inequality Condition)が指定でき、目的関数(Object Function)には、変数の絶対値の和($\sum_{i=1}^n |X_i|$)、2乗和($\sum_{i=1}^n X_i^2$)、及び最大絶対値($Max(|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|)$)が選択できる。

図 15.2.1(a)は、長大スパン梁の設計において、要求される曲げモーメント分布を人為的に作成したり、梁に一定量の初期変位を与えるのに必要なジャッキアップ(Jack-up)荷重を求める問題である。

図 15.2.1(b)は、長大スパン構造物の施工プロセス解析で構造物が特定の変形形状となるのに必要な荷重(Leveling Load)を求める問題である。

図 15.2.1(c)は斜張橋の設計において、死荷重または活荷重に対してメインタワー上部の水平変位の大きさを一定の値以下となるようにし、さらに B 点と C 点での鉛直変位が正(+)の値となるようにするのに必要なケーブルの初期張力を求める問題である。

このような問題は、等号条件(Equality Condition)または不等号条件(Inequality Condition)定義し、midas Civil では最適化技法を用いて解を求める。

次に図 15.2.1(a)の構造物に対して等号条件(Equality Condition)を用いて A 点と B 点に必要な Jack-up 荷重を求める問題の解析手順を説明する。

1. 求めようとする荷重の代わりに仮想の単位荷重を作用させて未知荷重の数だけの荷重ケースを作成する。図 15.2.1 (a)では、ジャッキアップ荷重を求めようとする支点に対して図の方向に単位荷重を作用させた荷重ケースを作成する。
2. 設計荷重の荷重ケースも作成して解析を実行する。図 15.2.1 (a)の場合には、設計荷重として等分布荷重を作用させた荷重ケースを作成して静的解析を実行する。
3. 等号条件(Equality Condition)を用いて拘束条件を構成する。図 15.2.1 (a)の場合には、次のような等号条件(Equality Condition)が定義できる。

$$M_{A1}P_1 + M_{A2}P_2 + M_{AD} = M_A$$

$$M_{B1}P_1 + M_{B2}P_2 + M_{BD} = M_B$$

M_{Ai} : 未知荷重の作用方向に単位荷重を与える荷重ケースにおける A 点モーメント

M_{Bi} : 未知荷重の作用方向に単位重を与える荷重ケースにおける B 点モーメント

M_{AD} : 設計荷重の荷重ケースにおける A 点の曲げモーメント

M_{BD} : 設計荷重の荷重ケースにおける B 点の曲げモーメント

M_A : 設計荷重と未知荷重の荷重組合わせ条件時における A 点の曲げモーメント

M_B : 設計荷重と未知荷重の荷重組合わせ条件時における B 点の曲げモーメント

4. 線形代数法を用いて等号条件(Equality Condition)を満足する解を求める。等号条件式において、未知数と条件式の数が同じ場合には、線形代数法を用いて解を求めることができる。

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{A1} & M_{A2} \\ M_{B1} & M_{B2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_A - M_{AD} \\ M_B - M_{BD} \end{Bmatrix}$$

次に図 15.2.1 (c)の構造物に対して不等号条件(Equality Condition)を満足するケーブル部材の初期張力を求める問題の解析手順を説明する。

1. 求めようとする荷重の代わりに仮想の単位荷重を作用させて未知荷重の数だけの荷重ケースを作成する。図 15.2.1 (c)の構造物では、初期張力を求めようとするケーブル部材に、単位荷重のプレテンション荷重を与える荷重ケースを、求めようとする初期張力の数だけ作成する。

2. 設計荷重の荷重ケースも作成して解析を実行する。図 15.2.1 (c)の場合には、設計荷重として等分布荷重を作用させた荷重ケースを作成して静的解析を実行する。
3. 不等号条件(Inequality Condition) を用いて拘束条件を構成する。図 15.2.1 (c)の場合には、次のような不等号条件(Inequality Condition)が定義できる。

$$\delta_{A1}T_1 + \delta_{A2}T_2 + \delta_{A3}T_3 + \delta_{AD} \leq \delta_A$$

$$\delta_{B1}T_1 + \delta_{B2}T_2 + \delta_{B3}T_3 + \delta_{BD} \geq \delta_B$$

$$\delta_{C1}T_1 + \delta_{C2}T_2 + \delta_{C3}T_3 + \delta_{CD} \geq \delta_C$$

δ_{A1} : T_i 未知荷重の作用方向に単位荷重のプレテンション荷重を与えた荷重ケースにおける A 点の水平変位

δ_{B1} : T_i 未知荷重の作用方向に単位荷重のプレテンション荷重を与えた荷重ケースにおける B 点の水平変位

δ_{C1} : T_i 未知荷重の作用方向に単位荷重のプレテンション荷重を与えた荷重ケースにおける C 点の鉛直変位

δ_{AD} : 設計荷重の荷重ケースにおける A 点の水平変位

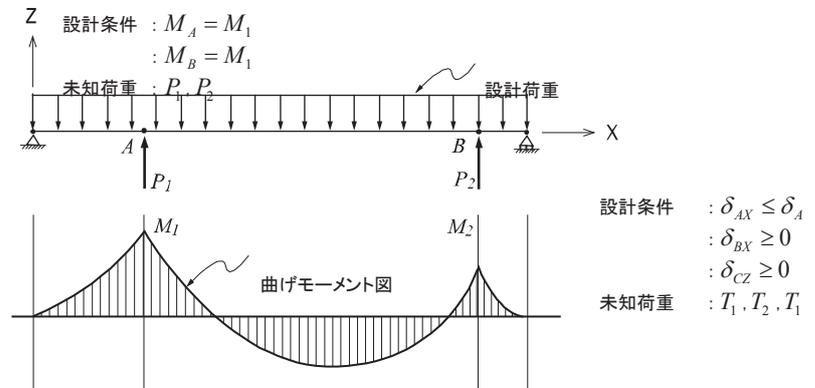
δ_{BD} : 設計荷重の荷重ケースにおける B 点の水平変位

δ_{CD} : 設計荷重の荷重ケースにおける B 点の鉛直変位

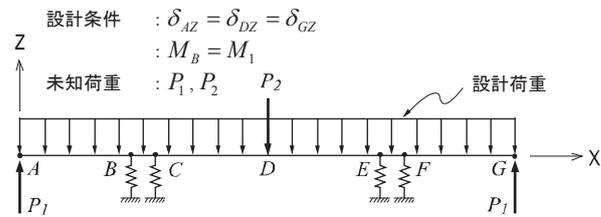
δ_A : 設計荷重と未知荷重との荷重組合せ条件時における A 点の水平変位

4. 最適化技法を用いて不等号条件(Inequality Condition)を満足する解を求める。条件によっては不等号条件(Inequality Condition)を満足する未知荷重は、複数解になる。複数解の中で必要とする解を選択するためにプログラムでは目的関数(Object Function)を最小にする変数を解として算出する。プログラムの目的関数(Object Function)は、変数の絶対値の和、2乗和、及び最大絶対値の3つから選択できる。また、特定の変数に重みを与えて調整することもでき、さらに変数の範囲を指定することもできる。

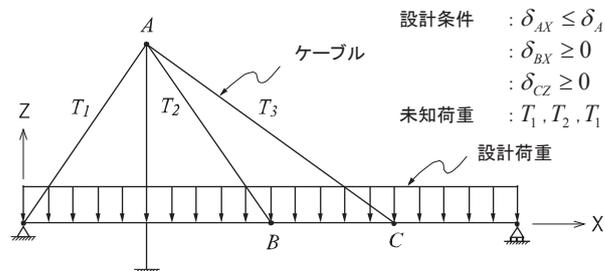
上記の最適化技法を用いて必要とする未知荷重を求める場合には、構造物に対する十分な理解を必要とする。等号条件(Equality Condition)や不等号条件(Inequality Condition)は、条件によっては解が存在しない場合もあるため、適切な拘束条件の入力、及び目的関数の選択が重要となる。



与えられた荷重ケースにおいて、A 点及び B 点の曲げモーメントがそれぞれ M_1 及び M_2 となるジャッキアップ荷重 P_1, P_2 を求める問題



与えられた荷重ケースにおいて、A, D, G 点の鉛直変位が同じで、B, C, E, F 点の反力が同じになる荷重 P_1, P_2 を求める問題



(c) 与えられた荷重ケースにおいて、A 点の水平変位が任意値以下で、B, C 点の鉛直変位が 0 以上となるケーブル部材の初期張力 T_1, T_2, T_3 を求める問題

図 15.1 各種の設計条件を満足する未知荷重を求める問題の例

16. 影響線解析

格子理論による影響線解析を行う。影響線は変形法により求めている。

死荷重は、面荷重、線荷重、集中荷重、活荷重は、自動車荷重、群集荷重を取り扱うことができる。また、橋梁の種類、活荷重の種類に応じた衝撃係数を考慮した計算を行う。

各成分に使用する荷重値(10kN または 12kN)の取り扱いを、橋梁の種類ごとにまたは主桁・橋脚などの部材ごとに設定することができる。

死荷重(固定荷重、影響線死荷重)と活荷重の足し合わせは、midas Civil の荷重組合せ機能を用いる。全ての足し合わせケースの中から、最大値・最小値を抽出することができる。

16.1 標準的な作業の流れ

「影響線解析」の標準的な作業の流れを以下に示す。

1) midas Civil の起動

単位の設定は、長さを「m」荷重は「kN」に設定する。

2) モデルの作成

- a) 断面諸元および物性を設定する。
- b) 節点座標、部材を設定して解析モデルの形状を作成する。
- c) 境界条件を設定する。

部材を定義する時に、主桁・横桁の要素座標系 Z 方向は全体座標系 Z 方向(鉛直方向)に一致させる必要がある。

3) 格子モデルの作成

主桁、横桁、載荷荷重ラインを設定する。

4) 荷重ケースの設定

影響線載荷荷重ケースを設定する。

5) 橋梁別種別の設定

「鋼橋」「PC 橋」「RC 橋」を設定する。

橋梁種別は、衝撃係数を内部で計算する時に使用する。

6) 車両荷重係数の設定

L 荷重の場合、部材種別毎に荷重値(10kN または 12kN)を設定する。

7) スパンの設定

支間長を設定する。

支間長は衝撃係数および活荷重強度を内部で計算する時に使用する。このとき衝撃係数計算用支間長と荷重強度計算用支間長を異なる値に設定することができる。

8) 影響線荷重種の設定

影響線を用いた死荷重および活荷重を設定する。

9) 解析の実行

解析を実行する。

16.2 格子モデルの作成

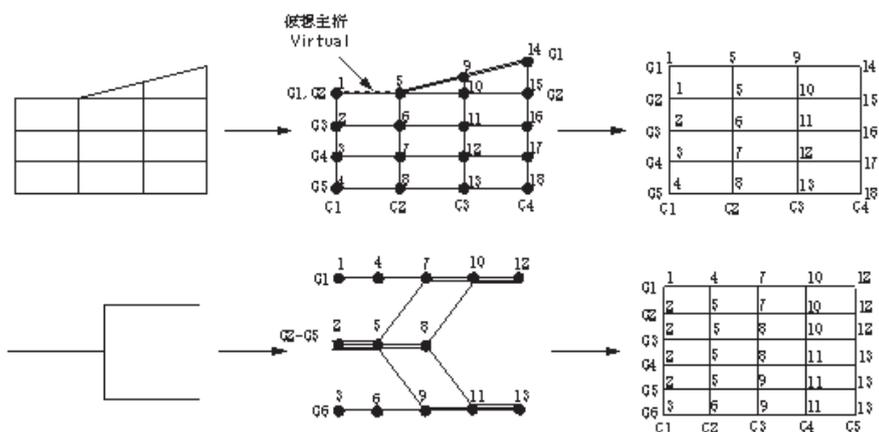
■ 格子モデル作成上の注意

部材は、主桁、横桁、その他の部材に分類される。荷重載荷面は、主桁と横桁で構成される格子形状で定義されるため、主桁と横桁は必ず交点を持つ必要がある。

主桁と横桁は影響線作成時に、単位荷重載荷用の格子形状節点の点列作成に必要となる。格子形状を作成するために、主桁と横桁は必ず交点を持つ必要があり、主桁どうし、横桁どうしが交差することは許されない。

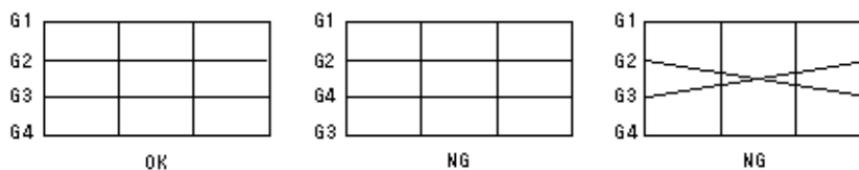
橋脚などの部材は、荷重載荷面となる格子形状作成時には必要とされないため、その他の部材として設定する。

単位荷重の載荷方向は、鉛直上方向が Z、格子面内が XY 面内(X 方向が橋軸方向)となる。



■ 主桁の作成

- 1) 主桁の番号(入力順序)は、橋軸直角方向に連続してつける必要がある。
- 2) 主桁どうし重なることはできるが、主桁どうし交差することはできない。
- 3) 主桁として設定した位置に部材がない場合は、剛性を持たない仮想的な主桁(仮想主桁)として自動認識される。
- 4) 主桁はせん断力の不連続処理を行うために要素座標系の z 方向を全体座標系の鉛直上向き方向に定義する(要素座標系の x-y 平面に格子面を作成する)必要がある。

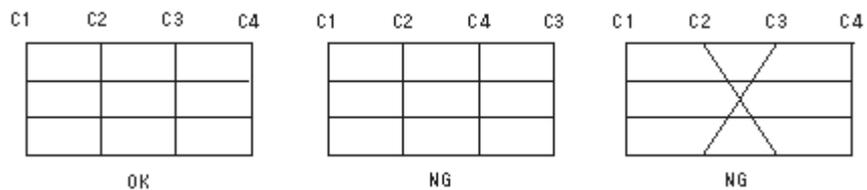


■ 横桁の作成

1) 横桁の入力順番は、橋軸方向に連続してつける必要がある。

2) 横桁どうし重なることはできるが、横桁どうし交差することはできない。

3) 横桁は、せん断力の不連続処理は行わないが、主桁同様に要素座標系の z 方向を全体座標系の鉛直上向き方向に定義する(要素座標系の x - y 平面に格子面を作成する)ことを推奨する(要素座標系を合わせると主桁と横桁成分が一致するので結果が見やすくなる)。

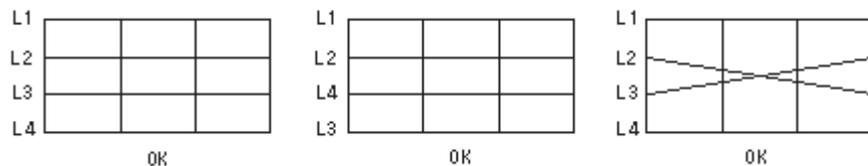


16.3 荷重の設定

■ 荷重ラインの作成

1) 荷重ライン番号(入力順序)は、橋軸直角方向に連続してつける必要はない。荷重ラインどうし重なることも、交差することもできる。

2) 荷重ラインは、 X 、 Y の座標値で定義する。指定したポイント間は線形補間され、内部で横桁上の距離を計算する。



■ 影響線荷重の設定

1) 影響線荷重(影響線死荷重、自動車荷重、群集荷重)を設定する。

荷重載荷範囲を指定するには、あらかじめ主桁、横桁、荷重ラインを作成しておく必要がある。

2) 荷重強度の単位は「 $\text{kN}\cdot\text{m}$ 」系で定義する。

■ 荷重範囲の指定

1) 荷重強度の単位は「kN-m」系で定義する。

2) 2本の主桁/荷重ラインで橋軸直角方向を、2本の横桁で橋軸方向を指定して、計4本の線分で囲まれる領域で荷重範囲を指定する。

このため、橋軸方向の荷重範囲は、開始位置、終了位置ともに横桁のある位置に限定される。また、橋軸直角方向については、ラインを設定できるので制限がない。

3) デフォルトでは開始位置と終了位置に同じ荷重値が入力されるが、それぞれに異なる値を入力することで、橋軸直角方向に勾配を持つ荷重を指定することができる。なお、橋軸方向に勾配を持つ荷重は作成することはできない。

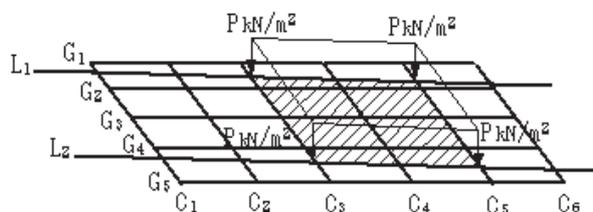
4) 主桁以外のラインを用いて線分布荷重や面分布荷重を載荷するときは、荷重ラインを作成する必要がある。

5) 車両の進行方向を「センターライン」として定義する。

これにより、「センターライン」の直角方向に自動的に載荷幅が定義される。車両走行方向に対して平行であれば必ずしも橋梁中央にセンターラインを定義する必要はない。

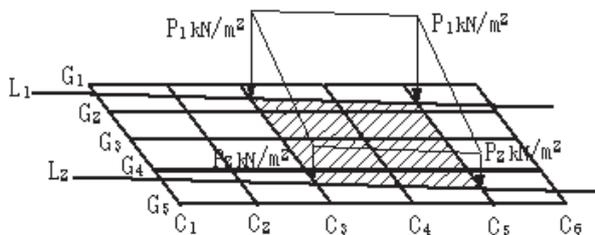
6) 面分布荷重(主桁/ラインと横桁の開始と終了を異なる番号に指定)

下の例では、L1～L2、C3～C5と指定。

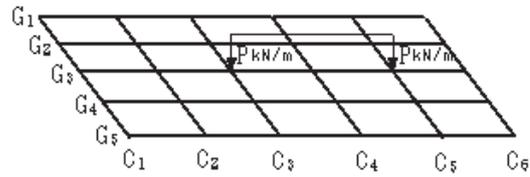


7) 面分布荷重(主桁/ラインと横桁の開始と終了を異なる番号に指定)

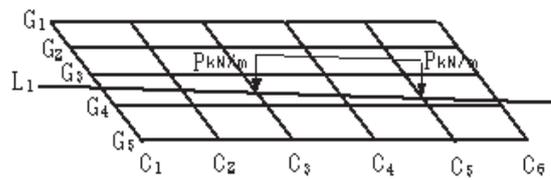
下の例では、L1～L2、C3～C5と指定、荷重値の開始と終了に異なる数値を指定。



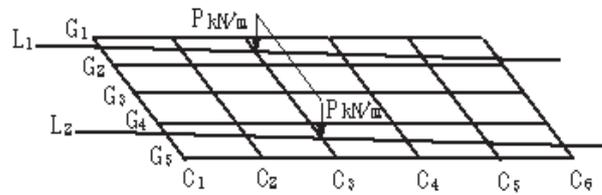
- 8) 主桁上の線分布荷重(主桁の開始と終了を同じ番号に指定)
 下の例では、G3~G3、C3~C5 と指定。



- 9) 荷重ライン上の線分布荷重(荷重ラインの開始と終了を同じ番号に指定)
 下の例では、L1~L1、C3~C5 と指定。

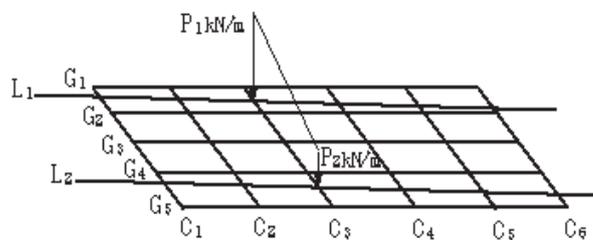


- 10) 横桁上の線分布荷重(横桁の開始と終了を同じ番号に指定)
 下の例では、L1~L2、C3~C3 と指定。



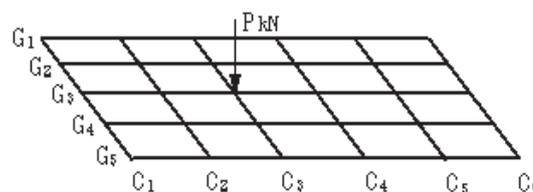
12) 横桁上の線分布荷重

下の例では、L1~L2、C3~C3 と指定、荷重値の開始と終了に異なる数値を指定。



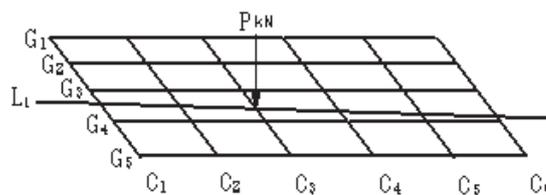
13) 主桁と横桁の交点上の集中荷重 (主桁の開始と終了を、横桁の開始と終了を同じ番号に指定)

下の例では、G3~G3、C3~C3 と指定。



14) 荷重ラインと横桁の交点上の集中荷重 (荷重ラインの開始と終了を、横桁の開始と終了を同じ番号に指定)

下の例では、L1~L1、C3~C3 と指定。



■ 影響線死荷重

橋面荷重、鋼重などに使用することができる。主桁/ラインと横桁の設定方法によって、集中荷重、線分布荷重、面分布荷重を設定することができる。

車両の進行方向を「センターライン」として定義する。車両走行方向に対して平行であれば必ずしも橋梁中央にセンターラインを定義する必要はない。

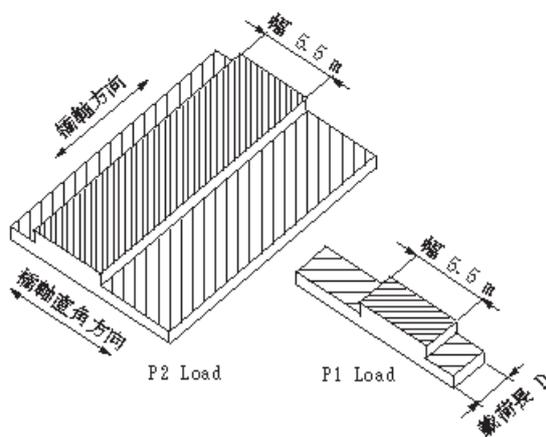
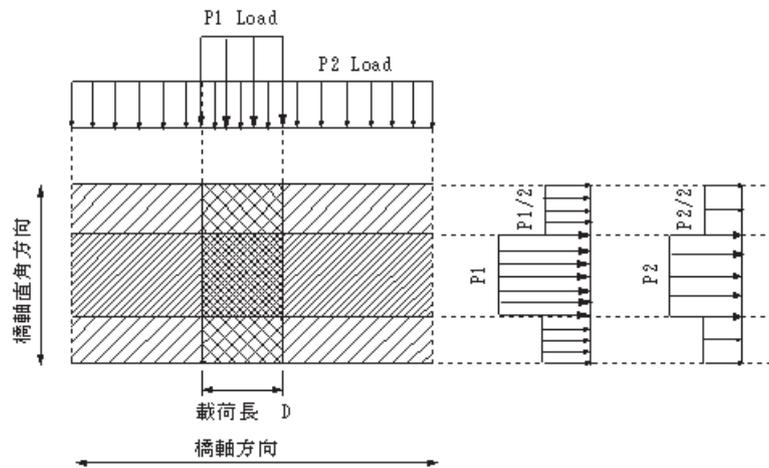
■ 自動車荷重

自動車荷重を設定する。道路橋示方書に対応している。

荷重は、部材に最も不利な応力が生じる位置に自動的に載荷される。同符号領域に載荷される荷重は、正領域に載荷された場合は最大値、負領域に載荷された場合は最小値として計算される。

荷重値の設置は必要ない。プログラムで自動的に設定された値が使用される。

車両の進行方向を「センターライン」として定義する。これにより、「センターライン」の直角方向に自動的に載荷幅が定義される。5.5m の主載荷範囲はこの方向で定義される。車両走行方向に対して平行であれば必ずしも橋梁中央にセンターラインを定義する必要はない。



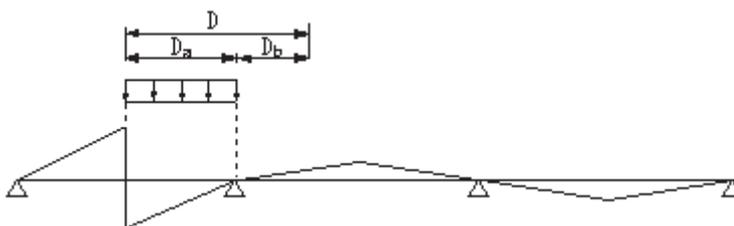
■ 荷重載荷方法

1) 橋軸方向

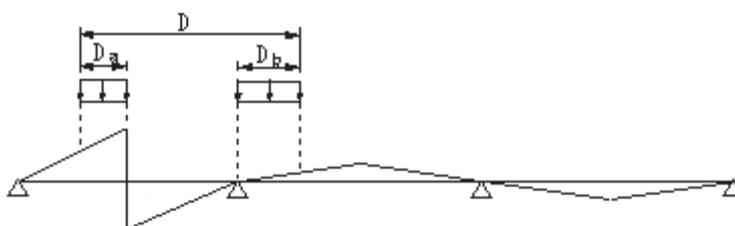
影響線の着目符号側で、橋軸方向の載荷長 D を超えない範囲で最大になるような位置（部材に最も不利な応力が生じる位置）を検索して、P1 荷重の橋軸方向の載荷位置を決める。

このときの各横桁間の長さは各主桁位置で異なるために、同一横桁区間にある主桁の平均長をその横桁間の区間長とする。

載荷長 D の範囲内にある荷重のみが考慮される ($D > D_a$)。



載荷長 D の範囲内での分断載荷は考慮される ($D \leq D_a + D_b$)。



載荷長 D を超えた範囲での分断載荷は考慮されない ($D > D_a + D_b$)。

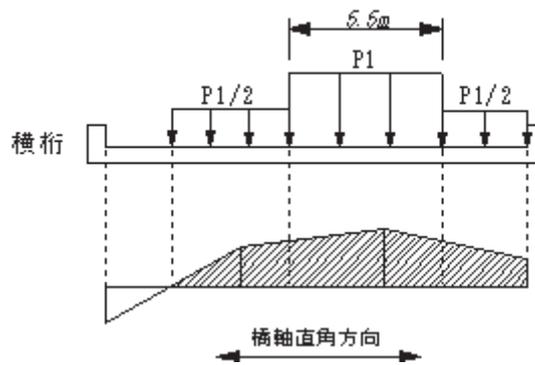


2) 橋軸直角方向

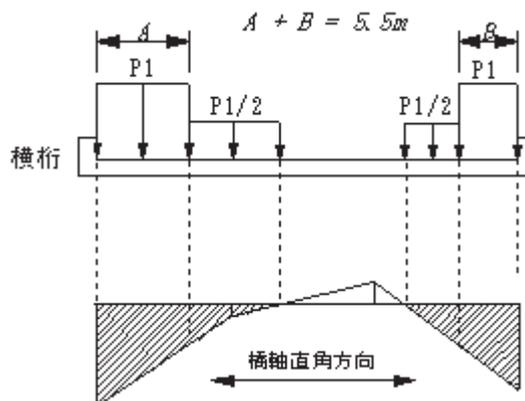
影響線の着目符号側で、橋軸直角方向の載荷幅を超えない範囲で最大になるような位置(部材に最も不利な応力が生じる位置)を検索して、P1 荷重の橋軸直角方向の載荷位置を決める。

このときの距離は「センターライン」の法線方向で計算される。従って「センターライン」は車両の走行方向に設定する必要がある。

載荷幅が分断されていない場合



載荷幅が分断されている場合



■ P1 等分布荷重

載荷長 D によって、A 活荷重、B 活荷重に分類されます。

P1 等分布荷重の値は、道路橋示方書に準じてあらかじめプログラム内部で設定されています。荷重値を変更することはできません。

各成分に使用する荷重値(10kN または 12kN)の取り扱いを、橋の種類ごとに、または主桁・橋脚などの部材ごとに 変更したい場合は、「P1 荷重の係数」を別途設定することができます。

-		載荷長 D	主載荷荷重(幅 5.5m)			従載荷荷重	
			曲げモーメントを算出する場合	せん断力を算出する場合		主載荷荷重の 50%	
P1 等分布荷重	A 活荷重	6 m	10 kN/m ²	12 kN/m ²			
	B 活荷重	10 m					
-		X	Y	Z	Ax	Ay	Az
変位成分		10kN/m ²					
-		Rx	Ry	Rz	RAx	RAy	RAz
支点反力成分		12 kN/m ²					
-		N	Qy	Qz	Mx	My	Mz
断面力成分		10kN/m ²	12 kN/m ²	12 kN/m ²	12 kN/m ²	10 kN/m ²	10 kN/m ²

参考文献「道路橋示方書」

■ P2 等分布荷重

P2 等分布荷重の値はスパン長 L によって決まり、プログラム内部で計算されます。スパン長 L は、「スパンの設定」ダイアログで設定された値を使用します。

-	主載荷荷重(幅 5.5m)			従載荷荷重
	$L < 80 m$	$80 \leq L \leq 130 m$	$L > 130 m$	
P2 等分布荷重 (kN/m ²)	3.5	4.3-0.01L	3.0	主載荷荷重の 50%

参考文献「道路橋示方書」

■ 群集荷重

群集荷重は、道路橋示方書仕様がある。

荷重は、部材に最も不利な応力が生じる位置に自動的に載荷される。同符号領域に載荷される荷重は、正領域に載荷された場合は最大値、負領域に載荷された場合は最小値として計算される。

荷重値の入力はできない。プログラム内部の値が使用される。任意の荷重値を指定する場合は、「その他の活荷重」を使用する。

車両の進行方向を「センターライン」として定義する。車両走行方向に対して平行であれば必ずしも橋梁中央にセンターラインを定義する必要はない。

1) 道路橋示方書仕様

荷重値はスパン長 L によって決まり、プログラム内部で計算される。

スパン長 L は、「スパンの設定」で入力された値を使用する。

-	$L \leq 80 \text{ m}$	$80 < L \leq 130 \text{ m}$	$L > 130 \text{ m}$
等分布荷重 (kN/m^2)	3.5	$4.3 - 0.01L$	3

参考文献「道路橋示方書」

■ その他の活荷重

任意の荷重値を入力することができる。
車両の進行方向を「センターライン」として定義する。

その他の活荷重は、任意の荷重値を入力することができる。
荷重は、部材に最も不利な応力が生じる位置に自動的に載荷される。同符号領域に載荷される荷重は、正領域に載荷された場合は最大値、負領域に載荷された場合は最小値として計算される。

車両の進行方向を「センターライン」として定義する。これにより、「センターライン」の直角方向に自動的に載荷幅が定義され、車両走行方向に対して平行であれば必ずしも橋梁中央にセンターラインを定義する必要はない。

16.4 その他の設定

■ 橋梁タイプの設定

活荷重を計算しない場合は、解析に影響はない。

衝撃係数 i の値はスパン長 L によって決まり、プログラム内部で計算される。スパン長 L は、「スパンの設定」で入力された値を使用する。

橋梁の種類	衝撃係数
鋼橋	$20 / (50+L)$
PC 橋	$10 / (25+L)$
RC 橋	$7 / (20+L)$

参考文献「道路橋示方書」

■ スパンの設定

活荷重を計算しない場合は、特に設定する必要はない。衝撃係数 i の算出に使用される。予め横桁を作成しておく必要がある。

P2 荷重のようにスパン長によって決まるような荷重強度の場合、構造上のスパン長 L とは別に荷重用スパン長 L を使用することで、構造上のスパン長に依存しない荷重強度を指定することができる。

「スパンの種類」、「ピン接合」は、「ゲルバー橋」、「ラーメン橋」の橋梁形式を選択したときのみ有効になる。

橋梁形式	スパンの種類	両端固定	左端ピン	右端ピン	両端ピン
ゲルバー橋	桁区間	○	-	-	-
	ラーメン区間	○	○	○	○
	張り出し区間	○	○	○	-
	吊り桁区間	-	○	○	○
ラーメン	桁区間	○	-	-	-
	ラーメン区間	○	-	-	-
	張り出し区間	○	○	○	-
	吊り桁区間	-	○	○	○

参考文献「道路橋示方書」

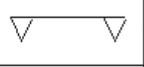
■ 衝撃計算タイプの設定

活荷重を計算しない場合は、特に設定する必要はない。
 部材ごとに「スパン長」、「衝撃係数」を設定、適用することができる。
 参考文献「道路橋示方書」

■ P1 荷重の係数の設定

部材ごとに P1 荷重の取り扱いを変更することができる。
 活荷重を計算しない場合は、特に設定する必要はない。
 各成分に使用する荷重値(10kN または 12kN)の取り扱いを、橋の種類ごとに、または主桁・橋脚などの 部材ごとに変更したい場合に使用する。

適用の目安

		変位	反力			断面力				
			V	H	M	軸力	せん断力	ねじりモーメント	曲げモーメント	
単純桁橋/ 連続桁橋	主桁	○	●	-	-	○	●	●	○	
	横桁		○	○	○	○	○	○	○	
ラーメン橋	 主桁	○	●	-	-	○	●	●	○	
	橋脚	○	●	●	●	●	●	●	○	
	 主桁	○	-	-	-	○	●	●	○	
	橋脚	○	●	●	●	●	●	●	○	
トラス橋	上下弦材	○	●	-	-	○	-	-	-	
	斜材、垂直材		●	-	-	●	-	-	-	
アーチ橋	アーチリブ	○	●	●	●	○	●	●	○	
	補剛桁		●	-	-	○	●	●	○	
	垂直材		-	-	-	●	●	●	-	
斜張橋	主桁	○	●	-	-	○	●	●	○	
	塔		塔柱等	●	●	●	○	○	○	○
			主桁反力を受ける横梁	-	-	-	●	●	●	●
	斜材		-	-	-	-	-	-	-	
立体ラーメン横方向	横軸直角方向	●	●	●	●	●	●	●		

○…10kN/m² ●…12kN/m²

【ラーメン橋】

主桁に関しては、桁橋の主桁と同じように考えられる。

橋脚や斜材に作用する軸力、せん断力およびねじりモーメントに関しては、上部工からの反力にて発生するものなので 12kN/m^2 を用いるのが妥当と考えられる。

トラス橋、アーチ橋

トラス橋の上下弦材、アーチ橋のアーチリブ、補剛桁に関しては、桁橋の主桁と同じように考えられる。

トラス橋の斜材、アーチ橋の垂直材等に関しては、せん断力に対して有効に働く部材なので、 12kN/m^2 を用いるのが妥当と考えられる。

【斜張橋】

主桁に関しては、桁橋の主桁と同じように考えられる。

ケーブル張力は主桁や塔の変位に追従して発生することや、アーチ系橋梁の補剛桁と異なり桁の剛性が大きいことから、ケーブル張力の影響線は桁のたわみに類似すると予想されるので、 10kN/m^2 を用いるのが妥当と考えられる。

塔の活荷重による断面力は、ケーブル張力および主桁からの支承反力により発生するが、これらのうちケーブル張力によるものが支配的であることから、ケーブル張力の算出と同じように 10kN/m^2 を用いるのが妥当と考えられる。

塔の横梁は主桁の反力を直接受けるものであることから、 12kN/m^2 を用いるのが妥当と考えられる。

【立体ラーメン構造(橋軸直角方向、下部工の設計)】

下部工に作用する活荷重は上部工の反力なので、ラーメン橋脚の面内方向(橋軸直角方向)の曲げモーメントやせん断力に関しては、 12kN/m^2 を用いるのが妥当と考えられる。また鋼製橋脚の梁のたわみに関しても同じように 12kN/m^2 を用いるのが妥当と考えられる。

■ 同時性の計算の設定

同時性の計算の設定をすることができる。

オプション機能ですので必ずしも設定する必要はない。

任意変位量が最大/最小となるときに指定した節点の変位量を表示する。

任意支点反力が最大/最小となるときに指定した節点の支点反力を表示する。

任意部材力が最大/最小となるときに指定した部材の部材力を表示する。

17. 波浪荷重の生成

17.1 概要

midas Civil で提供する波浪荷重は海洋構造物に作用する波力に関して入力した波浪の情報をを用いて静的や動的解析用の波浪荷重を生成する機能である。一般的に海洋構造物の部材に掛かる波力は Morrison の式を使って算定することができる。

17.1.1 波のパラメータの用語整理

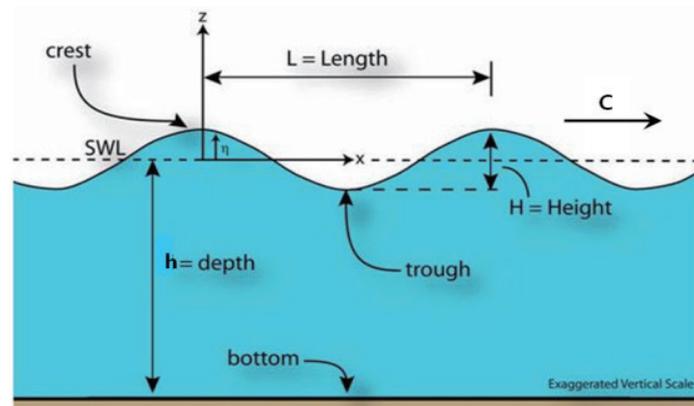


図 17.1.1 波のパラメータの定義

- (1) H = 波高
 - (2) $C = L/T$ =: 波速
 - (3) $L = gT^2/2\pi$: 波長 (浅海 $= \frac{g}{2\pi} T^2 \tanh \frac{2\pi h}{L}$, 深海: $\tanh \frac{2\pi h}{L} = 1$)
 - (4) η = 波形 ($\eta = 0$, 静水面), $\eta(x, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}$
 - (5) h = 水深
 - (6) k =: 波数(Wave Number)
 - (7) $\sigma = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{2\pi}{\sqrt{gk \tanh kh}}$
 - (8) $\sigma^2 = gk \tanh kh$: dispersion relationship, $\Rightarrow C^2 = \frac{L^2}{T^2} = \frac{g}{k} \tanh gh$
- 相対水深 h/L の大きさで波の種類が分類できる。
 (深海波: $h/L > 1/2$, 浅海波: $1/25 < h/L \leq 1/2$, 長波または極浅海波: $h/L \leq 1/25$)

17.1.2 海洋構造物の部材に作用する波力

一般的に海洋構造物に掛かる波力は Morison 方程式を使って算定できる。

$$dF_T = dF_D + dF_I = \text{抗力} + \text{質量力}$$

$$dF_D = C_D \frac{w}{2g} D_u |u|, \quad dF_I = C_M \frac{w}{g} V \frac{du}{dt}$$

直杭上のトータル力

$$F = \int_{-h}^{\eta} dF = \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} C_D \rho D_u |u| dz + \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} C_M \rho V \frac{Du}{Dt} dz$$

ここで、：

F : Wave force、波力(t)

u : Water particle velocity、水粒子速度(m/s)

ρ : Fluid density、海水密度(w/g)

V : Volume of the Pile per Unit Length、単位長さ当たりの体積

D : Piling diameter or projected area/unit elevation of the cylinder、部材の外径(m)

C_D : Drag coefficient、抗力係数(0.6~2.0) – パイプの場合 1.0

C_M : Inertia coefficient、質量力係数(1.5~2.0) – パイプの場合 2.0

$$C_M = 1 + k_m = 1 + \frac{a}{b}$$

$dF_I = C_M F_B$, $F_B = \rho V \frac{du}{dt}$: Hydrostatic buoyancy force、浮力

つまり、海洋構造物に作用する波浪荷重を算定するのは複雑な海洋環境を模式化し、任意位置で水粒子速度と加速度を求める問題である。

17.1.3 海洋波浪の工学的性質

(1) 水粒子の運動

鉛直及び水平方向の水粒子の速度成分を空間関数で表すと、相互間 90° の位相差を持つ。

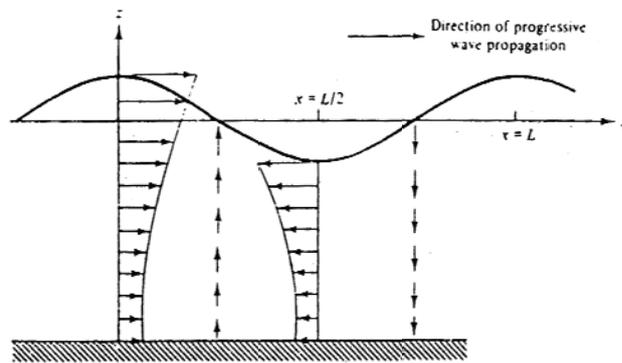


図 17.1.2 進行波の水粒子速度

(2) 水粒子の軌跡: 楕円方程式

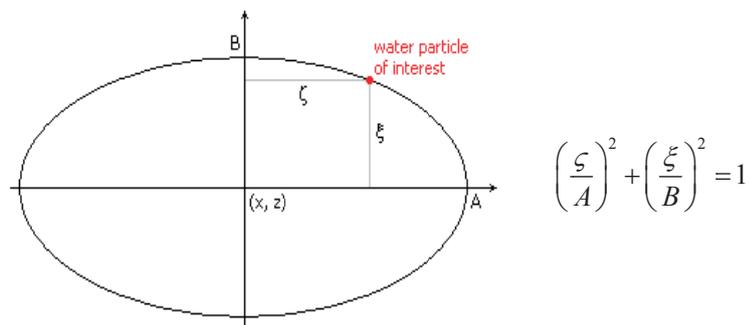


図 17.1.3 楕円形の水粒子の軌跡

浅海域(相対水深 $h/L < 1/20$)では $A = \frac{HT}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$, $B = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{z}{h}\right)$ であり、 A は z の関数でないので水平方向の水粒子の移動距離は水深によって全て同じである。

深海域(相対水深 $h/L > 1/2$)では $A = \frac{H}{2} e^{z/h}$, $B = A$ であり、円運動をしながら水深によって指数関数的に減少する。

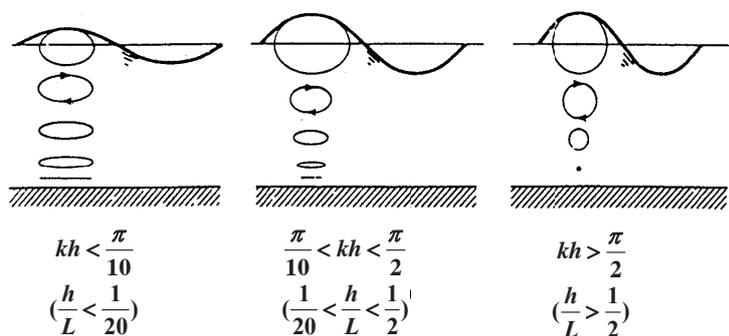


図 17.1.4 相対水深による進行波の水粒子の軌跡

Morison 方程式では基本的に入射する波に比べて杭の直径が大きくない($\frac{D}{\lambda} < 0.2$)と仮定し、回折を考慮せずに部材間の相関関係も考慮しない。しかし、回折効果の場合、杭の直径が波長に対して大きくなると($\frac{D}{\lambda} > 0.2$)、抗力は質量力に比べて無視でき、この時は杭の直径効果を考慮しなければならない。この場合は MacCamy and Fuchs(1954)や Mogridge and Jamieson(1976) などが円形シリンダーについて解析解を求めたことがあり、任意断面については数値解析が求められる。このような結果を見ると、Morison 方程式で質量力係数を調整し位相差を与えることによって補正できることが知られている。先に挙げた Morison 方程式は 部材に対して法線方向の成分だけを表しているが、接線成分(ほぼ質量項は除いて、抗力項だけを使用)は法線方向の成分に対してその大きさが小さいために、通常は法線方向の成分だけを考慮する。

17.2 波浪理論

波浪理論の基本仮定は非回転性、非圧縮性の流体運動を仮定にするので、流体運動はラプラス方程式で $\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ で表すことができる。

■ 非粘性の非回転流体の境界条件

(1) 運動学的境界条件(Kinematic Boundary Condition, KBC)

: 水粒子の運動に関する条件、どの境界面でも境界面を通る流れはできない。

① 運動学的自由水面の境界条件(KFSBC)

② 海底面の境界条件(KBBC)

(2) 力学的境界条件(Dynamic Boundary Condition, DBC)

: 大気と海水面との境界面である自由水面は圧力が一定に維持される。

① 力学的自由水面の境界条件(DFSBC): 自由水面上の圧力は波形に対して一定である。

(3) 側面境界条件(Lateral Boundary Condition, LBC)

17.2.1 Airy wave theory : 線形波動理論

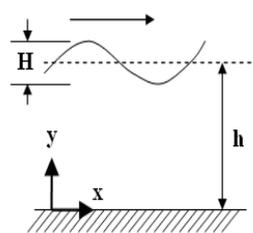
重力波(Gravity wave)理論の中で最も基本的なモデルとして Linear wave とも言える。海洋波は実際に不規則な運動をするが、この不規則な海洋波は単方向、単調な性質を持つ正弦波の重ね合わせで説明できるので、この正弦波モデルを通じて波のメカニズムを論じることができる。

重力波モデルの誘導はいくつかの基本仮定(単方向、単調、前進、無限の平らな底面、非粘性流体、非圧縮性流体、表面張力の無視、渦なし運動)を通じて速度ポテンシャルを想定することにより 2-D 'potential boundary value problem' で正式化できる。

支配方程式はラプラス方程式($\nabla^2\Phi = 0$) で誘導され、底面条件、輻射条件、自由表面条件を満たすポテンシャルが求まれば、流体粒子の速度、加速度及び圧力などが求められることができる。

しかし、上記で説明した境界条件の中で自由表面条件が非線形になるので正解は求めることができない。従って、摂動法を使って近似解を求めるようになり、境界条件の適用過程で線形項だけを考慮するので Airy wave モデルが誘導される。従って、Airy

wave theory は水深や波長に対して波高が相対的に小さい場合に適用できる。最終的に得られる結果から、波力を得るために必要な結果を整えると次のようになる。



- 波高 : H
- 波長 : λ
- 波の周期 : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (ω = 円振動数)
- 波数 : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 、水深 : h

$$\text{表面波 } \zeta = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t)$$

一般 有限深さ境の時

$$\text{分散関係 } \omega^2 = gk \tanh kh$$

粒子速度

$$u = \frac{\omega H}{2} \frac{\cosh ky}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t), \quad v = \frac{\omega H}{2} \frac{\sinh ky}{\sinh kh} \sin(kx - \omega t)$$

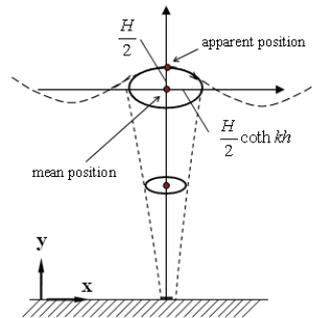
粒子加速度

$$a_x = \frac{\omega^2 H}{2} \frac{\cosh ky}{\sinh kh} \sin(kx - \omega t), \quad a_y = -\frac{\omega^2 H}{2} \frac{\sinh ky}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t)$$

Airy wave theory を適用する時、一つ注意すべき点は自由表面の境界条件の線形化過程で静水面に関してテイラー展開をするため、特定の深さ(y)における粒子の速度及び加速度を求めるときは、求めたい位置ではなくその時の粒子軌跡が持つ平均位置を代入する。一般の有限深さ環境での粒子の軌跡は速度成分を積分して次のような楕円形で求められる(無限水深の場合は円軌跡を持つ)。

粒子軌道

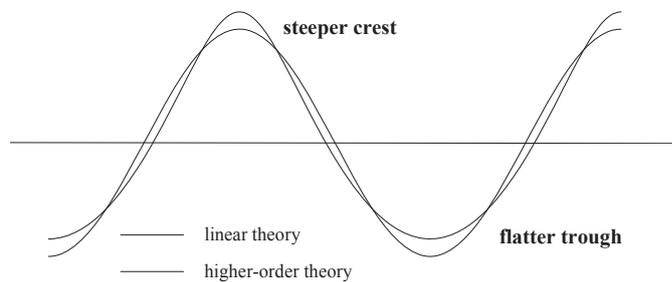
$$\left(\frac{\xi}{\frac{H \cosh ky}{2 \sinh kh}} \right)^2 + \left(\frac{\zeta}{\frac{H \sinh ky}{2 \sinh kh}} \right)^2 = 1$$



17.2.2 Stokes 5th wave theory: 非線形波動理論(5次項まで Stokes 級数展開)

17.2.1 の線形波動理論は様々な場面では非常に有用であるが、境界条件を線形化させるために小振幅を仮定し、実際の波形を反映するには不足な点が多い。線形波動理論の拡張として Stokes(2次項)や Hunt(3次項)などが解を求めたことがあり、Skjelbreia & Hendrickson (1961)は5次項理論を整理した。今は様々な協会で船舶や海洋構造物の波浪荷重を求める際に5次項モデルを使用するよう規定している。

線形波動理論は1次項で近似することによって正弦波を持つ。その反面、高次項理論は有限振幅理論として、より実際の波形に近いモデルが表現できる。下図に示すように高次項モデルの波形は線形に比べて波頭がより尖っているのに反面、谷はより平らな形を持っている。



Stokes の5次項波形で求められる流体の速度、加速度は次の通りである。

■ 表面波形

$$k\zeta = \delta \cos \theta + (\delta^2 B_{22} + \delta^4 B_{24}) \cos 2\theta \\ + (\delta^3 B_{33} + \delta^5 B_{35}) \cos 3\theta + \delta^4 B_{44} \cos 4\theta + \delta^5 B_{55} \cos 5\theta$$

■ 分散関係

$$\omega^2 = gk \tanh kh (1 + \delta^2 C_1 + \delta^4 C_2) \\ O(\varepsilon) \quad O(\varepsilon^3) \quad O(\varepsilon^5)$$

ここで、 B_{ij} 、 C_i などは係数で、 $\delta = O(\varepsilon)$ は量的項を表し、波数 k の関数である。一方、線形波動理論では波の周期、波高、水深などが与えられれば分散関係から波数が直ぐに求められるが、非線形波動理論では波形と分散関係の式を繰り返し計算で解かないと波数 k と δ が求められない。

➤ 粒子の速度

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = C_P [(\delta A_{11} + \delta A_{13} + \delta A_{15}) \cosh ky \cos \theta] \\ + 2(\delta^2 A_{22} + \delta^4 A_{24}) \cosh 2ky \cos 2\theta \\ + 3(\delta^3 A_{33} + \delta^5 A_{35}) \cosh 3ky \cos 3\theta \\ + 4\delta^4 A_{44} \cosh 4ky \cos 4\theta \\ + 5\delta^5 A_{55} \cosh 5ky \cos 5\theta$$

➤ 粒子の加速度

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w C_P [(\delta A_{11} + \delta^2 A_{13} + \delta^5 A_{15}) \cosh ky \cos \theta] \\ + 4(\delta^2 A_{22} + \delta^4 A_{24}) \cosh 2ky \sin 2\theta \\ + 9(\delta^3 A_{33} + \delta^5 A_{35}) \cosh 3ky \sin 3\theta \\ + 16\delta^4 A_{44} \cosh 4ky \sin 4\theta \\ + 25\delta^5 A_{55} \cosh 5ky \sin 5\theta$$

(Z 方向の速度と加速度も同じ方法で求めることができる。)

17.2.3 Stream Function :流れ関数を用いた非線形波動理論

17.2.2 で紹介した高次項 Stokian 波理論(3 次項、5 次項)は誘導過程だけでなく式自体も大変複雑で、それ以上の高次項に展開するのは現実的に難しい。こうした理由でコンピュータを使ってどの次項までも展開できる波動理論の必要性が出てきた。最初に Chappellear(1961)が速度ポテンシャルを利用した理論を出して、以降 Dean(1965)が流れ関数を使って Chappellear の理論より計算が簡単な非線形波動理論を発表した。以降、Cokelet(1977)が破綻直前の波高まで正確に計算できる理論を発表したが、現の設計には適用されていない。ここでは一番一般的に使われる Dean の理論を使用した。

流れ関数理論は前の波動理論で基本的に仮定した速度ポテンシャルの代わりに流れ関数を使用している。流れ関数を使って x , y 方向の流体速度を次式のように定義できる。

$$\triangleright \text{水粒子の速度} : u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

このように定義した流れ関数は速度ポテンシャルと同じくラプラス方程式を満足し、これにマッチする流れ関数の境界条件も得ることができる。便宜上、波速 C で移動する座標系を取れば、波浪の流れ関数は時間項が無くなり、 x , z だけの関数になって境界条件を満足する N 次項の流れ関数が次式のような形で表現できる。

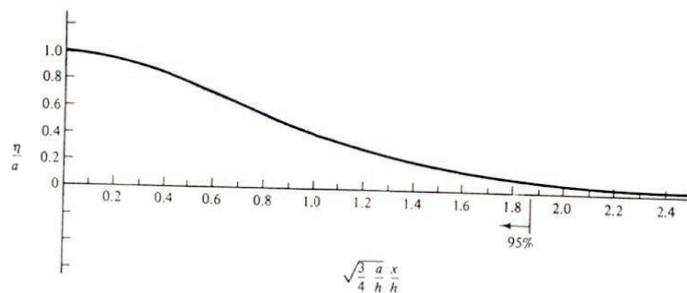
$$\Psi(x, z) = Cz + \sum_{n=1}^N X(N) \sinh nkz \cos nkx$$

この形の解は一つの境界条件-動的自由面条件-を満たしていないが、これを近似的に満足できるように係数 $X(n)$ を定義する必要があり、これは $X(n)$ への最適化問題になる。一方、流れ関数は Current を考慮しても計算できるが、Current があるときに粒子速度に Current の速度補正だけをする他のモデルより精度が高い。

17.2.4 Cnoidal/Solitary wave : 浅海域、周期波(ヤコビアン楕円積分項で表現)

浅水環境になると、波自体の挙動だけでなく深さに応じる圧力と速度変化も複雑になる。前で説明したストークス波 (Stokian wave profile) の場合、浅水環境を仮定し、それに合う展開をしようとすれば、短い波長や小さな波高を仮定しなければならないので、浅水環境で深さに比べて長い波長の波をモデル化するためには前とは違う摂動仮定が必要である。

孤立波 (Solitary wave) はクノイダル波の集なケースであり、理論自体は 1870 年代に発表された。有限振幅が形態的な変化なく置き換わる定常波モデルが他の線形化過程なく得られたが、このモデルの解が孤立波である。孤立波は波から遠く離れた所の水は妨害攪乱されないと仮定し、理論的に無限波長を持ち、波の位相が(+)の値だけを持つ。(つまり、波高が静水面の上だけに存在する。)



クノイダル理論は最初に孤立波のように近似解で得られたが、解の形が周期で提示される。“クノイダル”という名は 水面上昇がヤコビアン楕円方程式の二乗に比例し、正弦の特性を持っていることから合成語の形で作られた。クノイダル式の波の形を見ると浅水における波の特徴である長くて平らな谷と細い峰の形をよく表していることが分かる。クノイダル波では速度、加速度、波の形などはヤコビアン楕円方程式の級数で表現されるが、この関数のパラメータ m ($0 \leq m \leq 1$) が 1 になれば、孤立波になる。

17.2.5 孤立波 (Solitary wave)

孤立波理論はクノイダル理論の制限された場合に適用される。

$0 \leq m \leq 1$ で $m=1$ の場合、孤立波になる。

17.3 波浪理論の適用限界

前で説明した波浪理論はそれぞれ基本的な仮定があり、これらの理論を全ての波のモデル化にそのまま適用することはできない。波長、波高、水深によって妥当性を持つモデルを選択して使用すべきである。下の図は波浪理論を適用するに当たって各理論の妥当性を持つ範囲を表している。

適用だけでなく、検証のための例題環境のモデリングにおいても各波理論が適用できる妥当な波高、波長、水深などを仮定してモデリングしなければならない。

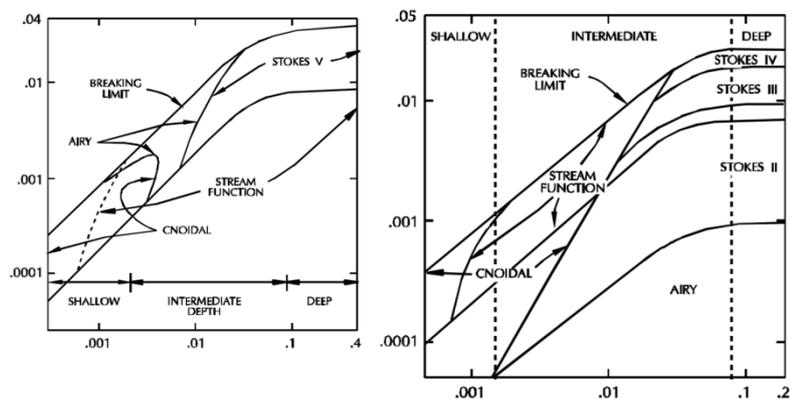


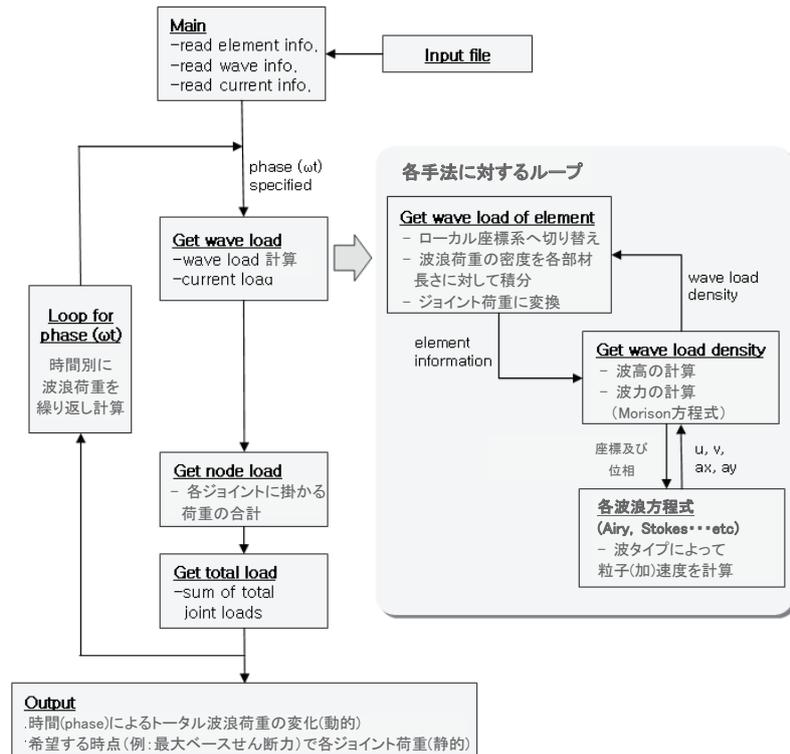
図 17.3.1 Dean グラフと Le Mehaute グラフ

参考文献

- [1] T. H. Dawson, Offshore Structural Engineering, Prentice-Hall, Inc., 1983.
- [2] R. G. Dean and R. A. Dalrymple, Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists, 2nd ver., World Scientific, 1991.
- [3] J. D. Fenton, The Cnoidal Theory of Water Waves, in Developments in Offshore Engineering, Gulf Publishing Company, pp 55-100, 1999.
- [4] J. D. Fenton, A high-order cnoidal wave theory, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 94, pp. 129-161, 1979.
- [5] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, Numerical Recipes in C, 2nd edition, Cambridge University Press, 1992.

17.4 計算手順

midas Civil で入力した波浪情報を利用して波浪荷重を生成する流れを以下に示す。



midas civil Analysis Manual

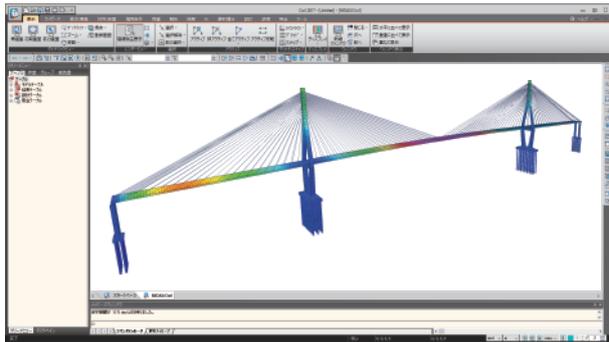
Developed by MIDAS Information Technology Co., Ltd.

Copyright © MIDAS Information Technology Co., Ltd. Since 1989, All rights reserved.

MIDAS CONSTRUCTION PROGRAMS

a total of over 30,000 licenses used worldwide in over 110 countries

The Largest CAE Software Developer
in Civil Engineering

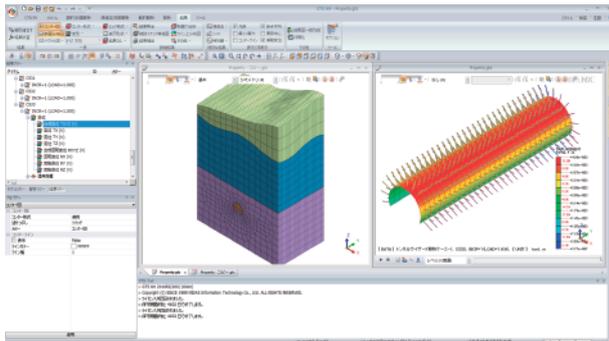


midas Civil

任意形状構造物の3次元汎用構造解析プログラム

midas Civilは、直観的なユーザーインターフェイス環境とコンピュータグラフィックス技術が適用された土木分野の汎用構造解析及び最適設計システムです。

PC橋、斜張橋、吊橋はもちろん、非定型構造物や最新施工法を適用した構造物のモデリングが自由にできますし、土木分野に必要な静的・動的解析、材料・幾何非線形解析、段階施工解析機能を提供しています。



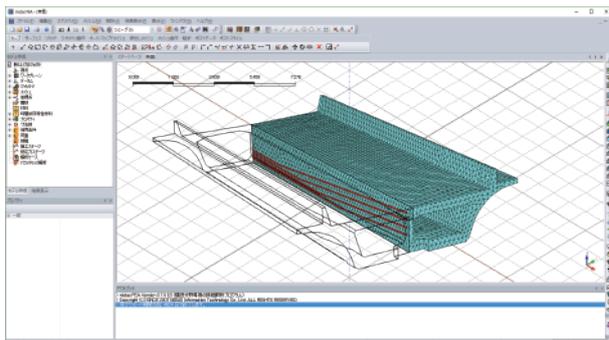
GTS NX

地盤分野汎用解析システム

GTS NXは最先端プリ・ポストと解析機能を搭載した新しい概念の地盤汎用解析プログラムです。

GTS NXは最新のOS環境変化に合わせて64ビット、並列処理を適用した統合ソルバーを搭載しており、初心者も使いやすいように直観的なリボンメニュー形式を用意しております。

また、様々な解析機能、圧倒的に速い解析速度、優れているグラフィック表現および結果整理機能などを提供します。

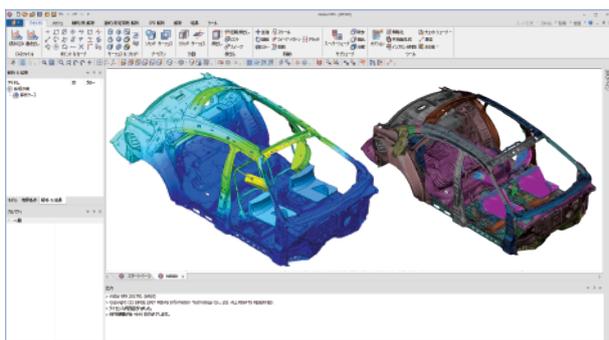


FEA NX

非線形詳細FEM解析プログラム

FEA NXは、建築・建設分野における高度な解析を行うことを目的とした解析ツールです。

補修・補強のための詳細解析はもちろん、マスコンの熱応力解析、コンクリートのひび割れ解析を行うことができます。



midas NFX

機械分野における汎用構造解析プログラム

midas NFXは、windows上で動作するプリ・ポスト・ソルバー一体型の構造解析解析ツールです。

設計者の方でも解析専任者の方でも快適にお使いいただける作業環境を提供します。

線形解析から高度な接触問題を含む非線形解析、CFD解析まで行うことができます。



株式会社マイダスイティジャパン

〒101-0021 東京都千代田区外神田5-3-1 秋葉原OSビル7F

TEL 03-5817-0787 | FAX 03-5817-0784 | e-mail c.support@midasit.com | <http://jp.midasuser.com/civil>

Copyright© Since 1989 MIDAS Information Technology Co., Ltd. All rights reserved.